

Una experiencia de cómo extender un proceso de innovación educativa a otros profesores de Matemáticas

M. Delgado Pineda, UNED, España, miguel@mat.uned.es
M. Martínez-Reyes, UAEMex, México, mmartinezr@uaemex.mx
J. M. López-Balderas, ANIEM, México, jmlbalderas@gmail.com

Presentado en eXIDO25.



Resumen: En este trabajo se presenta una forma de intentar extender un proyecto genérico de innovación matemática denominado “el andar de una hormiga”. El proyecto plantea cómo facilitar el aprendizaje de los conceptos relativos al concepto de función y fijar los conceptos básicos relacionados al tema en la mente de los estudiantes. Para ello, se presenta al interesado situaciones y retos relacionados con el análisis del andar de una hormiga por el perímetro de un cuadrado. En esencia, intenta hacer relacionar el desplazamiento de lo recorrido por la hormiga con la distancia a la que dicha hormiga está de un determinado punto resaltado. Se presenta como paradigma una situación realizada con profesores, tanto universitarios como no universitario, interesados en poder comprender el proceso y poder desarrollar las experiencias relativas al andar de la hormiga en sus centros de trabajo con sus estudiantes de diferentes niveles educativos.

Abstract: This paper presents a way to extend a generic mathematical innovation project called “the walk of an ant”. The project proposes how to facilitate the learning of concepts related to the concept of function and to fix the basic concepts related to the topic in the minds of students. To this end, the interested party is presented with situations and challenges related to the analysis of an ant's walk around the perimeter of a square. Essentially, it attempts to relate the distance traveled by the ant to the distance between the ant and a specific highlighted point. A situation involving both university and non-university teachers interested in understanding the process and developing experiences related to the ant's walk in their workplaces with their students at different educational levels is presented as a paradigm.

Palabras clave: Experimentación matemática, Función real, Graficación de funciones, Formación continua de profesores, Taller de Matemáticas.

Keywords: Mathematical experimentation, Real function, Graphing of functions, Continuing teacher training, Mathematics workshop.

Introducción

Entre las razones que nos impulsan a presentar este trabajo está el de facilitar a otros profesores nuestras propias experiencias didácticas que están relacionadas con el proyecto del “andar de una hormiga” realizadas en distintos marcos educativos, los cuales se referencian desde la enseñanza primaria hasta la enseñanza universitaria. El lector puede acceder a las referencias Delgado & Martínez (2019; 2021; 2023) para familiarizarse con el proyecto en general del andar de la hormiga y las opciones de instrumentación. Ahora bien, la razón última es dotar al profesor de una experiencia muy cercana a lo que experimentan los estudiantes cuando los profesores desarrollan las experiencias a las que nos referiremos más adelante; al respecto véase López et al. (2023), Martínez & Delgado (2019), Páez et al. (2025).

Una cuestión palpable aparece al revisar la literatura y los textos académicos para poder comprobar que en la mayoría de los casos se presenta el concepto de función real de variable real mediante un registro de representación semiótica analítico, constituido por una única expresión. Además, esa expresión o fórmula suele estar definida para todo el conjunto de números reales, aunque no entremos a valorar la cuestión de introducción del número real. Véanse por ejemplo los libros de Apóstol (1980), Spivak (1988) o Swokowski (1989), y los artículos Cuevas & Delgado (2016), Cuevas et al. (2018), Delgado (2016) y Dreyfus & Eisenberg (1983). También, suelen aparecer situaciones didácticas relativas a la interpretación de una tabla de valores como elemento introductorio a las tablas de función, puesto que el fin que se persigue es motivar a los estudiantes a utilizar el registro de representación gráfica catalizando estos grafos con representar gráficamente en puntos de un plano cartesiano correspondientes a dicha tabla de valores.

En general, las primeras funciones tratadas con los estudiantes o son funciones lineales o son funciones afines que, por supuesto, están definidas implícitamente en todo $\mathbb{R}$, sin entrar demasiado en ese conjunto y mostrándolo gráficamente como una línea recta. En cierta medida se impone describir los números reales como la longitud de segmentos en esa recta.

Las distintas trayectorias y apariencias didácticas que siguen los procesos educativos uniando los procesos relativos a una tabla de valores, a los puntos en el plano relativos a una tabla de valores, a la aparición de la función, como tal, y la perspectiva gráfica una función, constituyen la mayoría de las investigaciones didácticas de la literatura. Esto es mucho más acusado cuando un artículo se enmarca en la enseñanza no universitaria.

Usualmente, en el inicio del estudio del tema de funciones, hay un salto en un vacío educativo que se instancia en cómo una función pasa de estar definida en una lista de unos pocos valores-puntos, a estar definida en todo $\mathbb{R}$, uniando puntos. También, se aprecia otro salto en el vacío que suele emerger de forma implícita, la existencia del dominio de la función. En general, inicialmente se suele omitir tal concepto, presuponiendo que el campo de existencia es el máximo conjuntista posible. Es decir, una función casi queda enmarcada en algún registro analítico como si lo demás fuera prescindible. Esto puede generar una dificultad a la hora de interpretar las condiciones de cuándo dos funciones son iguales. Un ejemplo pudiera ser suficientemente clarificador cuando se pregunta al estudiante si las dos funciones siguientes son iguales: $f(x) = \sqrt{x^2}$ y $g(x) = \sqrt{x}^2$ y si alguna de estas es igual a la función $h(x) = x$. La verdad que formular esta pregunta a los estudiantes puede dar una idea de lo que queremos indicar, por ello, le aconsejamos al lector que la formule.

Otras dificultades colaterales aparecen en relación con la mono-expresión de la formulación analítica de una función. Es decir, las funciones definidas a trozos o por partes suelen emerger como una dificultad cuando el estudiante ha aceptado el concepto de una única expresión de la función sin necesidad de indicar un dominio.

El hecho que fundamenta la articulación de la experiencia con el “andar de una hormiga”, es que se establece como un experimento que permite a los estudiantes desarrollar diversas situaciones didácticas donde ellos generan todos y cada uno de los datos necesarios. Todas las situaciones se fundamentan en analizar a qué distancia está la hormiga de un punto fijo, elegido, en el supuesto de que dicha hormiga imaginaria (puntual) recorre uno o más lados de un cuadrado, sin retroceder y sin tener que depender del tiempo en el cual ejecuta el

movimiento de avance. En principio, se puede suponer que se trata de un cuadrado unitario, aunque en la práctica experimental no lo sea.

Lo primero que sorprende a los estudiantes de esta experiencia es que no se requiera que el cuadrado esté sujeto en un marco relativo de un sistema cartesiano, ver figura 1. Esta última característica permite realizar la experiencia tanto en el papel (cuadrado o no), como en una pizarra o un pizarrón, o en el suelo del aula. Pero, también, permite realizar la experiencia en un patio exterior, en cualquier suelo, como en un mundo digital que requiere la participación de un computador.

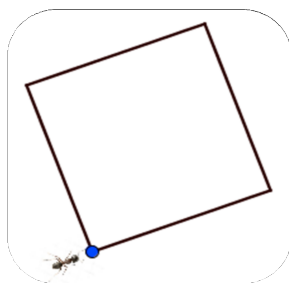


Figura 1. Una imagen inicial del problema de la hormiga.

En este trabajo mostramos las etapas que nos permitieron desarrollar y experimentar la posible extensión de la experiencia de la hormiga con otros profesores no relacionados inicialmente con esta actividad de la hormiga.

Se puede asegurar que cualquier profesor necesita creer en lo que le cuentan en un curso o taller. Por ello, en muchos talleres o conferencias, los ponentes tienen que hacer un esfuerzo en considerar algunas cuestiones emocionales en el diseño de experiencias educativas destinadas a profesores. En el caso que nos ocupa, no nos parece que sea excesivamente interesante lo que la hormiga intenta enseñar en el contexto puramente matemático; es decir, la trascendencia del contenido matemático. Sin embargo, lo más importante es lo que puede aprender el profesor al trabajar con la hormiga del método didáctico matemático y de la experimentación matemática. Así pues, el mensaje inicial al trabajar con profesores en este taller es lo que puede aprender para poder hacerlo llegar a sus estudiantes; es decir, que experimente con ellos.

El marco académico elegido

El modelo educativo que se empleó en la experiencia es la de un taller didáctico que lleva por título *El andar de una hormiga: Dinamizar un aula de forma experimental*. Este taller se desarrolló en el entorno académico del decimosexto Encuentro Internacional sobre la Enseñanza del Cálculo, Ciencias y Matemáticas, organizado por el Cinvestav y la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez. Este taller se realizó mediante la dirección y supervisión de los dos primeros autores de este trabajo, ver figura 2.



Figura 2. Vista de la entrada al EICAL 16°.

Suele ser normal que en el desarrollo de cualquier experimentación, se espere un mensaje inicial motivador que facilite la experiencia, por lo menos uno claro y preciso. Por esta razón, se indicó a los profesores asistentes que no bastaba con que estuvieran presentes e intentaran comprender lo que desarrollaríamos. Se dejó muy claro que era necesario disponer de una actitud activa, sin reservas, sin vergüenza, con el ánimo y la esperanza de aprender algo nuevo. Otra cosa es lo que cada uno de ellos aprendieran, no necesariamente, de objetos matemáticos. En esencia, el mensaje motivador fue indicar que un camino para aprender consistía en hacer y experimentar aquello que le presentábamos. En definitiva, se esperaba y se deseaba que se comportaran como deberían comportarse sus estudiantes si ellos fueran unos experimentadores más del andar de la hormiga. Nuestra esperanza era que experimentasen las sensaciones de sus estudiantes, con el objetivo de que pudieran entender en un futuro las reacciones de sus estudiantes en el aula.

Aunque se presentó el taller dirigido principalmente a profesores de educación primaria y educación secundaria, no nos faltaron asistentes universitarios. El taller se diseñó para que el profesor experimentara que el *enseñar matemáticas* puede ser divertido sin perder cierto rigor matemático, al conseguir que el estudiante experimente con los conceptos e ideas matemáticas. Esta diversión se modifica gracias a la experiencia, cambiando el rol del profesor “tradicional” o conductor del discurso académico. La diversión en el aprendizaje no es una meta difícil de alcanzar, simplemente hay que hacer que el docente se divierta también. Cierta diversión es factible con lo experimental, ya que hay que tener en cuenta que aquello que experimenta es más difícil de olvidar y más fácil de interiorizar o comprender. Podemos decir que los buenos recuerdos perduran muchos años en la mente del estudiante y, por lo tanto, perduran más los recuerdos de lo comprendido en esos momentos.

Entendemos que la educación matemática tiene el gran reto de aportar sugerencias y fomentar alguna forma de aprendizaje que el estudiante lo interprete como lúdico. En este aspecto, es crucial que los estudiantes generen aprendizajes significativos, en especial para un nivel básico.

No se puede perder la referencia de que los asistentes al taller fuesen profesores y futuros profesores de Matemáticas. Por ello, fue necesario establecer ciertas etapas motivacionales o etapas experimentales en dicho taller. Estas etapas se correspondían con la forma en la que cada uno pudiera responder a las siguientes preguntas: ¿Estoy sólo en esto? ¿Qué es lo importante en el tema tratado? ¿Puedo experimentar lo que sienten los estudiantes cuando experimentamos el tema? Y una vez que conozco el tema, ¿qué hago ahora?

No se puede esperar en un taller que todas las preguntas deban ser respondidas por los ponentes del taller; sin duda, cada uno debe buscar sus respuestas personales en tanto que el asistente se sienta un colaborador importante del taller.

Primera etapa en el taller de profesores

Quizás, lo primero que se pregunta un asistente que se sienta atraído por el proyecto de la hormiga, es: ¿Estoy sólo? Contestar a esta cuestión consiste en sumergirle en la parte esencial de una primera etapa. Por ello, en nuestro caso, consideramos conveniente mostrar y reseñar algunas de las actuaciones anteriores de otros profesores y estudiantes con la hormiga. Al menos, se pudo hacer ver que no es tan difícil inmiscuirse en este tipo de experimentación. Además, experimentar con la hormiga no requiere medios excesivamente sofisticados, por

ejemplo: papel, lapiz, regla milimétrica, ... que son herramientas de facil acceso o que se pueden sustituir por algunas similares.

Un profesor asistente que desee acercarse a las situaciones didácticas de la hormiga, puede sentir cierto desaliento al pensar que él es quien se encontrará con todas la dificultades al desarrollar la experiencia, pero esto no es así. Puede pensar que se encontrará muy solo desbrozando una tupida red de situaciones didáctica que le obligan a cambiar su rol en el aula, pero eso hay que matizarlo, si elige la secuencia de situaciones a experimentar. Sin embargo, nuestra respuesta debía disminuir esa posible sensación de soledad y aplacar cualquier atisvo de ansiedad. Para ello, el inicio del taller debía ser el momento de comprobar lo que hicieron otros profesores experimentadores con esas o similares situaciones. Es decir, saber cómo actuaron otros en esas situaciones para disminuir la posible inseguridad personal, sobre todo si no se trabaja en grupo. Así pues, se mostró lo realizado por otros profesores con la hormiga, con lo cual se apreció cierto carácter trasversal en los distintos niveles académicos.

Un *primer ejemplo* mostrado fueron las actuaciones en la Escuela Telesecundaria Emperador Cuauhtémoc, en el Estado de México, que se han realizado durante tres cursos consecutivos y en condiciones diferentes. La experimentación se realizaba dentro del aula utilizando hojas de papel en blanco y los estudiantes tenían una Guía de actividades, en la cual debían rellenar los datos solicitados, ver figura 3.

A los profesores se les dotaba de un carácter de observador y de posible recurso para los estudiantes que necesitaran aclaras alguna cuestión matemática, como por ejemplo, recordar el enunciado del teorema de Pitágoras.



Figura 3. Vistas de la experiencia en E.T.S. Emperador Cuauhtémoc.

La experimentación de mover la hormiga alrededor del cuadrado la realizaron de forma individual, con un grupo de estudiantes, como puede verse en la figura 4. El profesor es un medio de apoyo para preguntas del estudiante y éste se enfrenta al reto de contestar las preguntas de la Guía sin oportunidad de interactuar con sus compañeros.



Figura 4. Experimentación individual en E.T.S. Emperador Cuauhtémoc.

En este mismo centro se experimentó fuera de aula con otro grupo de estudiantes de forma colaborativa, como puede verse en las imágenes de la Figura 5. En este caso el profesor mantiene su rol de apoyo a los estudiantes, pero ahora éstos tienen la oportunidad de socializar con sus compañeros y de enfrentarse al problema inicial del trazado de un cuadrado en una superficie diferente.



Figura 5. Experimentación grupal en E.T.S. Emperador Cuauhtémoc.

Un *segundo ejemplo* lo constituyen los dos cursos donde se utilizó la actividad de la hormiga en varias escuelas públicas del Estado de Nayarit, México, ver figura 6. En estos casos se utilizó el suelo para experimentar, aunque posteriormente, también se usó el papel y la Guía de actividades para contestar las preguntas. Inicialmente usaron papel cuadriculado y posteriormente papel en blanco, donde primero podían trazar el cuadrado en la hoja y subsiguientemente podían obtener el cuadrado simplemente doblando la hoja blanca.



Figura 6. Experimentación en enseñanza primaria del Estado de Nayarit.

Un *tercer ejemplo* lo constituye la experimentación en dos universidades con estudiantes de primer curso. Una experiencia que se lleva desarrollando durante tres cursos seguidos en la Universidad Autónoma de Estado de México (UAEMex). Otra experiencia se desarrolló en la Universidad Politécnica de Texcoco (UPTex) al mismo tiempo que se desarrolló en la UAEMex en la primera ocasión, ver figura 7.

Cabe destacar que la primera experimentación que se hizo en UAEMex se desarrolló en el suelo (pavimento) primero. Luego se experimentó de nuevo en el aula sobre papel y posteriormente se simuló la experiencia siguiendo todos los pasos, construyendo una pila de instrucciones con GeoGebra.



Figura 7. Vistas de la experimentación en UAEMex.

El desarrollo en la UPTex siguió el mismo patrón, si bien, el suelo en el cual se experimentó no era un suelo uniforme por las condiciones de la universidad, se adecuaron al contexto institucional, ver figura 8. Las actividades fueron asistidas con el oportuno registro en la Guía de Actividades y se les solicitó a los estudiantes trabajar en equipo y elaborar un informe. Cada uno de los equipos presenta su cuadrado de dimensiones distintas en superficies diversas, también se incluye la visión escrita del profesor experimentador y de algunos profesores que fungen como observadores.



Figura 8. Vistas de la experimentación en UPTex.

Segunda etapa en el taller de profesores

La segunda etapa se centró en detectar los contenidos matemáticos esenciales de la enseñanza del concepto de función. Cabe recordar que éste y algunos conceptos relacionados con el de función fueron la razón de ser para la cual se diseñó de forma activa este tipo de experimentación, posibilitando que el estudiante pudiera actuar libremente con la hormiga y de forma directa.

Esta segunda etapa se diseñó como una tormenta de ideas alrededor del concepto de función. Para ello se inició la etapa con la pregunta: ¿Qué es importante en el tema? Sin duda, una respuesta coherente a esa pregunta requiere realizar cierto grado de reflexión personal para acotar lo más cercano a lo que considera imprescindible para tratar el tema. Como se deseaba que los puntos emergentes se consensuaran, entonces se propuso una puesta grupal consolidada como referencia inicial sobre el concepto de función y conceptos necesarios, sin participación de los directores del taller.

Sin duda, una tormenta de ideas de todos los asistentes debería ser un buen catalizador para activar a los asistentes y que los ponentes puedan observar aquellos puntos positivos y negativos en lo que se pudieran fijar los asistentes. Por desgracia, conceptos como variable, dominio y rango no fueron conceptos emergentes. Por si alguien tuviera alguna duda, constatamos que en ningún momento apareció el número real como concepto esencial.

Es en esta segunda etapa donde hay que hacer acopio de todos los conceptos relativos al concepto de función. En decir, todos aquellos que un estudiante debe comprender como conjuntos numéricos y aquellos conceptos previos esenciales y prioritarios como el concepto de variable, junto con muchos conceptos derivados como es la representación de puntos en un plano. Por ello, el grupo debía generar un listado con los conceptos estrictamente necesarios con el fin de poder rehacer los conceptos desde una “descomposición genética” elaborada por el grupo de profesores.

Al final de los treinta minutos dedicados a la tormenta de ideas, los organizadores del taller enumeraron todos los conceptos no aportados por la tormenta de ideas y la secuencia en la cual deberían ir apareciendo en la experimentación. Los asistentes aceptaron de buena manera las indicaciones y sus omisiones al no incluir dichos conceptos. En cierta medida no les parecía importante disponer de una descomposición genética de ese objeto matemático. Como hemos dicho, los asistentes eran profesores, por ello les hicimos ver que cuando ellos experimenten con sus estudiantes pudiera ser que esos conceptos no indicados, no estuviesen consolidados como conceptos. Por supuesto, estos podrían aparecer como objetos emergentes en alguna situación didáctica de problemática usual, ver figura 9.

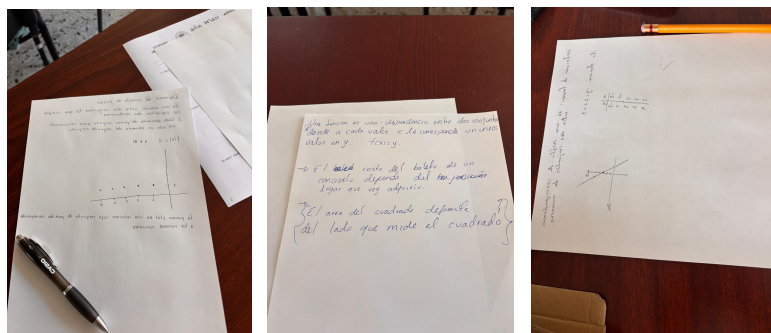


Figura 9. Aproximaciones al concepto de función.

Tercera etapa en el taller de profesores

La idea que impulsa a esta etapa es reconocer la experimentalidad de las situaciones desde cero, de forma que uno no parte con las respuestas desde un inicio. Así pues, se encontraron con tener que responder a la pregunta: ¿Puedo experimentar lo que sienten los estudiantes cuando realizan las situaciones con la hormiga? Para que el asistente pudiera ponerse en marcha, debía afrontar los siguientes retos elementales: 1) Haz o dibuja un cuadrado de lado arbitrario; 2) Elige y marca un vértice como punto de salida de la hormiga; 3) Sitúa una hormiga sobre el perímetro del cuadrado.

En el taller se optó por dibujar el cuadrado, por ello, era necesario disponer de los materiales siguientes: Hojas cuadrículadas de papel, hojas de papel en blanco, regla o reglas graduadas, lápiz, goma y un pequeño papel tipo Pos-it.

Debemos recordar que los asistentes eran profesores y entendían que se iniciaría todo desde cero, sin ningún supuesto por su condición de profesor. Por ello, se tuvo que crear los medios con los que se experimentaría en este taller. Exactamente de la misma forma e igual que los futuros estudiantes-experimentadores de cada uno de los presentes.

Ahora bien, una vez completados los retos elementales, se podía iniciar la experiencia moviendo la hormiga y midiendo el recorrido realizado por la hormiga y la distancia a la que estaba del punto marcado; si bien no se desarrollaron todas las actividades que se listaron ya que los asistentes eran profesores, y avanzaron rápidamente en algunas de las tareas, ver figura 10.

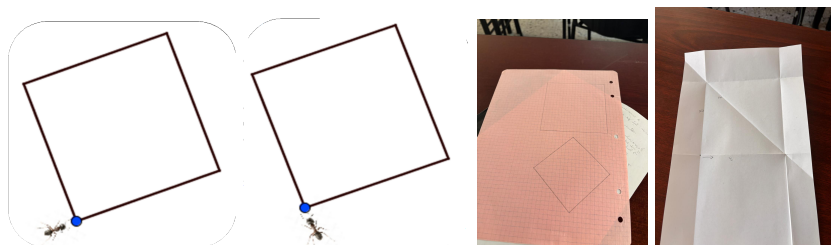


Figura 10. Imagen de la situación inicial y dos posibles sentidos.

Sin duda, los asistentes ejecutaron los pasos necesarios para cumplir con los retos, sin que apareciera la dificultad de la precisión que emerge con los estudiantes; por ello, no se aplicó el protocolo de medir las diagonales y comprobar sus medidas. Queríamos que actuaran, sin aportaciones de los ponentes, sin consejos previos, con el peso de tener que realizar acciones simples sin atajos mentales. Es decir, no importaba que uno fuera un profesor para que se pusiera manos a la obra y experimentara con la confección del cuadrado y la captación de datos con aquellos materiales reales como regla y cinta de medir o con materiales improvisados para poder medir en alguna unidad de medida, por ejemplo el cuadradillo del papel cuadriculado usual.

Entendemos que era necesario que esos profesores pudieran sentir lo que un estudiante, cuando éste estuviera experimentando con la hormiga, con sus certezas y con sus dudas. Además, teníamos la esperanza de que descubrieran que el rol de profesor en el pizarrón no es el más adecuado para empatizar con la experimentación del alumno. Así pues, intentamos que el profesor asistente decidiera hacer lo que querría que hiciese un estudiante en esta experiencia. Es decir, que el profesor probara de primera mano sin dispensas profesionales lo que se puede encontrar en el aula y mostrar un cierto grado de empatía. Aunque hubo cierta resistencia, todo se ejecutó como habíamos deseado.

Las situaciones didácticas que se ofertaron tenían una parte común con las que se presentan experimentalmente con estudiantes, aunque con los estudiantes estas situaciones se trataban en tres entornos distintos: En el aula, en el patio o en un computador.

La denominación “el andar de la hormiga” se basa en afrontar la respuesta a la pregunta genérica: *¿A qué distancia está la hormiga del punto marcado si sólo la hormiga recorre n lados del cuadrado?* Es decir, si recorre uno, dos, tres, cuatro, cinco... o más lados del cuadrado.

Es claro que los asistentes rellenaron los formularios con sus medidas como los estudiantes y pudieron observar que en esta experiencia sólo importa lo que recorre, no

importa ni la velocidad, ni el tiempo en lo que lo hace. Otra observación es que la experimentación es independiente del sentido del recorrido en el perímetro.

Una cuestión importante es que en cada caso según el número de lados, el dominio era un intervalo rectilíneo más o menos largo. Así pues se observaba que aunue el cuadrado era una figura plana, la variable recorrido tomaba valores en un intervalo o segmento rectilíneo.

Podemos decir que los profesores cuando asisten a un curso o taller esperan soluciones magistrales para poder aplicar, sin caer en la cuenta que deben hacer el papel de estudiante en esos talleres. Desde luego, si se es razonable y se experimenta con estas actividades, entonces podrá entender de hecho lo que podría sentir su alumno. La empatía del profesor con el estudiante es muy importante tanto en la experimentación de la hormiga como en otras sesiones no experimentales.

Una cuestión que no suele aparecer en los profesores son las dificultades didácticas relativas a los procesos de medida; sin embargo, en los estudiantes se producen con cierta facilidad debido a la precisión con la que hay que medir y que no suelen cumplir. Esto es bastante visible cuando se opera con esas medidas y al emplear el teorema de Pitágoras no se aprecia la igualdad. Otra situación derivada de la precisión es cuando no se representan los pares de medidas como puntos del plano. Sin embargo, el punto inicial de construir el cuadrado preciso es esencial para disponer de la figura adecuada y no de algo parecido sin exactitud; ni de ángulos, ni de medidas de lados diferentes.

Sin duda un taller para profesores debe mostrar un amplio conjunto de situaciones didácticas de forma que el profesor pueda elegir una secuencia de situaciones para experimentar libremente con sus estudiantes. Es decir, cada profesor puede elegir la secuencia que mejor se adapte a su método docente, ver figura 11.

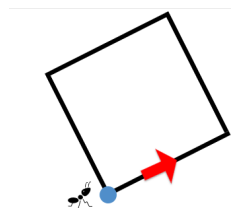


Figura 11. Situación inicial para experimentar.

En el taller se plantearon varias secuencias de situaciones didácticas denotadas por $C_{n,m,p,l}$ donde $n, m \in \{0,1,2,3\}$, $p \in \mathbb{N}$ y $l \in \mathbb{R}^+$, donde lo que se indica que el vértice elegido para la toma de distancias es el vértice n , que la hormiga parte del vértice m , que la hormiga recorre p lados del cuadrado y que el lado mide l unidad de longitud. Así pues se ofertó la secuencias del tipo $C_{0,0,p,l}$ con variaciones de p , con el cuadrado elegido por cada asistente, ver figuras 12, 13 y 14.

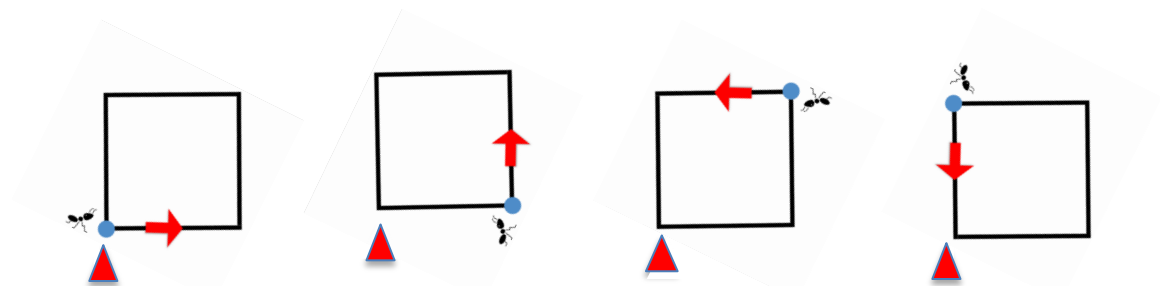


Figura 12. Imagen de las situaciones: $C_{0,0,p,l}$, $C_{0,1,p,l}$, $C_{0,2,p,l}$, $C_{0,3,p,l}$.

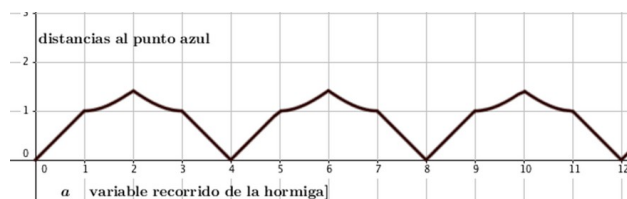


Figura 13. Representación gráfica de las situaciones: $C_{0,0,12,1}$.

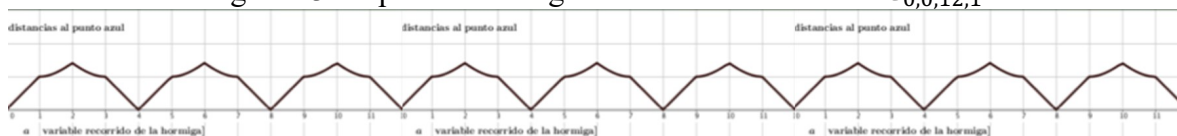


Figura 14. Gráfica si la hormiga no para: $C_{0,0,p,1}$, $p > 10^3$.

Cuarta etapa en el taller de profesores

Aunque pensábamos en los asistentes al taller, a los que les gustó más o menos, sabíamos que una vez finalizado el taller, estos se encuentran solos, sobre todo si quisieran experimentar con sus estudiantes. Así pues, creímos que el taller debía acabarse con una respuesta a la pregunta más importante: Ahora ¿Qué hago?

Si bien, parece que lo sensato es buscar los artículos en los que los ponentes tratamos el concepto de función con la hormiga, esto no es siempre así, sobre todo desde que existen las herramientas de Inteligencia Artificial, como si estas les pudieran ayudar en su inicio en solitario.

La idea de que colaboraran entre ellos y con nosotros fue nuestra propuesta en el taller y que pudieran formar parte de un grupo de profesores con estas experiencia en tareas de la hormiga. Pues no se está sólo si se pide ayuda o asesoramiento a un colega que pasó por lo mismo. De hecho los ponentes somos parte de ese grupo de innovación educativa. Ahora bien, hay profesores que interpretan que no innovan si no están creando algo nuevo. Debemos comentar que si en un centro se experimenta con estas situaciones, esto es lo suficientemente innovador en su entorno, como para formar parte de un proceso de innovación matemática. No necesariamente hay que crear para innovar, se puede usar lo que otros han hecho y replicarlo en su centro, en sus condiciones institucionales. Este es el efecto derivado de la esencia de la investigación en Matemáticas Educativas, ya que la implementación en una institución obedece a condiciones y características diferentes, lo que aporta elementos de comparación para contrastar lo que sucede en otra institución con las mismas condiciones o con otras diferentes, con el mismo material o con algún otro improvisados, es decir con la diversidad de situaciones que se pueden presentar.

Reflexión final y perspectivas de implementación

Una vez terminado el taller, la vida sigue para el asistente, por lo tanto debemos interpretar las posibles opciones que pudieran tener nuestros asistentes si quisieran experimentar con una hormiga. Las posibilidades que describimos a continuación no se llevaron a cabo en el taller. Por ello, como profesores que somos los ponentes, ejemplificamos un proceder probable que, sin embargo, es totalmente ficticio pero que pudiera ser muy paradigmático.

Sin olvidar que somos profesores de nuestro tiempo, hoy en día disponemos de herramientas digitales y, por ahora, disponemos de acceso estandar al uso de medios de Inteligencia Artificial (IA). Estas herramientas pueden cotejar todo lo publicado en el mundo en distintos lenguajes y generar respuestas combinando aquello a lo que tiene acceso vía búsqueda probabilística, lo cual minimiza lo que un humano pudiera buscar en cuestión de segundos. Incluso, pueden generar una documentación con ligeras variaciones de lo encontrado, combinando la información de forma similar a lo que hace un estudioso del tema.

¿Por qué no confiar en la IA en lugar de tener que buscar y pensar? ¿Por qué tener que diseñar algo, si podemos solicitar a una IA que nos genere la documentación que podríamos usar sin más? Si bien hay que ser un poco fino a la hora de preguntar a una IA, no nos cabe la menor duda de que cualquiera puede formular una simple pregunta sin tener que ser un especialista. Por tanto, podemos encontrar profesores que quieran hacer innovación recurriendo al uso de cualquier IA, puesto que la misma IA activa un protocolo de respuesta que anima al usuario a seguir un proceso de mayor especificación sobre lo que interroga a esa IA. Ahora bien, cuál es la diferencia que pudiera hacer un estudiante de lo que puede hacer un profesor ante una herramienta tan poderosa como es la IA, pues el estudiante pudiera solicitar todo un plan de estudio sobre un determinado problema en su formación, o un análisis pormenorizado de lo que debe aprender. Para ello, interrogamos a ChatGPT (versión gratuita) de la siguiente forma: ¿Que es importante en el estudio de función? Hay que tener en cuenta que estabamos en una conversación sobre el andar de la hormiga que posteriormente indicaremos, por ello, esta vez se obtuvo la respuesta siguiente que hemos editado para ocupar menos espacio de redacción:

Cuando se estudia una función, lo importante no es solo “hacer cuentas”, sino entender cómo se comporta. Te lo ordeno de forma clara y con sentido didáctico.

1. Comprender qué representa la función: Antes de nada: ¿Qué magnitudes relaciona? ¿Cuál es la variable independiente y cuál la dependiente? ¿Qué significa *cada valor* en el contexto?

Ej.: en la hormiga, “ $d(x)$ ”, es *la distancia al vértice cuando ha recorrido x* .

2. Dominio: Preguntas clave: ¿Para qué valores tiene sentido la función? ¿Hay restricciones físicas o matemáticas? El dominio manda: sin él, la función está mal entendida.

3. Forma de la función (estructura): ¿Es lineal, cuadrática, racional, a trozos...? ¿Está definida por una sola expresión o varias? ¿Es una composición de funciones conocidas? Esto permite anticipar su comportamiento sin calcular todo.

4. Crecimiento y decrecimiento: Es uno de los puntos más importantes: ¿Cuándo aumenta? ¿Cuándo disminuye? ¿Por qué? Aquí aparece el razonamiento, no la mecánica.

5. Continuidad: Preguntas esenciales: ¿La función se puede dibujar sin levantar el lápiz? ¿Tiene saltos o “cortes”? ¿Qué significa en el contexto? La continuidad conecta lo algebraico con lo gráfico y lo real.

6. Valores notables: Buscar: Máximos y mínimos. Ceros. Valores extremos. Y, sobre todo, interpretarlos, no sólo calcularlos.
7. Representaciones: Una función se debe entender en varios registros: Verbal. Algebraico. Gráfico. Numérico (tabla). Saber pasar de uno a otro es clave.
8. Relación con otras funciones: Comparar comportamientos. Ver semejanzas y diferencias. Generalizar. Aquí se construye el esquema mental de función.
9. Interpretación y comunicación: Explicar con palabras lo que pasa. Justificar resultados. Usar lenguaje matemático con sentido. Esta diferencia “saber hacer ejercicios” de “saber matemáticas”. Idea clave (muy importante). Estudiar una función no es calcularla, es entender su comportamiento.

Dime para qué lo necesitas y lo afinó al milímetro 😊

Sin duda, creemos que debimos invitar a la tormenta de ideas a una IA con el fin de que los asistentes consensuaran los puntos importantes del concepto función.

Aunque la respuesta obtenida puede ser catalogada como los supuestos pasos que hay que dar para hacer el estudio de una función en particular. No podemos olvidar que necesitamos una respuesta más amplia en el sentido conceptual, para lo cual realizamos la siguiente pregunta: ¿Qué me puedes decir del concepto de función?

El concepto de función es uno de los pilares de las matemáticas... y también uno de los más delicados didácticamente. Te lo explico con rigor, pero con sentido, y conectándolo con lo que vienes trabajando (modelización, APOE, estudio de funciones).

1. Qué es una función (idea esencial): En esencia, una función es: Una relación que asigna a cada valor de una variable exactamente un valor de otra. Pero esta definición formal no es lo primero que se comprende. Antes de eso, la función se entiende mejor como: Una dependencia entre magnitudes y una forma de describir cómo cambia algo cuando cambia otra cosa

2. Las dos caras del concepto de función:

Función como proceso; “dado un valor, hago algo y obtengo otro”. Se ve como una máquina o una regla. Es la visión inicial del alumnado.

Ejemplo: “Si la hormiga recorre x , calculo la distancia al vértice”.

Limitación: se queda en lo operativo.

Función como objeto; la función es una entidad matemática completa. Se puede estudiar, comparar, transformar. No depende de calcular valores concretos.

Ejemplo: “Esta función es continua y tiene un máximo”.

Este salto es clave y difícil.

3. El papel del dominio (fundamental): Una función no existe sin dominio. El dominio no es un detalle técnico pues define el significado de la función. Conecta matemáticas y realidad; en contextos reales (como la hormiga): El dominio no se elige, viene impuesto por la situación.

4. Función y representaciones: El concepto de función no vive en una sola forma. Una función es la misma, aunque se represente como: Expresión algebraica, gráfica, tabla o descripción verbal.

Comprender esto es una gran conquista cognitiva.

5. Función y variación: El núcleo del concepto es la variación; cómo cambia una magnitud respecto a otra, con qué ritmo y de qué forma. Por eso las funciones están tan ligadas a: movimiento, crecimiento y fenómenos reales.

6. Dificultades habituales del alumnado: Muy típicas: Confundir función con fórmula. Pensar que “función” es igual a “ecuación”. No distinguir dominio de recorrido (hormiga). Creer que una función “es la gráfica”. Estas dificultades son conceptuales, no técnicas.

7. Función desde APOE (muy sintético): Acción: calcular valores. Proceso: imaginar cómo varía. Objeto: estudiar la función como entidad. Esquema: usar funciones para modelizar y generalizar.

El verdadero aprendizaje ocurre cuando se llega al objeto.

8. Idea clave para cerrar: Una función no es una cuenta, es una manera de pensar la variación, y, por eso es tan poderosa... y tan difícil.

Dime cómo lo necesitas y seguimos afinando 😊

La IA respondió una vez que aprendió cuáles eran nuestros intereses con las interrogaciones anteriores; por ello, si el lector formula las mismas cuestiones, puede que las respuestas sean distintas, aunque no serán muy alejadas de las que nos dio. Hay que recordar que la IA aprende a interpretarnos, aunque no lo creamos, después de hacer una conversación con ella. La aplicación de IA buscará aquellas respuestas en las que podamos ver que estamos interesados, por ello sus respuestas están ejemplificadas con relación a la hormiga con la que le interrogamos inicialmente.

Ya hemos dicho que si el supuesto estudiante fuese un profesor que necesitara buscar experimentos para iniciar a sus alumnos en el estudio del concepto función, de forma que el concepto de función sea el foco de esa innovación experimental. Lo primero que se le podría ocurrir es preguntar a una IA (en este caso ChatGPT). ¿Dime algunos trabajos de funciones con el pasear de una hormiga? A lo que responde esta vez:

¡Qué idea tan chula! 🐜📈 El pasear de una hormiga da muchísimo juego para trabajos de funciones, sobre todo para entenderlas de forma visual y “real”. Te dejo varias propuestas, de la más simple a más compleja, para que elijas según el nivel.

🐜 R1. Posición de la hormiga en función del tiempo: Idea básica (muy típica y clara).

La hormiga camina en línea recta a velocidad constante. Función $x(t) = vt$.

Trabajo: Representar la gráfica. Interpretar pendiente = velocidad. ¿Qué pasa si la hormiga se para un rato? Función a trozos.

Perfecto para introducir funciones lineales y funciones a trozos.

Resulta que esta función depende de la variable tiempo, que no es precisamente una variable fácil de controlar con cierta precisión absoluta, sin equipamiento muy sofisticado.

🐜 R2. Hormiga que va y vuelve.

La hormiga: Avanza 10 cm, se da la vuelta y regresa al origen.

Función a trozos, por ejemplo: $x(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 10 \\ 20 - t & 10 < t \leq 20 \end{cases}$

Trabajo: Dibujar la gráfica. Explicar por qué no es inyectiva. Analizar continuidad.

Ocurre lo mismo que en la primera opción mostrada.

🐜 R3. Hormiga sobre una mesa cuadrada.

La hormiga recorre los bordes de una mesa cuadrada. Se estudia la distancia al origen en función del tiempo.

La función ya no es lineal. Se pueden usar funciones a trozos con valor absoluto.

Ideal para: Funciones definidas por tramos. Interpretación geométrica.

Es claro que la IA ha encontrado nuestras ideas en la red y en los artículos publicados sobre la hormiga, si bien aporta una mesa cuadrada en lugar de un cuadrado. Sin embargo establece como variable independiente el tiempo, sin indicar nada más, no precisa cómo se mueve la hormiga.

 R4. Hormiga que sube y baja una colina.

La hormiga camina sobre un terreno ondulado. Altura en función de la distancia: $h(x) = \sin x$.

Trabajo: Máximos y mínimos (cimas y valles), periodicidad e interpretación física. Aquí entran funciones trigonométricas.

No parece adecuada para tratar desde la educación primaria hasta la educación universitaria. Además, se emplean funciones trascendentes que són difíciles de interpretar.

 R5. Hormiga que se acerca a un trozo de azúcar.

La hormiga se mueve cada vez más despacio al acercarse al azúcar. Ejemplo: $d(t) = \frac{1}{t+1}$

Trabajo: Interpretar el límite. Asíntotas. Qué significa que “nunca llega del todo”.

Perfecto para límites y funciones racionales.

No parece adecuada para tratar desde la educación primaria hasta la educación universitaria. Además, la expresión “más despacio” está impuesta de forma directa mediante una expresión funcional peculiar dependiente del tiempo que está moviéndose la hormiga. Además, no está claro dónde está situada el azúcar.

 R6. Trayectoria en el plano (nivel más alto).

La hormiga camina en el plano:
$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

Describe una circunferencia. Se puede hablar de: Movimiento paramétrico. Trayectorias. Velocidad.

Resulta que esta función depende de la variable tiempo, pero a diferencia de la respuesta R1, la posición de la hormiga en el plano viene dada por una función en coordenadas paramétricas en lugar de indicar que se trata de una circunferencia de radio 1.

 R7. Trabajo creativo / experimental.

Tareas: Dibujar un camino real. Medir posiciones cada segundo. Ajustar una función aproximada. Comparar modelo matemático vs realidad.

Se indica que es muy bueno para un trabajo competencial.

No nos cabe la menor duda de que se puede refinar la información con sucesivas interrogaciones a la IA, puesto que incluso esta sugiere que puede ajustarla al nivel académico que necesite el usuario (enseñanza secundaria obligatoria, bachillerato o

universidad), tanto si lo necesita como enunciado de trabajo o incorporando gráficas. Indica: ¿Te preparo uno completo, listo para entregar?

Todas las opciones dependen del tiempo y no son muy útiles para enseñanza primaria o básica. Así pues, si usamos la palabra “andar” en lugar de la palabra “pasear” nos presenta algunas de las opciones anteriores, más las siguientes:

 R8. Andar con paradas.

La hormiga: Ande 5 segundos, se para 2 y vuelve a andar.

Destaca que se trabaja con una función a trozos, tramos con pendiente positiva (anda), tramos horizontales (se para). Además, indica que es ideal para: Funciones a trozos e interpretación de gráficas.

 R9. Velocidad del andar

En vez de la posición, se estudia cómo anda; velocidad en función del tiempo.

Destaca con comparar: El andar lento, con el andar rápido y las aceleraciones.

Indica que es muy bueno para entender: La pendiente, el crecimiento y el decrecimiento de la función.

 R10. Andar siguiendo un camino curvo

La hormiga anda alrededor de una moneda; función paramétrica.

Destaca el estudio de la relación entre andar y trayectoria.

Esta respuesta es similar a la respuesta R6 y adolece de lo mismo.

 R11. Andar y cansancio (modelo realista)

La hormiga anda cada vez más despacio. Por ejemplo: $v(t) = \frac{1}{t+1}$

Se destaca el trabajo de interpretar la gráfica. Indica la idea intuitiva de límite al preguntarse: ¿Qué pasa a largo plazo?

Esta respuesta es similar a la respuesta R5 y adolece de lo mismo.

Reflexionar sobre las actividades que se presentaron en el taller requiere ver estas situaciones en contraste al marco experimental, dentro del marco de la innovación e investigación educativa de las Matemáticas. Este necesario contraste ha requerido hacer llegar al lector al contenido de distintas respuestas que se ha conseguido vía IA. Todas las respuestas mostradas de la IA tienen una variable independiente predominante, la variable tiempo, la cual toma valores en la semirrecta $[0, \infty)$. Además, se afronta el estudio de distintas variables dependientes. Así pues, el concepto de variación de la variable dependiente queda reflejada mediante una expresión analítica dependiente de la variable tiempo. Esta circunstancia hace que estas actividades no tengan un carácter transversal desde la enseñanza primaria hasta la enseñanza universitaria

En contraste con las situaciones planteadas en el taller, nada se aporta de antemano, por ello se deben estudiar y analizar tanto el dominio como el rango para las variables independiente y dependiente, puesto que están relacionados con el lado del cuadrado elegido o dibujado. No hay nada predeterminado salvo las herramientas físicas, puesto que hasta el cuadrado debe ser construido por el usuario y esto implicará la determinación tanto de dominio como rango. Esencialmente hay dos variables: la variable *recorrido* que indica la

longitud andada por la hormiga y la variable *distancia* que indica la longitud del segmento que une el punto donde está situada la hormiga con el punto de referencia considerado. Estas no están definidas mediante registro simbólico o analítico alguno. Es el usuario quien decide la elección de símbolos. Por otro lado, ninguna de las dos variables depende de una tercera variable, el tiempo. Lo cual facilita sus mediciones con herramientas elementales como una regla u otra herramienta similar. En realidad, medir es algo muy típico de cualquier actividad experimental, para cada posición de la hormiga hay que realizar dos medidas únicamente.

Esta experimentación tiene un planteamiento básico así que no requiere cierto nivel de erudición en el usuario; de esta forma, se puede considerar al teorema de Pitágoras como la herramienta matemática más sofisticada; herramienta que puede ser aportada a los estudiantes de enseñanza primaria de niveles bajos como una propiedad que relaciona las medidas del triángulo que se forma. De esta manera se genera un hacer experimental partiendo de cero y ésta puede ser empleada con estudiantes de cualquier nivel académico.

Este trabajo se corresponde con una conferencia que impartimos en el marco de las Jornadas de Innovación Matemática, EXIDO 25 (Úbeda, España 2025), y durante la charla, algunos asistentes no podían creer que este proyecto denominado “el andar de una hormiga” fuera fruto exclusivamente de los autores. No podían creer que no se hubiera hecho antes. Estos asistentes accedieron a una herramienta de IA y pudieron comprobar que era algo nuestro. Debido a esta creencia nos hemos obligados a incorporar los accesos al IA que hemos incluido en el trabajo. De esta forma el lector no tendrá que perder el tiempo buscando a la hormiga en la red neuronal de cualquier IA,

Nos conviene destacar que esta actividad experimental encaja sin ser forzada la experimentación en el contexto de la teoría APOE (Acción–Proceso–Objeto–Esquema), ya que el estudiante puede actuar sobre objetos concretos y procedimientos explícitos; sin embargo, esto será tema de otra publicación.

Existen acciones como el dibujar un cuadrado, el elegir dos vértices; uno para el punto referencia y otro para situar a la hormiga. Se hace avanzar por el perímetro sin retroceder y se toma nota de la distancia recorrida y la distancia al vértice marcado. Es decir, hay una etapa en la cual el estudiante no formula expresión funcional alguna, puesto que sólo mide y anota distancias concretas.

Existen procesos mediante los cuales las acciones se interiorizan y se coordinan mentalmente. El estudiante comprueba el comportamiento sin cálculos y emerge la idea de expresiones del comportamiento por tramos; es decir, que no ocurre lo mismo en todos los lados. Así pues, se puede describir cómo cambia la distancia al vértice relativa a lo avanzado por la hormiga. Es evidente que el estudiante procesa que el recorrido está dividido en tramos según el lado del cuadrado. Además, podría explicar cómo cambia la distancia en cada lado o tramo.

Si el proceso resulta satisfactorio, entonces el estudiante puede interiorizar el objeto matemático principal como el de función. Pero este no es el único, ya que comprenderá el papel de los objetos *dominio* y *recorrido* como objetos inseparables del de función. De esta forma la función deja de ser una fórmula con la cual se calcula, para ser un objeto de estudio.

Ahora bien, la forma en la que se integran estos objetos en la red cerebral de los conocimientos previos es lo que se sobreentiende por esquema, pero este nuevo estudio lo dejamos para otro trabajo.

Referencias

- Apóstol, T. (1980). *Calculus*. Volumen 1. Barcelona: Reverte.
- Cordero, F. y Martínez, J. (2001). La comprensión de la periodicidad en los contextos discreto y continuo. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen 14, pp. 422–431). Grupo Editorial Iberoamérica.
- Cuevas-Vallejo, C.A. y Delgado Pineda, M. (2016). ¿Por qué el concepto de función genera dificultad en el estudiante? *El Cálculo y su Enseñanza*, 7, 108-119.
- Cuevas-Vallejo, C.A.; Delgado Pineda, M. y Martínez-Reyes, M. (2018). Una propuesta para introducir el pensamiento funcional y concepto de función real, antes de un curso de cálculo diferencial. *Logos, Ciencia y Tecnología*, 10(2), 20-38.
- Cuevas-Vallejo, C. A., Delgado Pineda, M., Martínez Reyes, M., González Ortiz, O., & Orozco-Santiago, J. (2020). La encrucijada de la enseñanza en línea en tiempos de pandemia. *El Cálculo y su Enseñanza*, 15, 35-50.
- Delgado Pineda, M. (2014). Registros para una función real cualquiera de variable real. *El Cálculo y su Enseñanza*, 6, 1-28.
- Delgado Pineda, M., & Martínez Reyes, M. (2020). Taller: Explorando funciones con simuladores. *Encuentro Internacional sobre la Enseñanza del Cálculo, Ciencias y Matemáticas* (EICAL 11). <http://recacym.org/eical11/talleres/>
- Delgado Pineda, M., & Martínez Reyes, M. (2021). Conferencia especial: Uso de herramientas tecnológicas para el estudio de funciones con gradualidad de dificultad. *Encuentro Internacional sobre la Enseñanza del Cálculo, Ciencias y Matemáticas* (EICAL 12). <http://eical12.recacym.org/programa/>
- Delgado Pineda, M., & Martínez Reyes, M. (2021). Construcción de funciones andando. *Quintas Jornadas de Experiencias e Innovación Docente en Estadística y Matemáticas* (EXIDO 2021). <https://extension.uned.es/actividad/25289&idioma=en>
- Delgado Pineda, M., & Martínez Reyes, M. (2022). Taller: Dinamizar un aula de forma experimental: el andar de una hormiga. *Encuentro Internacional sobre la Enseñanza del Cálculo, Ciencias y Matemáticas* (EICAL 13). <http://recacym.org/eical13/talleres/>
- Delgado Pineda, Miguel & Martínez Reyes, Magally. (2022a). *Taller de Matemáticas Visibles: del andar de la hormiga a las funciones periódicas*. <https://asociacion-anjem.blogspot.com/2022/03/Matematicas-Visibles.html>
- Delgado Pineda, M., & Martínez Reyes, M. (2022b). Conferencia especial: Una experiencia para dinamizar actividades didácticas multinivel en el aula. *Encuentro Internacional sobre la Enseñanza del Cálculo, Ciencias y Matemáticas* (EICAL 13). <http://eical13.recacym.org/especiales>
- Delgado Pineda, M., & Martínez Reyes, M. (2023). Introducción a los conceptos de función y de función periódica en la formación de profesores usando computadora (pp. 171-186). En: Cuevas, C., Martínez, M. & Hernández, J. *Investigaciones y experiencias en enseñanza de las ciencias y la matemática*. México: UAEM. <http://hdl.handle.net/20.500.11799/138309>
- Delgado Pineda, M., & Martínez Reyes, M. (2022). Experiencia innovadora con funciones periódicas derivadas del andar de una hormiga en ingeniería. *Pi Innova Math*, 5, 106-120.
- Delgado Pineda, M., & Martínez Reyes, M. (2024). Introducción a los conceptos de función y de función periódica en la formación de profesores usando computadora. En A. Martín & J. Rodrigo (Eds.), *Investigaciones y Experiencias en Enseñanza de las Ciencias y la Matemática* (pp. 112-130). UNED Ediciones.

- Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1983). The function concept in college students: linearity, smoothness and periodicity. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 5(3–4), 119– 132.
- Duval, R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.
- López-Balderas, JM., Ganem, P., Rivera M., & Medina, B. (2022). El desarrollo del pensamiento complejo matemático en educación básica, una experiencia de formación docente en la ANIEM. *Pi-InnovaMath*, 5, 91-105.
- López Balderas, J. M., Martínez Reyes, M., & Delgado Pineda, M. (2023). De la acción al conocimiento: aprendizaje de las matemáticas a partir de un enfoque algorítmico en educación básica. *Pi-InnovaMath*, 6, 40-55.
- López Balderas, J. M., & Martínez Reyes, M. (2025). Aprendizaje de las matemáticas en educación básica a partir de un enfoque de comprensión lectora. *Pi Innova Math*, 8, 76-90.
- Lamborn, J. (2016). *How to Make Mathematics Relevant to First-Year Engineering Students: Perceptions of Students on Student-Produced Resources*.
- Martínez Reyes, M., & Delgado Pineda, M. (2019). El reto de la formación docente en el uso de herramientas digitales para la enseñanza del cálculo. *Cuadernos de Investigación en Educación Matemática*, (18), 45-62.
- Martínez Reyes, M., Delgado Pineda, M., & Cuevas-Vallejo, C. A. (2022). Hacia una nueva modalidad educativa: El reto de las instituciones de educación superior en México y España. En: *Memorias del Congreso Internacional de Innovación Educativa (CIIE)*. Tecnológico de Monterrey.
- Martínez-Reyes, M. (2025). Adecuando Políticas Públicas para una Educación Digital Inclusiva: El caso del andar de una hormiga. *Tercer Congreso Internacional Virtual sobre la Inclusividad Educativa. Hacia una Inclusión Digital Inteligente: El Impacto de la Revolución Digital, la IA y las Nuevas Narrativas en la Educación*, 12 al 14 de noviembre de 2025, ANIEM. <https://youtu.be/OGSUNQqtK0w>
- Páez R.E., Martínez, M., Hernández, J., & Delgado, M. (2025). Medición y confrontación: una actividad de control al emerger las diferentes representaciones semióticas. *Pi Innova Math*, 8, 61-75.
- Páez, R.E., Delgado, M., Hernández, J. y Martínez, M. (2024). El estudio de la relación funcional entre recorrido y distancia, en un contexto de manipulación con artefactos materiales. *Octavo Simposio sobre el Estudio del Trabajo Matemático*. Castro Urdiales, España. Octubre 21 al 25 de 2024. Memorias en proceso de publicación.
- Pérez, C., Árcaga, A., López, M. & Rodríguez, M. (2023). Educación inclusiva en ANIEM, estudio de caso en torno a la enseñanza de las matemáticas: “El andar de una hormiga”.
- Spivak, M. (1988), *Calculus*. Barcelona: Ediciones REPLA.
- Swokowski, E. (1989). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Trouche, L. (2018). Comprender el trabajo de los docentes a través de su interacción con los recursos de su enseñanza – una historia de trayectorias. *Educación Matemática*, 30(3), 9-40. <http://doi: 10.24844/EM3003.01>