

# Medición y confrontación: una actividad de control al emerger las diferentes representaciones semióticas

Rosa-Elvira Páez<sup>1</sup>, Magally Martínez<sup>2</sup>, Judith Hernández<sup>3</sup>, Miguel Delgado Pineda<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Universidad Autónoma de la Ciudad de México, <sup>2</sup>Universidad Autónoma del Estado de México, <sup>3</sup>Universidad Autónoma de Zacatecas, <sup>4</sup>Universidad Nacional de Educación a Distancia.

Presentado en  $e^{xi} \partial o$  24 

México, España

[rosa.paez@uacm.edu.mx](mailto:rosa.paez@uacm.edu.mx), [mmreyes@hotmail.com](mailto:mmreyes@hotmail.com), [judith700@hotmail.com](mailto:judith700@hotmail.com),  
[miguel@mat.uned.es](mailto:miguel@mat.uned.es)

**Resumen:** Se presenta un experimento educativo en el que se coloca a prueba el diseño de un conjunto de actividades didácticas bajo la estructura de exploración guiada, la cual permite que el estudiante adopte mayor responsabilidad en el momento de desarrollarlas. Se promueve el uso de artefactos materiales (hoja de papel y regla graduada) para el trabajo matemático de estudiantes de primer año de universidad. Se estudia la noción de variación de variables, relación de dependencia entre variables, las distintas representaciones semióticas de esas relación y concreción de una posible relación funcional, mediante una actividad lúdica relacionada con el recorrido de una hormiga a través del perímetro de un cuadrado. Los resultados indican que la integración de artefactos materiales y el promover un trabajo en diferentes representaciones semióticas del objeto matemático, permite que los estudiantes ejerzan una inspección de éste y un avance en sus nociones sobre los conceptos en cuestión. Además, este tipo de actividad lúdica facilita el acercamiento a los conceptos matemáticos en estudiantes universitarios, con lo cual se permite acceder a la posible generación de hipótesis y a su verificación favorecida por la integración de tecnología.

**Palabras claves:** Actividad didáctica, Artefacto, Variación, Variables, Relación funcional.

**Abstract.** An educational experiment is presented in which the design of a set of didactic activities is tested under the structure of guided exploration, which allows the student to adopt greater responsibility at the moment of developing them. The use of material artifacts (sheet of paper and graduated ruler) is promoted for the mathematical work of first year university students. The notion of variation of variables, dependence relationship between variables, the different semiotic representations of these relationships and the concretion of a possible functional relationship are studied through a ludic activity related to the trajectory of an ant through the perimeter of a square. The results indicate that the integration of material artifacts and the promotion of a work on different semiotic representations of the mathematical object, allows students to exercise an inspection of it and an advance in their notions about the concepts in question. In addition, this type of ludic activity facilitates the approach to mathematical concepts in university students, thus allowing access to the possible generation of hypotheses and their verification favored by the integration of technology.

**Keywords:** Teaching activity, Artifact, Variation, Variables, Functional relation.

## **1. Introducción**

Los resultados mostrados en este artículo corresponden a la fase experimental educativa durante el semestre I-24, de una parte del Proyecto de Enseñanza del Cálculo iniciado en el año 2006 (Páez et al 2008) y continúa hoy en la Universidad Autónoma de la Ciudad de México. La línea directora se corresponde con obtener una visualización del estudio de la enseñanza y aprendizaje del Cálculo Diferencial de funciones reales en una variable real. Las acciones de la experimentación se aplican con estudiantes de Ingeniería de esta universidad. Podemos considerar que el punto de partida de tal experiencia se corresponde con un primer interés didáctico para nosotros los docentes: Estudiar los obstáculos epistemológicos y didácticos relacionados con los conceptos matemáticos que se contemplan en el plan de estudios del curso de Cálculo Diferencial de la universidad ya mencionada.

Una vez que el proyecto se estaba desarrollando nos fijamos en otro campo de exploración relativo a las dificultades de aprendizaje. Un interés docente que surgió fue el intentar que los estudiantes superen los obstáculos cognitivos, por lo que fue esencial en esta etapa avanzada del proyecto, el diseño y rediseño de las distintas actividades didácticas que se desarrollaban y se aplicarían. Por una parte, el conjunto de esas actividades se diseñó de forma compatible con los lineamientos de la Teoría de Registros de Representación Semiótica (Duval, 1999) y con los de la Teoría de Espacios de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2023). Por otra parte, las actividades didácticas son desarrolladas y experimentadas en ambientes de enseñanza como ACODESA (Páez, 2022; Hitt 2003), utilizando, además, las directrices de un debate científico (Legrand et al., 2011).

En esencia, se diseñaron en un principio un conjunto de cuatro actividades tales que mantenían cierta estructura de exploración guiada (ver Carrión, et al. 2016). Adaptando a dicha estructura el uso de artefactos materiales o herramientas de trabajo, por ejemplo: Hojas en blanco y reglas graduadas. El germe activador de estas actividades responde a una situación didáctica idealizada en la imagen de una hormiga que recorre el perímetro de un cuadrado, germe descrito en las situaciones didácticas presentes en Delgado y Martínez (2023).

*Una hormiga sale de su hormiguero, el cual está en un vértice del perímetro de un cuadrado de longitud unidad. Si, únicamente, anda o se para en este perímetro sin poder retroceder, entonces a qué distancia está del hormiguero.*

El cuerpo de conocimientos y experiencias matemáticas que atañen a estas actividades didácticas se corresponde al campo de conocimiento relacionado con la noción variable, con la de variación de una variable (dominio de la variable), con las de variación de una variable respecto a la variación de otra (relación funcional entre dos variables y sus formas de expresar dicha variación). Además de otras cuestiones básicas referentes dentro de un curso de Cálculo Diferencial en la formación de los estudiantes de ingeniería.

Se puede decir que la razón didáctica esencial de esta investigación se corresponde con estudiar y analizar cómo se favorece el aprendizaje de los estudiantes con unas actividades didácticas donde la manipulación de objetos tangibles (Maschietto y Soury-Lavergne, 2017) y la captación de medidas experimentales en relación al recorrido de una hormiga por un cuadrado. Una razón didáctica derivada de la anterior es el diseñar y probar las decisiones tomadas para ese favorecer a un pequeño grupo de estudiantes universitarios que cursan directamente una asignatura de Cálculo Diferencial.

## **2. Marco teórico y metodológico**

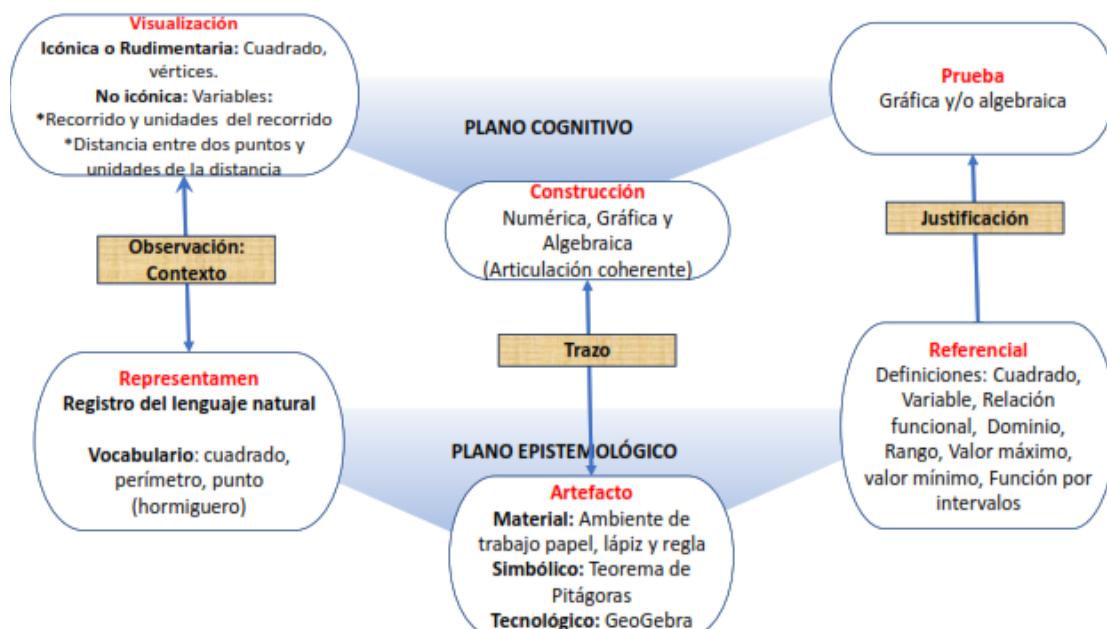
En este trabajo se ha utilizado la Teoría de Espacios de Trabajo Matemático, ETM, (véase Kuzniak, 2023) desde el punto de vista metodológico y teórico, remarcando aquello que se considera inmerso en el Plano Cognitivo, y lo que corresponde, propiamente, al Plano Epistemológico. Es decir, metodológicamente, situamos dentro del tipo de diagrama de los ETM a modo especificado en Kuzniak (2019); una visualización y síntesis del trabajo matemático que tiene que hacer el estudiante para comprender y desarrollar la situación didáctica planteada: “*Una hormiga sale de su hormiguero, el cual está en un punto sobre el perímetro de un cuadrado. Si anda, lo hace solo por este perímetro sin retroceder*”. A partir de esta situación se hace el análisis de lo que incluye cada una de las tres columnas que conectan el plano epistemológico, donde se encuentran las bases, con el plano cognitivo donde se encuentran los capiteles. De esta forma, se da la sensación del prisma usualmente utilizado en un diagrama tipo ETM. Los fustes de las columnas introducidos en Carrión, et al 2016, son Observación: contexto, Trazo, y Justificación.

Destacamos que la columna formada por Representación (base), Observación (fuste) y Visualización (capitel) marca, en cierta medida, los distintos tipos de representación necesarios para generar una imagen icónica con el fin de generar la visualización en el estudiante.

Análogamente la columna formada por Artefacto (base), Trazo (fuste) y Construcción (capitel) marca, nuevamente en cierta medida, el carácter experimental de la asignatura matemática donde el estudiante no recibe la información de forma textual, si no que la debe generar con los medios o artefactos que dispone. Articular esos datos es lo que puede llegar al nivel cognitivo mediante la construcción de conceptos abstractos como la de expresión algebraica.

Con la columna formada por Referencial (base), Justificación (fuste) y Prueba (capitel) se sustenta la sensación del profesor de que el estudiante ha dado un salto cualitativo en su camino de aprender esta parte experimentada de la materia.

La figura 1 presenta un cuadro sintético del análisis ETM mostrando a detalle lo dicho anteriormente, y deja en claro la influencia de las directrices de la Teoría de Representaciones Semióticas en el diseño de las actividades experimentales y las situaciones didácticas a las que se enfrenta cualquier estudiante de la muestra.



*Figura 1.* Análisis de la situación hipotética basada en el diagrama de ETM

La información recolectada que corresponde al trabajo matemático personal del estudiante se analiza desde la perspectiva del modelo ETM. Se identifican las génesis (semiótica, instrumental

y discursiva) y los planos que conectan las génesis mencionadas, activados en el trabajo matemático del estudiante.

### **3. Las actividades didácticas**

Ya hemos mencionado que cuatro actividades didácticas se diseñaron con una estructura de actividad de exploración guiada (Carrión et al., 2016), es decir, cada actividad se contiene en varias hojas de trabajo en la que se proporcionan indicaciones y se plantean preguntas que el estudiante debe responder por escrito (ver a detalle en los Anexos). En sí, esta actividad puede considerarse como actividad didáctica llevada en el aula o como actividad fuera del aula, de hecho, se dieron las dos opciones con siete estudiantes en el aula y dos fuera, ya que nuestra intención fue que la actividad se desarrollara de manera autónoma por cada estudiante. De esta forma, el estudiante se ve en la obligación de asumir la responsabilidad total de su trabajo matemático relativo a la actividad. Si bien, en este experimento educativo se contempló una etapa de trabajo individual, no podíamos dejar pasar el aprendizaje sujeto al grupo o a la colectividad, por ello, después del trabajo matemático individual se pasaba a una etapa de discusión grupal, al estilo debate científico (Legrand et al., 2011) con la menor posible actuación del profesor. Todas las actividades duraron un máximo de 90 minutos para ambas etapas y ajustarse a la duración estándar de una clase de Cálculo Diferencial en la universidad donde se realizó la experimentación.

#### **3.1 Actividad didáctica 1**

La actividad se diseñó de forma que los estudiantes tuvieran que responder a diez preguntas, como se muestra en la figura 2. Preguntas presentadas en lenguaje natural (registro de representación semiótico textual) y se esperaba que las respuestas de los estudiantes emergiesen, al menos, los registros de representación textual-verbal, figural y numérico. En esta actividad los estudiantes podían usar por iniciativa propia un artefacto material como una regla graduada.

El objetivo didáctico principal se correspondía a hacer emerger signos semióticos espontáneos del estudiante (Hitt, 2013) e identificar simbología como las literales (letras) que utilizaban, entre ellos: la dimensión espacial de los esquemas y la necesaria precisión de la figura geométrica descrita en el texto (Páez et al. 2023)

El objetivo matemático se centró en identificar las variables y los conceptos adjuntos a éstas. Es decir, se estudió si los estudiantes distinguían las variables contextuales de la actividad y sus usos: La variable recorrido y la variable distancia al punto inicial. Además, así como los conjuntos

numéricos donde estas variables toman valor; dominio de valores de las variables que aparecen implícitamente en la actividad y si se utilizan en relación con las variables establecidas.



Nombre: \_\_\_\_\_

Estudios que realiza: \_\_\_\_\_

**Actividad No. 1: Recorrido de la hormiga<sup>1</sup>**

En una situación hipotética: Una hormiga sale de su hormiguero, el cual está en un punto sobre el perímetro de un cuadrado. Si anda, lo hace sólo por este perímetro sin retroceder.

1. Realice un esquema o bosquejo de la situación hipotética.

4. Observe el recorrido de la hormiga y la distancia que está la hormiga del hormiguero. ¿qué cantidades varían?, ¿qué cantidades se mantienen constantes?

5. Argumente si la distancia a la que está la hormiga del hormiguero, es igual, o no, a la distancia que recorre la hormiga del punto donde se encuentra al hormiguero.

6. Argumente si existe algún tipo de relación entre el recorrido que realiza la hormiga y la distancia que hay entre la hormiga y el hormiguero.

7. ¿El recorrido que realiza la hormiga, entre qué valores se encuentra?

8. ¿La distancia que hay entre la hormiga y el hormiguero, entre qué valores se encuentra?

9. En el siguiente cuadro, escribe la desigualdad que represente los valores en que se encuentran tanto el recorrido como la distancia.

| Desigualdad   |  |
|---|--|
| a. Valores en que se encuentra el recorrido que realiza la hormiga                    |  |
| b. Valores en que se encuentra la distancia que hay entre la hormiga y el hormiguero. |  |

10. En el siguiente cuadro, escribe el valor mínimo y valor máximo que tendrían tanto el recorrido como la distancia. Argumente cómo obtuvo estos valores.

|   | Valor mínimo | Valor máximo | Argumentación |
|---|--------------|--------------|---------------|
| a. Recorrido que realiza la hormiga                   |              |              |               |
| b. Distancia que hay entre el hormiguero y la hormiga |              |              |               |

<sup>1</sup>Actividad diseñada a partir de la actividad didáctica experimentada en Delgado y Martínez (2023).

*Figura 2. Actividad didáctica 1 diseñada para el experimento educativo*

### 3.2 Actividad didáctica 2

Esta actividad se compuso nuevamente con cuatro preguntas, que intentan dirigir el trabajo matemático de los estudiantes con el fin de que emerja el registro de representación semiótica verbal, el numérico y el gráfico. Para ello, se le proporcionó instrucciones precisas para que realizasen la construcción de un cuadrado en una hoja de papel en blanco y para que tomasen algunas mediciones en referencia a las dos variables del contexto. Para poder hacer comparaciones de las medidas entre estudiantes, se le solicitó que considerasen situado el hormiguero en un vértice del cuadrado y que ubicasesen tres puntos en cada lado del cuadrado uniformemente espaciados en cada lado del cuadrado (ver pregunta 2 en la figura 3).

Para este momento de la experimentación, se diseñó la actividad de exploración guiada para dirigir hacia una supuesta y esperada convergencia de los pensamientos de todos los estudiantes, a través de resaltar las variables de interés en un momento dado; el valor de lo recorrido por la hormiga y la distancia que hay entre ésta y el hormiguero.

En el diseño se contempló que el estudiante pueda integrar y manipular artefactos materiales, tales como la hoja de papel en blanco para construir un cuadrado e instrumentos de medida (reglas graduadas) que permitieran completar la información numérica que era solicitada.

De la misma manera, se insistió en querer corroborar el grado de diferenciación y apropiación en el uso de las variables del contexto: recorrido y distancia, y si se establecía alguna relación de dependencia entre estas variables, con el reconocimiento de la variable independiente y la dependiente según el enunciado.



**PROYECTO  
ENSEÑANZA DEL  
CÁLCULO**

Nombre: \_\_\_\_\_

**Actividad No. 2: Recorrido de la hormiga sobre el cuadrado<sup>1</sup>**

En una situación hipotética: Una hormiga sale de su hormiguero, el cual está en un punto en un vértice de un cuadrado. Si anda, lo hace sólo por el perímetro de este cuadrado sin retroceder.

**Instrucción:**

En una hoja tamaño carta, realice las dobleces necesarias del papel para obtener un cuadrado. Con ayuda de tijeras corte por alguna marca para disponer del cuadrado.

1. ¿De qué manera puede comprobar que la figura obtenida es un cuadrado? Argumente su respuesta.

2. En el perímetro del cuadrado obtenido:

- i. Etiquete los vértices del cuadrado como  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  y  $H_4$ . El punto  $H_1$  es dónde se sitúa al hormiguero.
- ii. Divida cada lado del cuadrado en cuatro partes iguales y etiquete con  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  los puntos de división entre  $H_1$  y  $H_2$ , con  $B_1$ ,  $B_2$  y  $B_3$  los puntos entre  $H_2$  y  $H_3$ , con  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  los puntos entre  $H_3$  y  $H_4$ , y con  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$  los puntos entre  $H_4$  y  $H_1$ .

Nota: Todos los puntos  $A_1$ ,  $A_2$ , ...,  $D_3$ , y los vértices son puntos por donde pasa la hormiga dentro de la ruta establecida. No olvide que la hormiga no retrocede.

- iii. Con lápiz de color azul, marque la distancia que hay del punto  $B_3$  al hormiguero ( $H_1$ ).

iv. Con lápiz de color rojo, marque el recorrido de la hormiga desde el hormiguero  $H_1$  al punto  $B_3$ .

- a. Argumente si la distancia del punto  $A_3$  al hormiguero  $H_1$  es igual, o no, a la distancia que recorre la hormiga entre esos dos puntos.

- b. Argumente si la distancia del punto  $B_3$  al hormiguero  $H_1$  es igual, o no, a la distancia que recorre la hormiga entre esos dos puntos.

- c. Argumente si la distancia del punto  $C_3$  al hormiguero  $H_1$  es igual, o no, a la distancia que recorre la hormiga entre esos dos puntos.

- d. Argumente si la distancia del punto  $D_3$  al hormiguero  $H_1$  es igual, o no, a la distancia que recorre la hormiga entre esos dos puntos.

- e. Realice las medidas en centímetros necesarias para completar la Tabla 1

| Punto seleccionado | Medida del recorrido de la hormiga (centímetros) | Distancia entre los puntos (centímetros) |
|--------------------|--|--|
| $H_1A_1$           |  |  |
| $H_1A_2$           |  |  |
| $H_1A_3$           |  |  |
| $H_1B_1$           |  |  |
| $H_1B_2$           |  |  |
| $H_1B_3$           |  |  |
| $H_1C_1$           |  |  |
| $H_1C_2$           |  |  |
| $H_1C_3$           |  |  |
| $H_1D_1$           |  |  |
| $H_1D_2$           |  |  |
| $H_1D_3$           |  |  |

Tabla No. 1

3. Escriba la información de la Tabla No. 1 como pares ordenados (parejas ordenadas) en la columna vacía de la tabla.

4. Solicita a su maestra una hoja cuadriculada, y represente estos pares en un plano cartesiano.

<sup>1</sup>Actividad diseñada a partir de la actividad didáctica experimentada en Delgado y Martínez (2023)

*Figura 3. Actividad didáctica 2 diseñada para el experimento educativo*

### 3.3 Actividad didáctica 3

En esta actividad se propusieron seis preguntas que se correspondían a utilizar la información numérica obtenida (medidas) en la actividad 2. La actividad está dedicada a observar que en las respuestas de los estudiantes apareciera el registro de representación semiótica algebraico. Es decir, si podían establecer la expresión algebraica de la relación funcional de las variables del contexto.

También, se diseñó para que el estudiante transitara desde ese registro algebraico hasta construir una nueva representación gráfica que mostrase la relación global entre los conjuntos de las variables estudiadas. Así pues, esto significa que la actividad de exploración guiada estuvo diseñada para encaminar el trabajo de los estudiantes hacia una institucionalización del conocimiento matemático. Al mismo tiempo, se pretendió comprobar si los estudiantes expresaban de forma algebraica el dominio y el rango (intervalos) de la supuesta relación funcional buscada.



**UACM**  
Universidad Autónoma  
de la Ciudad de México  
José Torreblanca Espinoza



PROYECTO  
ENSEÑANZA DEL  
CÁLCULO

Nombre: \_\_\_\_\_

**Actividad No. 3: Relación funcional en el contexto del recorrido de la hormiga sobre el cuadrado<sup>3</sup>**  
Continuando con el trabajo que inició en la actividad No. 2 y haciendo uso de los datos tomados en la Tabla No. 1, responda a lo siguiente:

1. Asigne una etiqueta o literal (letra) para especificar la medida del recorrido de la hormiga y otra literal para especificar la distancia entre los puntos. Esta letra o etiqueta es la variable que se va a utilizar en las siguientes preguntas cuando se haga referencia al recorrido y a la distancia.

| Nombre  | Etiqueta o literal asignada |
|---|-----------------------------|
| Recorrido de la hormiga   |                             |
| Distancia entre los puntos (hormiguero y punto donde se encuentra la hormiga) |                             |

2. Analice el desplazamiento de la hormiga en el **primer lado del cuadrado**:

- a. Entre qué valores se encuentra el recorrido de la hormiga en este primer lado del cuadrado.

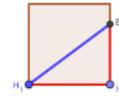
- b. Utilice una desigualdad y la literal asignada al recorrido para expresar entre qué valores se encuentra el recorrido de la hormiga en este primer lado del cuadrado.

- c. Entre qué valores se encuentra la distancia que está la hormiga del hormiguero.

- d. Utilice una desigualdad y la literal asignada a la distancia para expresar entre qué valores se encuentra la distancia que está la hormiga del hormiguero, en este primer lado del cuadrado.

- e. Utilizando las literales asignadas tanto al recorrido como a la distancia, escriba la expresión algebraica de la relación funcional distancia en términos del recorrido.

Analice el recorrido de la hormiga en el **segundo lado del cuadrado**:



- a. Entre qué valores se encuentra el recorrido de la hormiga en este segundo lado del cuadrado

- b. Utilice una desigualdad y la literal asignada al recorrido para expresar entre qué valores se encuentra el recorrido de la hormiga en este segundo lado del cuadrado.

- c. Entre qué valores se encuentra la distancia que está la hormiga del hormiguero.

- d. Utilice una desigualdad y la literal asignada a la distancia para expresar entre qué valores se encuentra la distancia que está la hormiga del hormiguero, en este segundo lado del cuadrado.

- e. Utilizando las literales asignadas tanto al recorrido como a la distancia, escriba la expresión algebraica de la relación funcional distancia en términos del recorrido para este segundo lado del cuadrado.

- f. Utilizando la expresión algebraica proporcionada en el inciso anterior, evalúe si con el recorrido del punto H-B<sub>1</sub> obtiene la misma distancia que colocó en la Tabla No. 1.

4. Analice el recorrido de la hormiga en el **tercer lado del cuadrado**

|  |
|--|
| Completa la siguiente tabla:   |
| Desigualdad que expresa entre qué valores se encuentra el recorrido de la hormiga en el tercero lado del cuadrado.                     |
| Distancia que expresa entre qué valores se encuentra la distancia que está la hormiga del hormiguero, en el tercero lado del cuadrado. |
| Expresión algebraica de la relación funcional distancia en términos del recorrido para este tercero lado del cuadrado.                 |

- b. Utilizando la expresión algebraica proporcionada en la última fila de la tabla, evalúe si con el recorrido del H-C<sub>1</sub>, obtiene la misma distancia que colocó en la Tabla No. 1.

5. Analice el recorrido de la hormiga en el **cuarto lado del cuadrado**

|   |
|---|
| Completa la siguiente tabla:  |
| Desigualdad que expresa entre qué valores se encuentra el recorrido de la hormiga en el cuarto lado del cuadrado.                     |
| Distancia que expresa entre qué valores se encuentra la distancia que está la hormiga del hormiguero, en el cuarto lado del cuadrado. |
| Expresión algebraica de la relación funcional distancia en términos del recorrido para este cuarto lado del cuadrado.                 |

- b. Utilizando la expresión algebraica proporcionada en la última fila de la tabla, evalúe si con el recorrido del H-D<sub>1</sub>, obtiene la misma distancia que colocó en la Tabla No. 1.

6. Solicite a su maestro una hoja condidatada. Utilice las expresiones algebraicas obtenidas en cada uno de los lados del cuadrado, para realizar la representación gráfica de la relación funcional de la distancia en términos del recorrido.

<sup>3</sup>Actividad diseñada a partir de la actividad didáctica experimentada en Delgado y Martínez (2023)

Figura 4. Actividad didáctica 3 diseñada para el experimento educativo

### **3.4 Actividad didáctica 4**

De acuerdo como se diseñó el experimento educativo, se concibió que después de las tres primeras actividades didácticas, se diera un proceso de institucionalización del conocimiento y que esta cuarta actividad didáctica permitiera verificar el aprendizaje significativo de los estudiantes después de la realización individual de las actividades anteriores y de la discusión con todo el grupo. Para ello, se diseñó un conjunto de quince preguntas con las que el trabajo matemático de los estudiantes mostrara la aparición de los registros de representación verbal, numérico, gráfico y algebraico.

Esta actividad permitiría tener un control del trabajo realizado por los estudiantes en los diferentes momentos y en la institucionalización del conocimiento. En este caso se sustituyó la figura del cuadrado por un rectángulo. Así pues, se pudo comprobar si podían generalizar la relación funcional relativa al cuadrado.

Ante el reto de una operatoria dinámica y con la intención de apoyar el trabajo individual en el proceso de conversión de registros de representación semiótica, se empleó de manera específica la aplicación GeoGebra para facilitar las hipótesis obtenidas a mano.

### **3.5 Los datos de la experimentación de las actividades**

La experimentación se desarrolló en cinco sesiones de noventa minutos.

La muestra estudiantil por conveniencia corresponde a un grupo de siete estudiantes universitarios inscritos en el curso de Cálculo Diferencial para ingenieros.

Se involucró a una persona de la institución; la profesora del curso como docente y como observadora, y a otra persona cualificada como externa a la institución que también realizó el rol de observadora.

## **4. Resultados**

La forma de analizar en extensión el estudio realizado en la experiencia y el análisis del trabajo matemático de los siete estudiantes se puede consultar en Páez et al (2024). En este trabajo analizamos el estudio para mostrar cómo se favorece el aprendizaje de los estudiantes con las actividades didácticas. Por ello, se presentan el trabajo matemático en forma de episodios;

concretamente el trabajo matemático del estudiante (E1) con el desarrollo de las cuatro actividades didácticas.

#### 4.1 Actividad didáctica 1: Representación espontánea y representación institucional

Ya hemos dicho que la primera actividad exploraba el pensamiento de los estudiantes en relación con signos semióticos que son representativos y funcionales. Se intentó identificar en estos signos semióticos el tipo de pensamiento o nociones matemáticas que predominan en los estudiantes.

En la figura 5, se observa el contraste de dos representaciones semióticas de la situación inicial planteada, en relación a las instrucciones dadas en la actividad. La imagen de la izquierda de la figura 5 está relacionada a la pregunta 1, y se corresponde al esquema o bosquejo de la situación hipotética. La imagen de la derecha de la figura 5 está relacionada con la pregunta 3, y se corresponde a la representación institucional que proporciona al estudiante al solicitarle que dibuje el cuadrado por la cual la hormiga se mueve. Otros objetos presentes en la imagen de la derecha se corresponden a las instrucciones dadas del formulario. Por ejemplo, representar el hormiguero a través de un punto y especificar las medidas en centímetros ya que se utilizó un papel cuadriculado estándar.

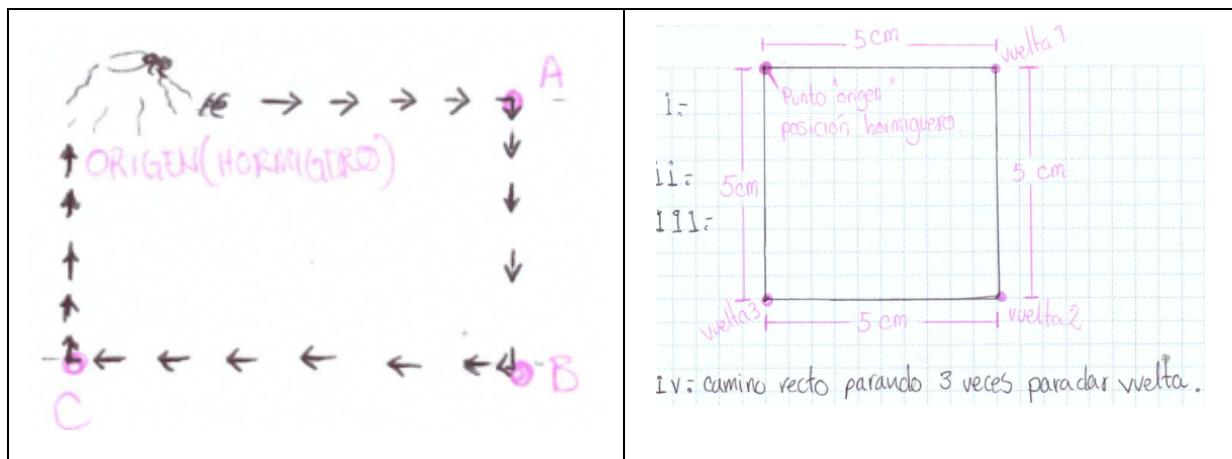


Figura 5. Trabajo matemático del estudiante E1 en la actividad didáctica 1, pregunta 1 y 3

La representación espontánea de la situación refleja una visión del fenómeno como discreto; imagen de la izquierda. Esto es así por el signo utilizado que corresponde a flechas y por lo que responde en la pregunta 7, en donde asocia la variable Recorrido de la hormiga con el conjunto de los números enteros 0 y 19. Esto revela que su pensamiento matemático está inmerso en lo discreto. Además, hay una total ausencia de control discursivo sobre el bosquejo realizado en la

pregunta 1, debido a que el bosquejo no corresponde a un cuadrado por la ausencia de un trazo continuo y la desigualdad en la longitud de sus lados.

En términos de la génesis instrumental, el artefacto material que corresponde a la regla se usó sólo para hacer el trazo recto, sin que se active un proceso de medición, y por supuesto, ningún de cálculos algebraicos por falta de medidas.

En relación a la referencia teórica matemática, existe una total ausencia de las características propias del concepto de variación. Esto está explícitamente expresado por el estudiante al escribir “Ninguna cantidad es variable. Todas son constantes y una sola cantidad (5)”, como se muestra en la figura 6.

4. Observe el recorrido de la hormiga y la distancia que está la hormiga del hormiguero. ¿qué cantidades varían?, ¿qué cantidades se mantienen constantes?  
*Ninguna cantidad es variable. Todas son constantes y una sola cantidad (5)*

*Figura 6.* Trabajo matemático del estudiante E1 en la actividad didáctica 1, pregunta 4

#### **4.2 Actividad didáctica 2: El proceso de medición**

La estructura de exploración guiada de esta actividad permitía solicitar al estudiante la construcción del cuadrado sobre una hoja de papel en blanco del tipo carta de formato americano ( $21.59 \times 27.94$ ). Además, se solicitó trazar en colores diferentes el recorrido y la distancia relativos a la ubicación de diferentes puntos de cada lado por donde se mueve la hormiga. Igualmente se pidieron las medidas del recorrido y la distancia para esos puntos como se muestra en la figura 7.

La manipulación práctica que realiza el estudiante con los artefactos tangibles, en esta actividad didáctica, encamina al estudiante a percibir la diferenciación de las variables en juego; recorrido y distancia. Esto se evidencia en las respuestas a los apartados a y b de la pregunta 2. En ellas se aprecia que las medidas prácticas son respaldadas por la medida obtenida usando el Teorema de Pitágoras. De esta forma el estudiante establece la igualdad o no entre las dos variables según el lado de cuadrado; véase la figura 7.

|  |  |
|--|--|
|  | $\begin{aligned} \sqrt{933.12} &= \\ &\sqrt{748.8} \\ &282.24 + 466.56 \\ &\sqrt{1592} = 24.33 \\ &125+ \\ &125.44 + 466.56 \\ &\sqrt{497.92} \\ &31.36 + 466.56 \\ &(5.6) + (21.6) \end{aligned}$ |
| Cuadrado construido y medidas prácticas  | Cálculo de medidas con el artefacto simbólico  |
| <p>a. Argumente si la distancia del punto A<sub>3</sub> al hormiguero H<sub>1</sub> es igual, o no, a la distancia que recorre de la hormiga entre esos dos puntos.</p> <p><i>Sí, si es igual.</i> <math>R = 16.3</math><br/><math>D = 16.3</math></p> <p>b. Argumente si la distancia del punto B<sub>1</sub> al hormiguero H<sub>1</sub> es igual, o no, a la distancia que recorre de la hormiga entre esos dos puntos.</p> <p><i>No es igual. Una es mayor que otra.</i><br/><math>R = 26.90\text{cm}</math><br/><math>D = 22.2407\text{cm}</math></p> |  |
| Resuesta a las preguntas 2-a y 2-b   |  |

Figura 7. Trabajo matemático del estudiante E1 para la actividad didáctica 2

Igualmente, se evidencia el sistema de control que ejerce el estudiante al comparar la medida tomada con el artefacto material (regla) con la calculada con el artefacto simbólico (teorema de Pitágoras), puesto que, otorga mayor peso a la medida conseguida con el Teorema de Pitágoras, ya que es la que utilizó para justificar la igualdad o no de las variables según el punto marcado del cuadrado.

La tarea de medir propuesta en esta actividad didáctica evidenció ciertas coincidencias de los valores numéricos de la variable distancia en los dos primeros lados, con los del tercer y cuarto lado. Esta característica visible en el registro numérico promueve una actuación de control personal al transitar desde el registro tabular-numérico hasta el registro gráfico, permitiendo reestructurar el trabajo el estudiante; véase la figura 8.

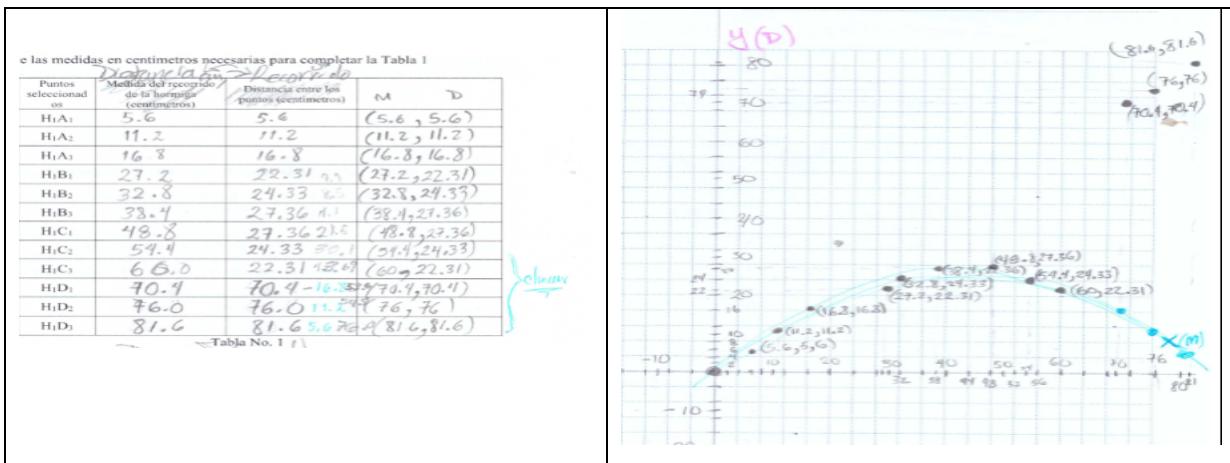


Figura 8. Trabajo matemático del estudiante E1 en la actividad didáctica 2: Preguntas 2e y 4

De alguna forma, parece que el uso del artefacto material influye en el control del trabajo matemático del estudiante, pero no parece que sea suficiente para hacerlo reflexionar sobre el modelo gráfico (segmento rectilíneo o segmento no rectilíneo) cuando se interpretan todas las posibles posiciones de la hormiga en cada lado del cuadrado. Esto es, no se evidencia la concientización del estudiante ante el tipo de curva o gráfica que modela la situación hipotética planteada, puesto que el estudiante remarcó una cierta poligonal como gráfica final.

#### 4.3 El proceso de institucionalización usando GeoGebra

La sesión dedicada a la formalización la solución de la situación hipotética planteada se hizo con el uso de GeoGebra, para ello, lo primero fue la construcción de un cuadrado cuyo lado podía cambiar de longitud al variar la posición un deslizador como se muestra en la figura 9. Resulta que la única forma de que un usuario de GeoGebra pueda utilizar algo similar a una variable matemática personal es hacerlo mediante un parámetro definido por un deslizador.

El cuadrado se genera mediante la construcción de un polígono regular de cuatro lados con la longitud del lado definido por el parámetro.

Si bien se pudo optar por una construcción de la representación gráfica punto a punto mediante la situación del movimiento de la hormiga con otro nuevo deslizador, no se hizo así ya que se estaba en un proceso de institucionalización. En próximas experimentaciones emplearemos la simulación del movimiento. Así pues, se empleó la expresión algebraica en términos del parámetro definido por el deslizador, para definir la función mediante la reiteración del comando

Si(<Condición>, <Entonces>, <Si no>). El introducir la expresión algebraica de esta manera requiere de atención debido a que hay que utilizar de manera repetida el comando mencionado para completar los cuatro trozos de la función ya que para esta experimentación se contempló que la hormiga da una sola vuelta.

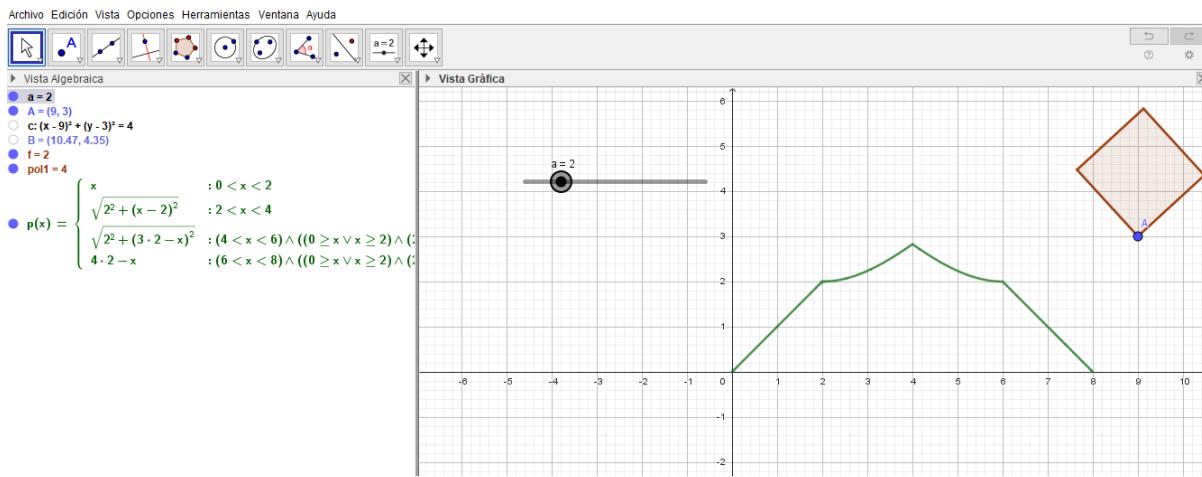


Figura 9. Vistas, Gráfica 2D y Algebraica, del modelo con GeoGebra para la situación hipotética planteada

#### 4.4 Actividad didáctica 4: Generalización del proceso de medición al rectángulo

Para inspeccionar el posible aprendizaje significativo se diseñó la actividad 4, en la que se extiende el trabajo de las primeras tres actividades didácticas al considerar que el recorrido de la hormiga se hace sobre un rectángulo. En relación con la evocación del registro gráfico, en el diseño de la actividad didáctica se permitió el apoyo de GeoGebra, y se omitió el trabajo de realizar la representación gráfica de manera manual.

Con la respuesta desarrollada por el estudiante en esta actividad se evidencia que la noción de variación e identificación de las variables se consolidaron en él. Por otro lado, sucedió que la tarea de medir con el artefacto material obstaculizó cierto carácter simétrico de lo medido en el cuadrado. El estudiante extrapoló las medidas tomadas en el segundo lado del rectángulo relativos a los puntos etiquetados  $H_nB_m$ , al tercer lado del rectángulo para los puntos etiquetados  $H_nC_m$ . Esto es patente en la tabla de la figura 10 correspondiente a la pregunta 3, apartado e.

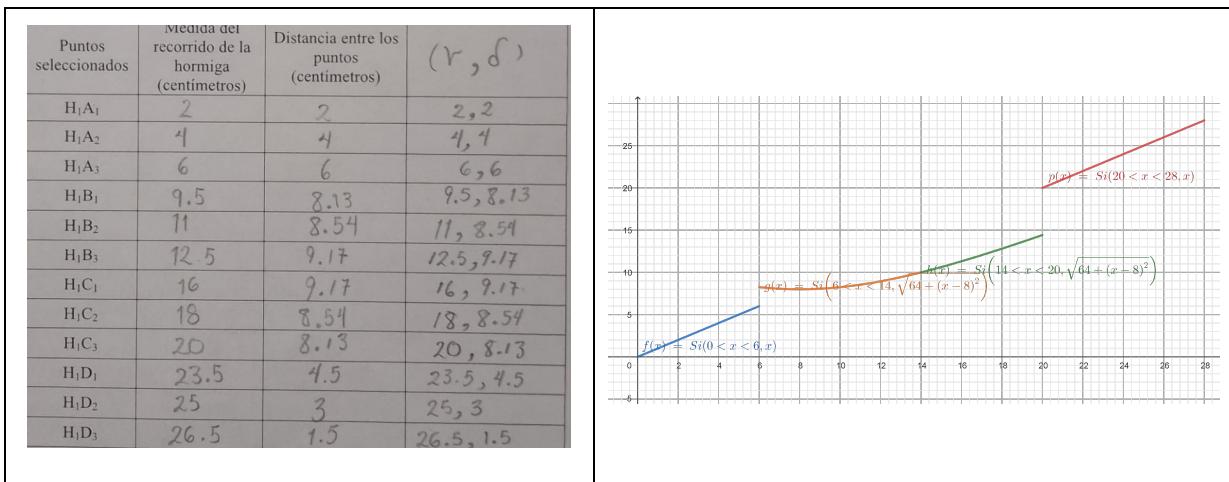


Figura 10. Trabajo matemático del estudiante E1 en la actividad didáctica 4: Pregunta 3-e y 10.

Es probable que, al haberse omitido la realización de la representación gráfica de manera manual, no se haya activado control necesario para coordinar la representación tabular-numérica y la representación gráfica. En la representación gráfica que proporciona con apoyo de GeoGebra en la figura 10 en relación a la pregunta 10, su trabajo está centrado en la acomodación de los trozos de manera aislada como funciones independientes, pero no realiza la confrontación entre la información en los registros de representación, el numérico-tabular, el algebraico y el gráfico. Esto marca cierto retroceso en términos de la no activación de control entre el registro numérico-tabular y gráfico que mostró en la actividad didáctica 2. En cierta medida, este control se desvaneció con el objetivo de realizar la gráfica con GeoGebra. Esto nos lleva a considerar que ante el interés por integrar un artefacto tecnológico (GeoGebra) para la representación de funciones, es muy importante considerar la importancia de asegurar la imaginación del estudiante que se activa fácilmente al realizar la representación gráfica de manera manual, aunque sea a modo de bosquejo de gráfica.

## 5. Algunas reflexiones y perspectivas de investigación

Los resultados de este experimento educativo evidencian que la implementación de las actividades diseñadas permitió identificar algunas debilidades, ciertas fortalezas y las necesarias estrategias de control que puedan implementar o no, los estudiantes con respecto a los distintos registros de representación semiótica del concepto de función y características adjuntas como dominio y rango. Asimismo, en relación con las debilidades ha resultado importante aflorarlas al utilizar el planteamiento de una situación hipotética con la hormiga con la que emergen también

representaciones espontáneas de los estudiantes. Esta práctica experimental ha permitido explorar algo esencial: La visión real que el estudiante tiene sobre fenómenos de tipo continuo o si estos son identificados como de tipo discreto. Además, ha identificado la dificultad del estudiante para imaginar que el registro simbólico y el registro algebraico no está definido mediante una única expresión, es decir, la dificultad de asumir la expresión de una función definida por partes en su dominio.

Por lo dicho hasta hora, queda patente la importancia de integrar a la experimentación educativa todas las etapas que considera por ejemplo la metodología de enseñanza ACODESA, en la que una discusión en pequeños grupos podría ayudar a evolucionar las representaciones espontáneas para llegar a las representaciones institucionales, sin que éstas últimas sean impuestas, sino que surjan como la evolución de las representaciones espontánea y de la discusión. Es decir, que se fomente las representaciones institucionales a partir de las representaciones semióticas socialmente construidas (Hitt y Quiroz, 2019)

El hecho de hacer un trabajo matemático empleando artefacto material, como una hoja blanca y una regla graduada, rompió con el esquema clásico de la clase. Además, resultó ser de apoyo para el trabajo matemático autónomo que deben realizar los estudiantes sin tener que escuchar la palabra del profesor, ya que es el estudiante el que se encuentra con la situación práctica que debe resolver.

Este experimento educativo puede completar otro recorrido didáctico previsto inicialmente en fase de diseño que muestre otras concepciones. Por ello, resulta necesario incrementar el conjunto de mediciones realizadas dirigidas a la reflexión en torno a la continuidad y la expresión afín, o no, de la relación funcional. Además, en esta experiencia sólo se permitió desplazar a la hormiga por todo el perímetro del cuadrado, pero quedan ideas emergentes como la periodicidad si a la hormiga se le permite seguir dando vueltas al perímetro.

El trabajo de medición puede ser simulado directamente con artefactos digitales al integrar GeoGebra, ahora bien, esa simulación no debe reemplazar totalmente el trabajo manual ya que la correlación de los diferentes registros de representación semiótica debe emerger y no impuesta como se simula en GeoGebra. Es decir, en la representación gráfica de la situación, el trabajo con la hoja en blanco, el estudiante debe transformar en puntos del plano cartesiano las medidas efectuadas con la regla. Las actividades didácticas, en sus etapas de discusión, podrían facilitar

la evocación de un análisis algebraico y el trazo a mano alzada de la curva que describe el comportamiento de la hormiga. De esta manera, se genera una perspectiva que no debe de ser reemplazada en su totalidad con el apoyo de GeoGebra o de algún otro artefacto digital. La etapa de consolidación de estándares requiere variar características del cuadrado y volver a las mediciones sin que tenga que hacerse todo de nuevo, para eso si es interesante el uso de esas tecnologías digitales.

De acuerdo con los resultados que reportan Delgado y Martínez (2023) y con los de esta experimentación, se identifica la dificultad en cuanto al objetivo principal común en los estudiantes: No consiguieron abstraer ni una representación gráfica ni una representación algebraica del modelo funcional de la situación hipotética planteada. Así pues, el estudio de una función a trozos requiere de un mayor trabajo experimental en el aula. En este sentido, y cómo perspectiva de esta investigación se plantea la interrogante: ¿Qué tipo de acciones se deben de implementar en el aula de clase cuando el estudiante tiene habilidades en el registro de representación numérica o gráfica, y adolece de habilidades en el registro de representación algebraica?

Aunque solo nos hemos centrado en describir lo didáctico y lo matemático de esta experiencia, no podemos finalizar este trabajo sin eludir algo importante, esto es, el interés que despierta en estudiantes la ejecución autónoma de este tipo de actividades didácticas en el aula. Los beneficios de disponer de situaciones de trabajo placenteras para los estudiantes nos impactan ante este tipo de experiencias, y nos permite asumir que mantener este interés del estudiante se corresponde con contar con mayores recursos didácticos para una dinámica similar en el aula. En realidad, como una actividad constante y diaria de experimentación educativa o, lo que es lo mismo, un cambio de acercamiento distinto al saber matemático.

## **6. Reconocimientos**

Este trabajo fue posible gracias al apoyo de la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, proyecto de investigación: UACM CCYT-CON-10. Se agradece a los estudiantes y profesores-investigadores que participaron en este experimento educativo.

## 7. Referencias bibliográficas

- Carrión, V., Pluvinage, F., Adjage, R. (2016). Facilitating the genesis of functional working spaces in guided explorations. *ZDM Mathematics Education*, 48, 809–826. DOI:[10.1007/s11858-016-0791-y](https://doi.org/10.1007/s11858-016-0791-y)
- Delgado Pineda, M. y Martínez Reyes, M. (2023). Introducción a los conceptos de función y de función periódica en la formación de profesores usando computadora. En investigaciones y experiencias en enseñanza de las ciencias y la matemática. UAEM. ISBN 978-607-633-573-4 (impreso Universidad Autónoma del Estado de México)
- Duval R. (1999) Sémosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Universidad del Valle.
- Hitt, F. (2003) Le caractère fonctionnel des représentations. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 8, 255-271. [https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Anna-les\\_didactique/vol\\_08/adsc8-2003\\_013.pdf](https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Anna-les_didactique/vol_08/adsc8-2003_013.pdf)
- Hitt, F y Quiroz, S. (2019). Formation et évolution des représentations fonctionnelles-spontanées à travers un apprentissage socioculturel. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* [En ligne], 24 | 2019, mis en ligne le 01 janvier 2022, consulté le 10 juin 2024. URL : <http://journals.openedition.org/adsc/630>; DOI : <https://doi.org/10.4000/adsc.630>
- Kuzniak, A. (2019). La théorie des Espaces de Travail Mathématique –Développement et perspectives. In L. Vivier & E. Montoya-Delgadillo (Eds.). *Sexto Simposio sobre el Trabajo Matemático* (pp 21-60). Valparaíso: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. [https://etm7.sciencesconf.org/data/Actes\\_ETM6.pdf](https://etm7.sciencesconf.org/data/Actes_ETM6.pdf)
- Kuzniak, A. (2023). Trabajo matemático en análisis: identificación y construcción, homenaje a Francois Pluvinage. En investigaciones y experiencias en enseñanza de las ciencias y la matemática. UAEM. ISBN 978-607-633-573-4 (impreso Universidad Autónoma del Estado de México)
- Legrand, M., Lecorre, T., Leroux,L., Parreau, A. (2011). Le principe du « Débat Scientifique » dans un enseignement. IREM de Grenoble. Disponible en: <https://publimath.univ-irem.fr/numerisation/IGR/IGR11026/IGR11026.pdf>
- Maschietto, M., & Soury-Lavergne, S. (2017). The duo “pascaline and e-pascaline” : An example of using material and digital artefacts at primary school. In E. Faggiano, F. Ferrara, & A.

Montone (Éds.), *Innovation and technology Enhancing Mathematics Education* (Springer, p. 137-160).

Páez Murillo, R. E (2022). ACODESA en una educación no presencial. *PádiUAQ*, 5(9), 20-31.  
<https://revistas.uaq.mx/index.php/padi/article/view/45>

Páez Murillo, R. E., Hernández Sánchez, J. A., & Ku Euán, D. A. (2023). Significados otorgados a las literales por estudiantes de secundaria y universitarios de nuevo ingreso. *IE Revista De Investigación Educativa De La REDIECH*, 14, e1787.  
[https://doi.org/10.33010/ie\\_rie\\_rediech.v14i0.1787](https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v14i0.1787)

Páez, R., Alfaro, F. y Torres, C. (2008). Estudiando funciones en contexto a través de simulaciones con estudiantes de ingeniería (La simulation dans l'étude de fonctions pour des étudiants en ingénierie). *Annales de didactique et de sciences cognitives*. Volumen 13, pp. 113 – 132. [https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Annales\\_didactique/vol\\_13/adsc13-2008\\_005.pdf](https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Annales_didactique/vol_13/adsc13-2008_005.pdf).

Páez, R., Delgado, M., Hernández, J. y Martínez, M. (2024). El estudio de la relación funcional entre recorrido y distancia, en un contexto de manipulación con artefactos materiales. *Octavo Simposio sobre el Estudio del Trabajo Matemático*. Castro Urdiales, España. Octubre 21 al 25 de 2024. Memorias en proceso de publicación.

## 8. Anexos

## 8.1 Actividad didáctica 1



PROYECTO  
ENSEÑANZA DEL  
CÁLCULO

**Nombre:** \_\_\_\_\_

**Estudios que realiza:**

### **Actividad No. 1: Recorrido de la hormiga<sup>1</sup>**

En una situación hipotética: Una hormiga sale de su hormiguero, el cual está en un punto sobre el perímetro de un cuadrado. Si anda, lo hace sólo por este perímetro sin retroceder.

1. Realice un esquema o bosquejo de la situación hipotética.
  2. Con la intención de comunicarle a un compañero su bosquejo, sin que se lo presente, redacte un mensaje, para que él pueda reproducir este bosquejo o dibujo.
  3. En la hoja cuadriculada (solicitela a su maestra):
    - i. Dibuje el cuadrado por el cual la hormiga va a realizar su recorrido.
    - ii. Especifique las medidas en centímetros, del cuadrado dibujado.
    - iii. Defina el punto en el que se encuentra el hormiguero.
    - iv. Proponga la ruta que va recorrer la hormiga para explorar el contorno del cuadrado. Tome en cuenta que la hormiga no retrocede.

<sup>1</sup>Actividad diseñada a partir de la actividad didáctica experimentada en Delgado y Martínez (2023)

4. Observe el recorrido de la hormiga y la distancia que está la hormiga del hormiguero. ¿qué cantidades varían? ¿qué cantidades se mantienen constantes?
5. Argumente si la distancia a la que está la hormiga del hormiguero, es igual, o no, a la distancia que recorre la hormiga del punto donde se encuentra al hormiguero.
6. Argumente si existe algún tipo de relación entre el recorrido que realiza la hormiga y la distancia que hay entre la hormiga y el hormiguero.
7. ¿El recorrido que realiza la hormiga, entre qué valores se encuentra?
8. ¿La distancia que hay entre la hormiga y el hormiguero, entre qué valores se encuentra?
9. En el siguiente cuadro, escribe la desigualdad que represente los valores en que se encuentran tanto el recorrido como la distancia.

|   | Desigualdad |
|---|-------------|
| a. Valores en que se encuentra el recorrido que realiza la hormiga                    |             |
| b. Valores en que se encuentra la distancia que hay entre la hormiga y el hormiguero. |             |

10. En el siguiente cuadro, escribe el valor mínimo y valor máximo que tendrían tanto el recorrido como la distancia. Argumente cómo obtuvo estos valores.

|   | Valor mínimo | Valor máximo | Argumentación |
|---|--------------|--------------|---------------|
| a. Recorrido que realiza la hormiga                   |              |              |               |
| b. Distancia que hay entre el hormiguero y la hormiga |              |              |               |

## 8.2 Actividad didáctica 2



Nombre: \_\_\_\_\_

### Actividad No. 2: Recorrido de la hormiga sobre el cuadrado<sup>1</sup>

En una situación hipotética: Una hormiga sale de su hormiguero, el cual está en un punto en un vértice de un cuadrado. Si anda, lo hace sólo por el perímetro de este cuadrado sin retroceder.

#### Instrucción:

En una hoja tamaño carta, realice las dobleces necesarias del papel para obtener un cuadrado. Con ayuda de tijeras corte por alguna marca para disponer del cuadrado.

1. i. De qué manera puede comprobar que la figura obtenida es un cuadrado? Argumente su respuesta.
  
2. En el perímetro del cuadrado obtenido:
  - i. Etiquete los vértices del cuadrado como  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  y  $H_4$ . El punto  $H_1$  es dónde se sitúa al hormiguero.
  - ii. Divida cada lado del cuadrado en cuatro partes iguales y etiquete con  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  los puntos de división entre  $H_1$  y  $H_2$ , con  $B_1$ ,  $B_2$  y  $B_3$  los puntos entre  $H_2$  y  $H_3$ , con  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  los puntos entre  $H_3$  y  $H_4$  y con  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$  los puntos entre  $H_4$  y  $H_1$ .  
Nota: Todos los puntos  $A_1$ ,  $A_2$ , ...,  $D_3$  y los vértices son puntos por donde pasa la hormiga dentro de la ruta establecida. No olvide que la hormiga no retrocede.
  - iii. Con lápiz de color azul, marque la distancia que hay del punto  $B_3$  al hormiguero ( $H_1$ ).  
iv. Con lápiz de color rojo, marque el recorrido de la hormiga desde el hormiguero  $H_1$  al punto  $B_3$ 
    - a. Argumente si la distancia del punto  $A_3$  al hormiguero  $H_1$  es igual, o no, a la distancia que recorre de la hormiga entre esos dos puntos.
  
    - b. Argumente si la distancia del punto  $B_3$  al hormiguero  $H_1$  es igual, o no, a la distancia que recorre de la hormiga entre esos dos puntos.

<sup>1</sup>Actividad diseñada a partir de la actividad didáctica experimentada en Delgado y Martínez (2023)

- c. Argumente si la distancia del punto C<sub>1</sub> al hormiguero H<sub>1</sub> es igual, o no, a la distancia que recorre de la hormiga entre esos dos puntos.
  
  
  
  
  
- d. Argumente si la distancia del punto D<sub>1</sub> al hormiguero H<sub>1</sub> es igual, o no, a la distancia que recorre de la hormiga entre esos dos puntos.
  
  
  
  
  
- e. Realice las medidas en centímetros necesarias para completar la Tabla 1

| Puntos seleccionados          | Medida del recorrido de la hormiga (centímetros) | Distancia entre los puntos (centímetros) |  |
|-------------------------------|--|--|--|
| H <sub>1</sub> A <sub>1</sub> |  |  |  |
| H <sub>1</sub> A <sub>2</sub> |  |  |  |
| H <sub>1</sub> A <sub>3</sub> |  |  |  |
| H <sub>1</sub> B <sub>1</sub> |  |  |  |
| H <sub>1</sub> B <sub>2</sub> |  |  |  |
| H <sub>1</sub> B <sub>3</sub> |  |  |  |
| H <sub>1</sub> C <sub>1</sub> |  |  |  |
| H <sub>1</sub> C <sub>2</sub> |  |  |  |
| H <sub>1</sub> C <sub>3</sub> |  |  |  |
| H <sub>1</sub> D <sub>1</sub> |  |  |  |
| H <sub>1</sub> D <sub>2</sub> |  |  |  |
| H <sub>1</sub> D <sub>3</sub> |  |  |  |

Tabla No. 1

- 3. Escriba la información de la Tabla No. 1 como pares ordenados (parejas ordenadas) en la columna vacía de la tabla.
- 4. Solicita a su maestra una hoja cuadriculada, y represente estos pares en un plano cartesiano.

### 8.3 Actividad didáctica 3



Nombre: \_\_\_\_\_

**Actividad No. 3: Relación funcional en el contexto del recorrido de la hormiga sobre el cuadrado<sup>1</sup>**

Continuando con el trabajo que inició en la actividad No. 2 y haciendo uso de los datos tomados en la Tabla No. 1, responda a lo siguiente:

- Asigne una etiqueta o literal (letra) para especificar la medida del recorrido de la hormiga y otra literal para especificar la distancia entre los puntos. Esta letra o etiqueta es la variable que se va a utilizar en las siguientes preguntas cuando se haga referencia al recorrido y a la distancia.

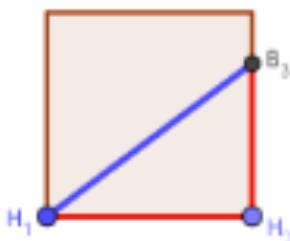
| Nombre  | Etiqueta o literal asignada |
|---|-----------------------------|
| Recorrido de la hormiga   |                             |
| Distancia entre los puntos (hormiguero y punto donde se encuentra la hormiga) |                             |

- Analice el desplazamiento de la hormiga en el **primer lado del cuadrado**:

- Entre qué valores se encuentra el recorrido de la hormiga en este primer lado del cuadrado.
- Utilice una desigualdad y la literal asignada al recorrido para expresar entre qué valores se encuentra el recorrido de la hormiga en este primer lado del cuadrado.
- Entre qué valores se encuentra la distancia que está la hormiga del hormiguero.
- Utilice una desigualdad y la literal asignada a la distancia para expresar entre qué valores se encuentra la distancia que está la hormiga del hormiguero, en este primer lado del cuadrado.
- Utilizando las literales asignadas tanto al recorrido como a la distancia, escriba la expresión algebraica de la relación funcional distancia en términos del recorrido.

<sup>1</sup>Actividad diseñada a partir de la actividad didáctica experimentada en Delgado y Martínez (2023).

3. Analice el recorrido de la hormiga en el **segundo lado del cuadrado**:



- Entre qué valores se encuentra el recorrido de la hormiga en este segundo lado del cuadrado
- Utilice una desigualdad y la literal asignada al recorrido para expresar entre qué valores se encuentra el recorrido de la hormiga en este segundo lado del cuadrado.
- Entre qué valores se encuentra la distancia que está la hormiga del hormiguero.
- Utilice una desigualdad y la literal asignada a la distancia para expresar entre qué valores se encuentra la distancia que está la hormiga del hormiguero, en este segundo lado del cuadrado.
- Utilizando las literales asignadas tanto al recorrido como a la distancia, escriba la expresión algebraica de la relación funcional distancia en términos del recorrido para este segundo lado del cuadrado.
- Utilizando la expresión algebraica proporcionada en el inciso anterior, evalúe si con el recorrido del punto H<sub>1</sub>:B<sub>3</sub> obtiene la misma distancia que colocó en la Tabla No. 1.



4. Analice el recorrido de la hormiga en el **tercer lado del cuadrado**

a. Complete la siguiente tabla.

|   |  |
|---|--|
| Desigualdad que expresa entre qué valores se encuentra el recorrido de la hormiga en el tercer lado del cuadrado.                       |  |
| Desigualdad que expresa entre qué valores se encuentra la distancia que está la hormiga del hormiguero, en el tercer lado del cuadrado. |  |
| Expresión algebraica de la relación funcional distancia en términos del recorrido para este tercer lado del cuadrado.                   |  |

b. Utilizando la expresión algebraica proporcionada en la última fila de la tabla, evalúe si con el recorrido del  $H_3C_3$ , obtiene la misma distancia que colocó en la Tabla No. 1

5. Analice el recorrido de la hormiga en el **cuarto lado del cuadrado**

a. Complete la siguiente tabla.

|   |  |
|---|--|
| Desigualdad que expresa entre qué valores se encuentra el recorrido de la hormiga en el cuarto lado del cuadrado.                       |  |
| Desigualdad que expresa entre qué valores se encuentra la distancia que está la hormiga del hormiguero, en el cuarto lado del cuadrado. |  |
| Expresión algebraica de la relación funcional distancia en términos del recorrido para este cuarto lado del cuadrado.                   |  |

b. Utilizando la expresión algebraica proporcionada en la última fila de la tabla, evalúe si con el recorrido del  $H_4D_4$ , obtiene la misma distancia que colocó en la Tabla No. 1

6. Solicite a su maestra una hoja cuadriculada. Utilice las expresiones algebraicas obtenidas en cada uno de los lados del cuadrado, para realizar la representación gráfica de la relación funcional de la distancia en términos del recorrido.

## 8.4 Actividad didáctica 4



**UACM**  
Universidad Autónoma  
de la Ciudad de México  
Hacia humanismo al avante



PROYECTO  
ENSEÑANZA DEL  
CÁLCULO

Nombre: \_\_\_\_\_

### Actividad No. 4: Recorrido de la hormiga sobre el rectángulo<sup>1</sup>

En una situación hipotética: Una hormiga sale de su hormiguero, el cual está en un punto en un vértice de un rectángulo. Si anda, lo hace sólo por el perímetro de este rectángulo sin retroceder.

- Dibuje un rectángulo de 6 y 8 centímetros de longitud de sus lados, en el siguiente espacio.

- ¿De qué manera puede comprobar que la figura dibujada es un rectángulo? Argumente su respuesta.

- En el perímetro del rectángulo:

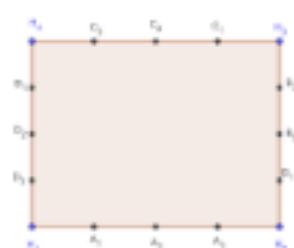


Figura No. 1

- Etiquete los vértices del rectángulo, de manera consecutiva, como  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  y  $H_4$ . El punto  $H_1$  es donde se sitúa al hormiguero y corresponde al vértice de la izquierda de uno de los lados más largo (ver Figura No. 1)

- Divida cada lado del rectángulo en cuatro partes iguales y etiquete con  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  los puntos de división entre  $H_1$  y  $H_2$ , luego de manera consecutiva, entre  $H_2$  y  $H_3$ , etiquételos con  $B_1$ ,  $B_2$  y  $B_3$ . Continúe etiquetando los puntos entre  $H_3$  y  $H_4$ , con  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ . Finalmente, etiquete los puntos entre  $H_4$  y  $H_1$  con  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$ .

Nota: Todos los puntos  $A_1$ ,  $A_2$ , ...,  $D_3$  y los vértices son puntos por donde pasa la hormiga dentro de la ruta establecida. No olvide que la hormiga no retrocede.

<sup>1</sup>Actividad diseñada a partir de la actividad didáctica experimentada en Delgado y Martínez (2023)

- iii. Con lápiz de color azul, marque la distancia que hay del punto  $B_i$  al hormiguero ( $H_i$ ).
- iv. Con lápiz de color rojo, marque el recorrido de la hormiga desde el hormiguero  $H_i$  al punto  $B_i$ .
- a. Argumente si la distancia del punto  $A_i$ , al hormiguero  $H_i$  es igual, o no, a la medida del recorrido de la hormiga entre esos dos puntos.
- b. Argumente si la distancia del punto  $B_i$ , al hormiguero  $H_i$  es igual, o no, a la medida del recorrido de la hormiga entre esos dos puntos.
- c. Argumente si la distancia del punto  $C_i$ , al hormiguero  $H_i$  es igual, o no, a la medida del recorrido de la hormiga entre esos dos puntos.
- d. Argumente si la distancia del punto  $D_i$ , al hormiguero  $H_i$  es igual, o no, a la medida del recorrido de la hormiga entre esos dos puntos.
- e. Realice las medidas en centímetros necesarias para completar la Tabla 1

| Puntos seleccionados | Medida del recorrido de la hormiga (centímetros) | Distancia entre los puntos (centímetros) |  |
|----------------------|--|--|--|
| $H_iA_1$             |  |  |  |
| $H_iA_2$             |  |  |  |
| $H_iA_3$             |  |  |  |
| $H_iB_1$             |  |  |  |
| $H_iB_2$             |  |  |  |
| $H_iB_3$             |  |  |  |
| $H_iC_1$             |  |  |  |
| $H_iC_2$             |  |  |  |
| $H_iC_3$             |  |  |  |
| $H_iD_1$             |  |  |  |
| $H_iD_2$             |  |  |  |
| $H_iD_3$             |  |  |  |

Tabla No. 1



4. Escriba la información de la Tabla No. 1 como pares ordenados (parejas ordenadas) en la columna vacía de la tabla.
5. Asigne una etiqueta o literal (letra) para especificar la medida del recorrido de la hormiga y otra literal para especificar la distancia entre los puntos. Esta letra o etiqueta es la variable que se va a utilizar en las siguientes preguntas cuando se haga referencia al recorrido y a la distancia.

| Nombre  | Etiqueta o literal asignada |
|---|-----------------------------|
| Recorrido de la hormiga   |                             |
| Distancia entre los puntos (hormiguero y punto donde se encuentra la hormiga) |                             |

6. Analice el desplazamiento de la hormiga **empezando por el lado más largo del rectángulo**:
  - a. Entre qué valores se encuentra el recorrido de la hormiga en este lado del rectángulo.
  - b. Utilice una desigualdad y la literal asignada al recorrido para expresar entre qué valores se encuentra el recorrido de la hormiga en este lado del rectángulo.
  - c. Entre qué valores se encuentra la distancia que está la hormiga del hormiguero.
  - d. Utilice una desigualdad y la literal asignada a la distancia para expresar entre qué valores se encuentra la distancia que está la hormiga del hormiguero, en este lado del rectángulo.
  - e. Utilizando las literales asignadas tanto al recorrido como a la distancia, escriba la expresión algebraica de la relación funcional distancia en términos del recorrido.
7. Analice el recorrido de la hormiga en el **segundo lado del rectángulo (el más corto anexo)**:
  - a. Entre qué valores se encuentra el recorrido de la hormiga en este segundo lado del rectángulo.
  - b. Utilice una desigualdad y la literal asignada al recorrido para expresar entre qué valores se encuentra el recorrido de la hormiga en este segundo lado del rectángulo.

- c. Entre qué valores se encuentra la distancia que está la hormiga del hormiguero en este segundo lado del rectángulo.
- d. Utilice una desigualdad y la literal asignada a la distancia para expresar entre qué valores se encuentra la distancia que está la hormiga del hormiguero, en este segundo lado del rectángulo.
- e. Utilizando las literales asignadas tanto al recorrido como a la distancia, escriba la expresión algebraica de la relación funcional distancia en términos del recorrido para este segundo lado del rectángulo.
- f. Utilizando la expresión algebraica proporcionada en el inciso anterior, evalúe si con el recorrido del punto H<sub>1</sub>B<sub>1</sub> obtiene la misma distancia que colocó en la Tabla No. 1.

8. Analice el recorrido de la hormiga en el **tercer lado del rectángulo (el otro largo)**

- a. Complete la siguiente tabla.

|   |  |
|---|--|
| Desigualdad que expresa entre qué valores se encuentra el recorrido de la hormiga en el tercer lado del rectángulo.                       |  |
| Desigualdad que expresa entre qué valores se encuentra la distancia que está la hormiga del hormiguero, en el tercer lado del rectángulo. |  |
| Expresión algebraica de la relación funcional distancia en términos del recorrido para este tercer lado del rectángulo.                   |  |

- b. Utilizando la expresión algebraica proporcionada en la última fila de la tabla, evalúe si con el recorrido del H<sub>1</sub>C<sub>1</sub>, obtiene la misma distancia que colocó en la Tabla No. 1



9. Analice el recorrido de la hormiga en el **cuarto lado del rectángulo (el otro corto)**  
a. Complete la siguiente tabla.

|   |  |
|---|--|
| Desigualdad que expresa entre qué valores se encuentra el recorrido de la hormiga en el cuarto lado del rectángulo.                       |  |
| Desigualdad que expresa entre qué valores se encuentra la distancia que está la hormiga del hormiguero, en el cuarto lado del rectángulo. |  |
| Expresión algebraica de la relación funcional distancia en términos del recorrido para este cuarto lado del rectángulo.                   |  |

- b. Utilizando la expresión algebraica proporcionada en la última fila de la tabla, evalúe si con el recorrido del  $H_1D_1$ , obtiene la misma distancia que colocó en la Tabla No. 1
10. Utilice las expresiones algebraicas obtenidas en cada uno de los lados del rectángulo, para realizar, con ayuda de GeoGebra, la representación gráfica de la relación funcional de la distancia en términos del recorrido. Imprima la representación gráfica y anexela a este documento.  
Nota: Envíe el archivo de GeoGebra al correo institucional [rosa.paez@uacm.edu.mx](mailto:rosa.paez@uacm.edu.mx)
11. Escriba la expresión algebraica que relaciona recorrido y distancia, cuando la hormiga realiza dos vueltas al contorno del rectángulo.
12. Con ayuda de GeoGebra, realice la representación gráfica de la relación funcional de la distancia en términos del recorrido, cuando la hormiga realiza dos vueltas al contorno del rectángulo. Imprima la representación gráfica y anexela a este documento.  
Nota: Envíe el archivo de GeoGebra al correo institucional [rosa.paez@uacm.edu.mx](mailto:rosa.paez@uacm.edu.mx)
13. Argumente la diferencia que habría si la hormiga hubiese iniciado su andar empezando por el lado corto anexo al punto de partida (Hormiguero  $H_1$ )
14. Escriba la expresión algebraica que relaciona recorrido y distancia, cuando la hormiga realiza una vuelta al contorno del rectángulo, iniciando por el lado corto anexo al punto de partida (Hormiguero  $H_1$ )
15. Con ayuda de GeoGebra, realice la representación gráfica de la relación funcional de la distancia en términos del recorrido, cuando la hormiga realiza una vuelta al contorno del rectángulo, iniciando por el lado corto anexo al punto de partida (Hormiguero  $H_1$ ). Imprima la representación gráfica y anexela a este documento.  
Nota: Envíe el archivo de GeoGebra al correo institucional [rosa.paez@uacm.edu.mx](mailto:rosa.paez@uacm.edu.mx)