

# Un valor añadido en realización de los Trabajos de Fin de Grado

## An added value in the completion of Final Degree Projects

M. Delgado Pineda  
[miguel@mat.uned.es](mailto:miguel@mat.uned.es)

Presentado en e-math 2024,



**Resumen.** La formación inicial de un matemático puede ser enfocada de distintas formas según el objetivo profesional que pueda tener ese matemático, es decir según diversas trayectorias de aprendizaje matemático. Se puede presumir la ocupación futura de esa persona, pero no se puede saber con certeza, puesto que la realidad laboral y la realidad académica no siempre es predecible. Así pues, podemos y debemos suponer que será, esencialmente, algo relacionado con problemas, más o menos matemáticos. Desde este punto de vista, la formación final debe tener en cuenta que hay que facilitar al estudiante cierto aprendizaje tipo profesional en relación a la forma de afrontar esos futuros problemas.

Este trabajo presentamos la trayectoria del trabajo, estudio y análisis realizado por un estudiante dentro del marco de la Optimización Global. Este trabajo fue galardonado con la posibilidad de una publicación en una revista de innovación matemática de UNED como elemento post-motivador para el estudiante.

También, presentamos una forma de enfocar el final del grado de un estudiante y el inicio de su camino profesional de la enseñanza. Este se centra en una de las líneas de trabajo de la asignatura Trabajo de Fin de Grado del grado de Matemáticas en la rama de Aplicaciones de las Matemáticas.

**Palabras clave:** Matemáticas. Optimización global. Trabajo fin de grado, Innovación educativa. Comunicación matemática.

**Abstract.** The initial training of a mathematician can be approached in different ways according to the professional objective that mathematician may have, i.e. according to different mathematical learning trajectories. The future occupation of that person can be presumed, but cannot be known with certainty, since the reality of work and academic reality is not always predictable. Thus, we can and should assume that it will be, essentially, something related to problems, more or less mathematical. From this point of view, the final training must take into account that the student must be provided with a certain professional type of learning in relation to the way of facing these future problems.

This paper presents the trajectory of the work, study and analysis carried out by a student within the framework of Global Optimization. This work was awarded with the possibility of a publication in a mathematical innovation journal of UNED as a post-motivational element for the student.

Also, we present a way of approaching the end of a student's degree and the beginning of their professional teaching path. This focuses on one of the lines of work of the subject End of Degree Project of the Mathematics degree in the branch of Applications of Mathematics.

**Keywords:** Mathematics. Global optimization. Final thesis, Educational innovation. Mathematical communication.

## **Introducción**

A la hora de exponer algo de lo que uno hace a nivel académico con sus estudiantes ante compañeros de otras universidades nacionales e internacionales, uno se encuentra con el horizonte de que casi todo está descubierto o desarrollado, y que cada cosa se ha contado múltiples veces en distintos foros, donde se pueden apreciar distintos matices, distintas susceptibilidades y distintos resultados. Así pues, no parece que se pueda encontrar un nuevo paradigma educativo de nivel universitario alto y que se pueda hacer innovación educativa que sean compatibles con el nivel científico de los estudiantes que están en el final de su ciclo inicial de formación. Es decir, esos estudiantes que están a punto de ser egresados.

En esta situación nos encontramos en el 16th International Workshop in Mathematics e\_Learning celebrado en noviembre del año 2024 en la Universidade Aberta de Lisboa.

El departamento de Matemáticas Fundamentales de la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED) es uno de los departamentos encargado de que este evento se produzca con continuidad año tras año. Es decir, forma parte de los miembros fundadores, destacando a Dr. Costa González (Antonio) de ser el representante principal en ese plantel. Otros, como el autor, colaboramos intercambiando nuestras experiencias docentes e investigadoras. De esta forma este evento se mantiene activo rotando las sedes de celebración entre Lisboa Madrid y Barcelona.

En este trabajo se incorpora aquello que se presentó en la última cota de ese evento, haciendo referencia a la labor docente-discente de la última asignatura del Grado de Matemáticas de UNED: El Trabajo de Fin de Grado.

*“El Trabajo Fin de Grado (TFG) se presenta como un espacio y un tiempo propicio para que el alumnado, al final de su proceso inicial de formación, vuelque y demuestre su capacitación como profesional.”* (Rodríguez, R. 2011).

Este mismo autor indica que “*el trabajo de fin de Grado ... deberá realizarse en la fase final del plan de estudios y estar orientado a la evaluación de competencias asociadas al título*”, pero no se presentó disposición alguna sobre el proceso de elaboración y evaluación en ese momento. Por lo tanto, se creó un objeto académico sin la suficiente concreción curricular y, por lo tanto, la regulación del TFG quedó al arbitrio de cada universidad.

Con estas perspectivas, se puede buscar en Google Académico la expresión “*Trabajo de fin de grado en Matemáticas*” y la respuesta es un montón de propuestas donde el tema central de cada propuesta es una parte conocida de las distintas áreas matemáticas.

### **La cuestión Inicial**

Como hemos intentado inducir con el último párrafo, casi todo es conocido de alguna forma u otra, y más cuando se trata de la formación de un estudiante. Así, pues, permítanme presentar este trabajo tal y como se presentó en el evento indicado, sin tener en cuenta ciertas medidas que los sistemas pretenden asegurarse con la realización de diversas labores docentes.

¿Qué es lo peor que puede tener una película policiaca al estilo de las novelas de Agata Christie?

What's the worst thing about a crime movie in the style of Agatha Christie's novels?



Quizás la respuesta a esta pregunta sea: Que, desde el principio, se tenga consciencia de quien es el “asesino”... (en general, es el mayordomo).

That, from the beginning, there is an awareness of who the “murderer” is... the butler.

Podríamos pensar que el tener constancia desde el inicio de quien es culpable le quita interés a una obra literaria. Sin embargo, algunas veces, la gracia está en cómo se demuestra que es determinado personaje es el culpable.

Sometimes, though, the fun lies in how a certain character is shown to be the culprit.

Así pues, veamos algunas pistas que nos induzcan a pensar en algo similar, pero a nivel matemático.      Some hints of...

Algunas pistas las podemos encontrar en las dos siguientes figuras 1 y 2 que son pruebas inamovibles de lo que sucedió. En la figura 1 se muestra el enlace a un artículo de título *Optimización Global* cuyo autor es Raúl Medrano Millán; un estudiante de Trabajo de Fin de Grado del curso 2023-24 del Grado de Matemáticas de UNED.

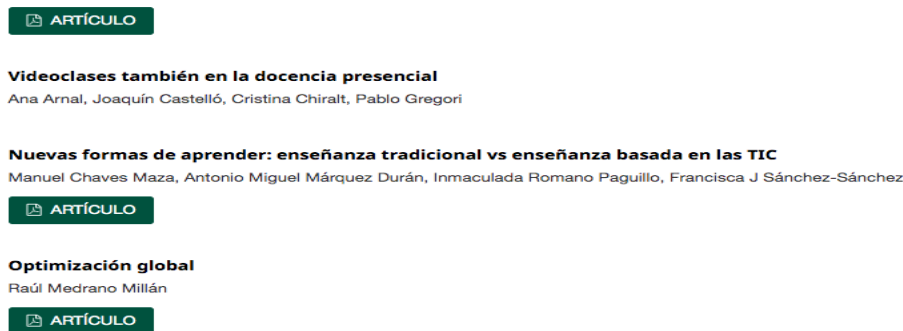


Figura 1: Parte del índice de una revista.

En la figura 2 se aprecia que dicho artículo está en el índice del número 7 de una revista en dedicada a la Innovación en Matemáticas que se edita en UNED y de cuyo director es el autor.



Figura 2: Revista de innovación matemática.

La primera pregunta consiste en saber por qué un estudiante tiene un artículo en esa revista para matemáticos innovadores. Así pues, ya sabemos el crimen (una publicación) y quién es el asesino (un estudiante de TFG), pero no sabemos el método seguido para efectuar su crimen (la publicación). En la figura 3 observamos un resumen del asunto en cuestión, para el asunto en el que nos centramos.

# Optimización global

Raúl Medrano Millán<sup>1\*</sup>

Presentado en eXIDO 23

## Resumen

El cálculo del valor mínimo o máximo global de una función puede hallarse de diferentes maneras. Por una parte, es posible hacer un estudio de la función para obtener este dato mediante métodos matemáticos. Otra forma de hallar este valor es mediante los diferentes algoritmos desarrollados con este propósito. En este trabajo se van a presentar, tanto el estudio de una función como algunos de los diferentes tipos de algoritmos existentes.

## Palabras clave

optimización global; mínimo; algoritmo cúbico; algoritmo de evolución diferencial

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias, UNED, Madrid

\*rmedrano1@alumno.uned.es

Figura 3: Resume del artículo.

Su actuación fue ...

His performance was ...

En su labor delictiva trató de ocultar adecuadamente su crimen indicando todo un índice de actuaciones como puede verse en la figura 4.

Índice	
Introducción	1
1 Estudio de la función	2
1.1 Estudio en todo su dominio	3
1.2 Estudio de la función en una caja cerrada	4
2 Algoritmo cúbico (Cubic Algorithm)	5
2.1 Descripción del algoritmo	5
2.2 Resultados obtenidos para la función test	6
3 Algoritmo de evolución diferencial (Differential Evolution Algorithm)	7
3.1 Descripción del algoritmo	7
3.2 Resultados obtenidos para la función test	8
4 Conclusiones	9
Referencias	9

Figura 4: Índice del artículo

Además, buscó una tapadera en la profundidad de una extensa bibliografía como la que se muestra en la figura 5.

Referencias	
[1]	Jerrold E. Marsden and Anthony J. Tromba. <i>Cálculo Vectorial</i> . Pearson Educación, Madrid, 5ª edition, 2004.
[2]	Efim A. Galperin. The cubic algorithm. <i>Journal of Mathematical Analysis and Applications</i> 112, 635-640, 1982.
[3]	Miguel Delgado Pineda. Optimización global de funciones continuas no diferenciables. <i>100cias@uned, N°1 (Nueva época)</i> , 2008.
[4]	Rainer Storn and Kenneth Price. Differential evolution - a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous. <i>Journal of Global Optimization</i> 11, 341-359, 1997.
[5]	Xin-She Yang. <i>Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms</i> . Luniver Press, United Kingdom, 2ª edition, 2010.
[6]	Swagatam Das and Ponnuthurai Nagaratnam Suganthan. Differential evolution: A survey of the state-of-art. <i>IEEE Transactions on Evolutionary Computation</i> . Vol 15, N° 1. February 2011, 2011.
[7]	E. A. Galperin. The alpha algorithm and the application of the cubic algorithm in case of unknown lipschitz constant. <i>Computers Math. Applic.</i> Vol 25, No 10/11, pp, 71-78, 1993.
[8]	E. A. Galperin. The fast cubic algorithm. <i>Computers Math. Applic.</i> Vol 25, No 10/11, pp, 147-160, 1993.
[9]	Zhongbo Hu, Qinghua Su, Xianshan Yang, and Zenggang Xiong. Not guaranteeing convergence of differential evolution on a class of multimodal functions. <i>Applied Soft Computing</i> . January 2016, 2016.

Figura 5: Bibliografía del artículo

## Las pruebas periciales y razones para la culpabilidad

Cabe destacar que esta persona hizo un uso indiscriminado del Algoritmo Cúbico (Cubic Algorithm sobre Optimización Global) del matemático Dr. Efim A. Galperim. Así pues, se descubre que su motivo fue minimizar la función de dos variables restringida a una caja cuadrada de lados paralelos a los ejes.

Their motive was to minimize ...

$$f(x,y) = 1 + |(x^2 + y^2)^3 - 3x^2 - 3y^2| \quad [-1, 1] \times [-1, 1]$$

Con este caso el estudiante buscaba los puntos de la caja donde se alcanzaban los mínimos de la función, ya que era una función continua en un compacto. Para ello, aplicó el algoritmo varias veces para obtener una aproximación del conjunto de minimizadores, en función del número máximo de iteraciones del dicho algoritmo. Esto puede observarse en las distintas cajas de las figuras 6 y 7.

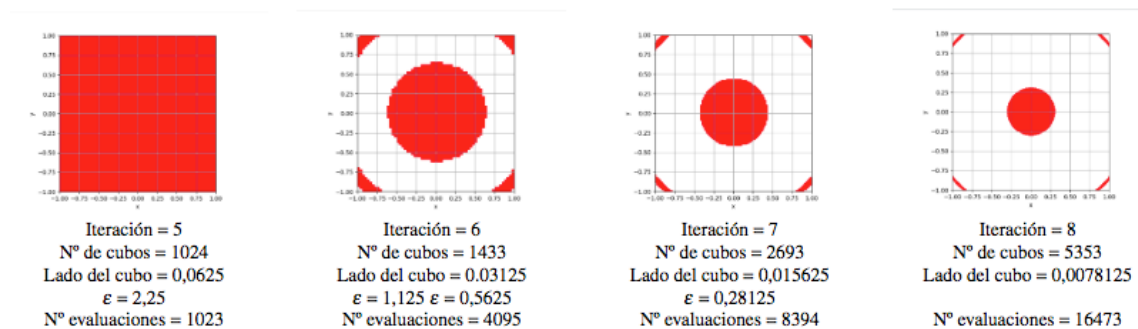


Figura 6: Primeras aproximaciones del conjunto de minimizadores.

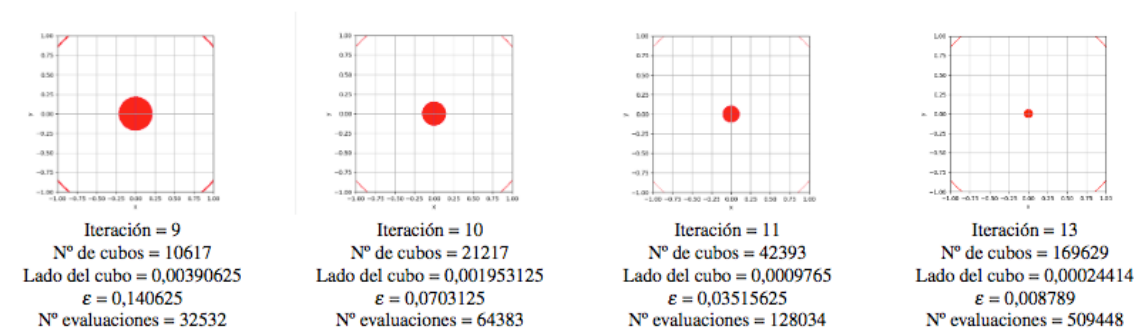


Figura 7: Aproximaciones más finas del conjunto de minimizadores.

Debemos destacar varias razones por las cuales podemos considerar a dicho individuo culpable de ... .. Aprender. Reasons for his guilt... .. Learn.

Si nos fijamos en la actuación de este estudiante, podemos comprobar que se cumple con todos los pasos de la versión original de la Taxonomía de Benjamín Bloom, (la introducida en el año 1956) que entendemos preferible a la que se reformuló en el año 2001. Sin duda, nos parece mejor aplicar la inicial.

This character meets all the steps of the original version of Bloom's Taxonomy. Esta taxonomía define de forma sistemática una serie de seis categorías o un principio de seis clases, o agrupaciones, no necesariamente disjuntas. Dichas categorías son reconocibles mediante los siguientes nombres:

**Categoría 1ª: Conocimiento / Knowledge.**

Aquí se debe destacar que la labor realizada por el estudiante permite al profesor reconocer que él estudiante ha reconocido y ha recordado aquellos datos e informaciones previamente aprendidas. Es decir, reconoció y recordó la información estudiada a lo largo del grado.

**Categoría 2ª: Comprensión / Comprehension.**

El profesor pudo comprobar que el estudiante mostró cierta habilidad para entender y explicar las ideas y los conceptos relacionados con el tema en el que se enmarcaba su memoria.

**Categoría 3ª: Aplicación / Application.**

No cabe la menor duda que dicho estudiante hizo uso de la información aportada en el contexto de unas situaciones nuevas para él, ya que no había estudiado el tema con anterioridad. Algunas situaciones relativas a la optimización global ya que éstas se centraba en las tareas en esa parte concreta.

**Categoría 4ª: Análisis / Analysis.**

Si bien, el estudiante fue inducido a intentar ver la información de forma secuencial, no cabe la menor duda que éste descompuso en partes la información aportada y pudo entender cada una de esas partes para poder entender su estructura de la situación general.

**Categoría 5ª: Síntesis / Synthesis.**

El estudiante realizó una combinación de los distintos elementos que debió observar para poder formar una memoria nueva proponiendo una solución creativa.

## **Categoría 6ª: Evaluación / Evaluation.**

Las consideraciones, respecto al producto deseado, hicieron que el estudiante eligiera, a su juicio y valoración, la información que incluía en la memoria. Por ello, tuvo que evaluar la necesidad de expresar las ideas generales junto con las suyas basándose en criterios específicos, más o menos, objetivos. Esa estrategia fomento la autoevaluación de sus conclusiones y decisiones.

### **Una asignatura especial: Trabajo de Fin de Grado**

El TFG viene a ser una generalización a todos los grados del denominado Proyecto de Fin de Carrera que antes del cambio de los estudios de licenciaturas a grados, se desarrollaba en las escuelas de ingeniería como paso necesario para que el estudiante se graduara en la ingeniería correspondiente. No se puede confundir el TFG con el proyecto de tesina que se desarrollaba en las facultades de Ciencias o de Matemáticas.

Al amparo a la legislación vigente en el marco de la Enseñanza Universitaria, el TFG se considera como una asignatura del Grado de Matemáticas en UNED. Se puede decir, salvo excepciones, que es la última asignatura cursada por cualquier estudiante antes de terminar el Grado de Matemáticas. Quizás tengamos que hacernos varias preguntas con el fin de focalizar la razón y el sentido que tiene esta asignatura en el grado de UNED en el sistema actual.

- Formulamos las preguntas más importantes, en relación al marco académico de referencia; UNED. Tenemos:

**¿Qué?** La asignatura TFG tiene la consideración académica de una asignatura anual obligatoria a la que le corresponden una carga de 15 ECTS. Cabe destacar que, en general, las asignaturas restantes con más créditos tienen una carga de sólo seis créditos.

**¿Cómo?** La labor docente-discente se rige por un amplio abanico de contratos didácticos ya que son muchos los profesores en la docencia de esta asignatura y muchos los estudiantes con distintos intereses cada uno de ellos. El estudiante debe realizar un trabajo-estudio de forma, más o menos, autónoma que se concluye con la redacción de una memoria y la defensa pública de dicha memoria. El profesor realiza la labor de asesorar al estudiante en su búsqueda como un director de trabajo o un tutor del discente. Así pues, cada profesor y cada estudiante se ciñen a un contrato didáctico particular durante todo el curso.



**¿Cuándo?** Ya hemos dicho que el TFG es la última asignatura del grado, así pues, el momento académico es el que corresponde al 4º curso del Grado en Matemáticas. Se produce prácticamente una vez que el estudiante es casi un profesional de las Matemáticas. Quizás el TFG sea el inicio de una línea profesional, aunque no la haya definido explícitamente.

- Algunas preguntas sobre marco de referencia; Matemáticas, UNED.

**¿Qué?** Esta asignatura está definida en el grado para que el estudiante muestre todas aquellas competencias, destrezas y habilidades que ha ido adquiriendo en las distintas asignaturas del título del grado. El TFG es un trabajo autónomo que cada estudiante realizará bajo la orientación de un tutor/a, quien actuará como dinamizador y facilitador del proceso de aprendizaje. El TFG es un trabajo de carácter general para evaluar la capacidad del estudiante para aplicar sus conocimientos, y conviene no confundirlo con un Trabajo de Fin de Máster (TFM) puesto que este implica una mayor exigencia ya que especializa en profundizar en un tema para desarrollar habilidades de investigación.

**¿Cómo?** La forma en la cual el estudiante muestra lo dicho sobre competencias, destrezas y habilidades es realizando de un trabajo académico original y autónomo. Con esto no se quiere decir que sea un trabajo de investigación desde el punto de vista académico, pero si debe ser un trabajo de investigación personal al coleccionar y poner en práctica lo que desconocía el estudiante sobre un cierto tema pactado con el director. Es decir, es una primera apuesta personal por un estudio autónomo sobre un tema y una primera defensa pública de lo estudiado. En esta defensa emerge el nivel de madurez para comunicar resultados analizados.

**¿Cuándo?** El estudiante dispone de un curso completo para hacer lo que se pide; un trabajo de reflexión y ensayo con la supervisión de un tutor o director académico.

**¿Por qué?** Esta forma de enfocar la asignatura de TFG permite comprobar la madurez matemática del estudiante al cual siempre se le ha recomendado una bibliografía para poder superar cada una de las asignaturas cursadas en UNED. En esta asignatura se apoya en bibliografía, pero sin el marco de establece un texto base para estudiar como en otra asignatura.

- Algunas preguntas relativas a las líneas de referencia; TFG, Matemáticas, UNED.

**¿Qué?** En este caso no restringimos a una de las líneas existente para TFG en el grado de Matemáticas. No focalizamos en las Aplicaciones de las Matemáticas, dentro de la cual

hay tres posibles profesores para apoyar al estudiante, formando las distintas parejas discente-docente.

**¿Cómo?** Una vez que el estudiante se matricula en esta asignatura hay todo un proceso de acceso a las líneas establecidas formando una secuencia ordenada según las calificaciones de las asignaturas. En la elección línea, resulta que no se tienen en cuenta las asignaturas cursadas, es decir, no importa tener cursadas unas asignaturas favorecedoras de una línea, es decir, esto no impide la elección en esta asignatura.

Una vez que un estudiante tiene asignada la línea de Aplicaciones de las Matemáticas, entonces se efectúa un sorteo para obtener un director supervisor. Es decir, alguno de los tres profesores de la línea.

**¿De qué?** En este caso nos restringimos a quienes les ha tocado por sorteo el profesor (autor), puesto que el tema que trata en esta situación es la Optimización Global.

- Algunas preguntas relativas El trabajo en a la línea Optimización Global; TFG, Matemáticas, UNED.

**¿Qué?** El estudiante debe realizar una memoria personal sobre el tema de Optimización Global, donde presentará algún proceso algorítmico en la resolución de una función real de variable vectorial real. Para esta memoria se le recomienda un máximo de 45 páginas, si bien, puede superar este número de páginas en función de la consideración de director. Esta memoria no se debe entender como una memoria de investigación, si no como una memoria de adquisición de recursos con la cual se muestra la madurez ante el estudio del estudiante.

En lo que respecta a la calificación final de la asignatura resulta que esta memoria constituye el 60% de la calificación.

**¿Cuándo?** Por otra parte, el estudiante defiende oralmente el contenido de las partes importantes de la memoria. De esta forma se valora la capacidad expositiva de sus razonamientos y la capacidad de convencer al oyente. Estas características sólo se evalúan en esta asignatura del grado.

La defensa se realiza por medios telemáticos ante un tribunal compuesto por dos profesores. Puede usarse una presentación de ordenador. Dado que la defensa es pública, cualquiera puede conectarse, aunque dicha defensa queda grabada y transcrita a texto.

La recomendación es que dicha defensa durante 25 o 30 minutos, aunque el tribunal puede permitir otra duración.

### **Algunas razones innovadoras por las cuales disponer de este tipo TFG**

Las razones que podemos destacar se basan en la experiencia acumulada de cursos anteriores en la línea de Optimización Global. Por una parte, reconocemos que admitir trabajos de este tipo favorece que el estudiante encauce desde el principio la asignatura. Para ello, se aplica una metodología que más adelante se precisará. La razón principal es que el profesor no le marca lo que tiene que buscar y estudiar, salvo algunas indicaciones oportunas. Es decir, la labor del profesor consiste en señalar qué debe buscar pero no le indica el material matemático donde debe buscar. En cierta medida, el profesor no deja de ser un expositor para transformarse en un regulador de la trayectoria que desee seguir el estudiante.

Es claro, que al estudiante le resulta más claro que le digan de donde debe extraer lo que debe estudiar y analizar. Sin embargo, se fomenta que el estudiante tenga libertad de decisión y se muestre más comprometido con su aprendizaje. Desde luego, no se le impone un modelo de memoria, por lo tanto, él debe al generar una memoria muy completa y práctica, en función de lo buscado para crearla.

Sin duda, la cantidad de trabajo personal del estudiante y del trabajo de control del directos es muy superior a lo estrictamente necesario, pero éste trabajo resulta muy gratificante, en tanto, que el estudiante debe buscar para hacer, en lugar de seguir el material que pudiera proponer el profesor.

Un elemento muy importante desde el punto de vista de un profesor consiste en entender que puede reiterarse este proceso con todos los estudiantes sin que haya problemas con repetición de memorias ni con problemas de plagio o copia. Es claro, que el profesor debe admitir que función deberá estudiar el estudiante y tiene el control del proceso.

Con esta forma de actuar, se produce un proceso de innovación docente sostenida en el tiempo. Es claro que se innova respecto al resto de asignaturas ya que el profesor abandona el rol usual de profesor para transformarse, realmente, un conductor de los aprendizajes del estudiante. Un conductor que deja toda la libertad de elección al estudiante. En cierta medida, aunque en la enseñanza a distancia, se sigue el método dialéctico de Platón o el método peripatético de Aristóteles donde los diálogos surgen de

las actuaciones en un foro o por correo electrónico, aunque cabe la posibilidad de hacer webconferencias.



Figura 8: El fresco La escuela de Atenas (Vaticano) y detalle de Platón y Aristóteles.

Sucede que con esta pequeña innovación del proceso de TFG se solventa la necesidad de establecer un tema de memoria de forma individualizada. Es decir, la variación de actividades no se agota con el tema básico de Optimización Global. En la práctica todas las memorias son diferentes y suelen, porque se puede, ser enfocadas de formas distintas. Lo mismo ocurre con otras muchas aplicaciones diversas centradas en la variación de la función a optimizar.

Por otro lado, al innovar de esta forma en la asignatura de TFG se erradican las sospechas de posibles copias y suplantaciones entre estudiantes. Es decir, aunque la temática marco es la misma, las actuaciones personales tienen una amplia variedad de estudios distintos. Como ejemplo, podemos suponer que en todos los libros editados para Análisis Matemático en una variable posee similares contenidos, pero seguramente éstos son tratados de formas distintas.

Sin duda, las memorias de cursos anteriores están a disposición de estudiante, incluidas la de otras universidades, para ser consciente de esto basta interrogar a Google Académico por proyecto de TFG en Matemáticas, véase la dirección Google 2024. Ahora bien, para cuando el estudiante se da cuenta esta documentación, suele ocurrir que ya tiene realizadas todas las búsquedas que necesita.

Con esta forma de disponer el desarrollo de la asignatura se tiene, en este sentido, un proceso de innovación discente de forma práctica, puesto que el estudiante tiene que hacer

frente a una serie de retos establecidos de forma secuencial. Quizás una analogía permita entender lo que decimos. Podemos hacer una analogía del proceso secuencial de estudio con la situación de realizar un viaje en auto desde una ciudad a otra bastante distantes. Para hacer ese viaje por carretera se suelen seguir una serie de indicadores situados en la vía. El viajero sabe de qué ciudad se está alejando y los carteles suelen indicar la ciudad más próxima a la que se va, El viaje consiste en seguir el camino de ciudades por las que hay que pasar para llegar a la ciudad meta. Sin duda el viaje se transforma en una secuencia de indicaciones que son estáticas, es decir, una señal no te acompaña en todo el trayecto, puesto que está fija en un determinado lugar.

### **Etapas para la construcción de la memoria del TFG**

Como se ha indicado al estudiante se le proponen seis etapas diferentes de forma secuencial, aunque no se describe una si no ha superado la anterior. Por lo tanto, no se puede entrar en una etapa si no se la ha aceptado su trabajo en la precedente, es decir, el estudiante debe entregar, en tiempo y forma, un informe de sus pesquisas con el fin de que el director le acepte lo expuesto en ese informe. Si lo que entrega no es aceptada por el director, entonces deber modificar el informe de manera oportuna según las indicaciones dadas para ser aceptado en el momento del rechazo. Así pues, el trabajo del estudiante consiste en seguir esas seis etapas:

1. Búsqueda del significado de la Optimización Global
2. Iniciación a la Optimización Global.
3. Acercamiento a los problemas con restricciones de caja.
4. Estudio del Algoritmo Cúbico (Cubic Algorithm).
5. Elección de tema; funciones objetivo de 2 o 3 variables reales.
6. Desarrollo de la memoria

*Respecto a la etapa primera con dos tareas obligatorias:*

Lo primero (*Búsqueda*) consiste en buscar dos libros en español que traten la Optimización Global y dos libros en inglés. El estudiante deberá indicar la dirección web o la editorial de los libros elegidos, y hacer un breve resumen (máximo una página) de dos de ellos y su relevancia en relación con el concepto buscado (optimización global).

Hasta que no se concluye esta etapa no se puede abordar la siguiente. Se dispone de un plazo de dos semanas para finaliza esta tarea. En ese tiempo es estudiante debe redactar y enviar al director un resumen de lo que se dice respecto al tema.

La segunda tarea consiste en buscar diez artículos (en español o inglés) que traten el tema de la Optimización Global. Nuevamente el estudiante deberá indicar las direcciones web o revista de los artículos y hacer un breve resumen de los dos artículos que más le llamen la atención. Para esta tarea, el estudiante tiene tres semanas para completar el trabajo y enviar un informe similar al de la primera tarea.

En este caso el estudiante ya tiene la referencia de cómo debe hacer el informe puesto que sabe cómo lo quiere el director dada la experiencia de la primera tarea.

Suele ser habitual que el estudiante pregunte la forma en la cual quiere el director que le entregue la memoria. Con estos artículos el profesor pretende establecer un marco real de referencia al estudiante puesto que estos artículos le deben servir para establecer la forma de redactar su memoria. Ante la pregunta del estudiante, la respuesta del director es clara y concisa: ¿Cuál de los dos artículos comentados le ha gustado más? Aplique la misma estructura de artículo a su memoria.

También se persigue que esos artículos y libros pueden formar parte de la bibliografía si es que son los utilizados de verdad. La desaparición de esta bibliografía dice mucho de lo que usó el estudiante.

*Respecto a la etapa segunda con cuatro problemas obligatorios:*

La segunda etapa (*Iniciación*) se suele solapar en el tiempo con la primera etapa. En esta etapa se plantean problemas de optimización de funciones no diferenciables en todo su dominio. Esto se hace de una forma escalonada como trabajos numerados del 1 al 4.

Se mantiene el requisito de no admitir un trabajo hasta que no se ha admitido el anterior. Con esto se le da tiempo al estudiante para adaptarse a la forma de informar y se le inicia en el camino desde las funciones de una variable hasta las funciones de varias variables. Este proceso evita tener que rehacer un posible trabajo agrupado.

Con la secuencia de cuatro problemas se evita que el estudiante intente resolverlos e informar todo de golpe. Se desea que el estudiante aprenda que debe respetar sus tiempos de aprendizaje. No se le pide al estudiante que resuelva un problema como si estuviera en un examen, es decir casi de forma telegráfica. Se que explique de forma convincente el estudio realizado para resolver el problema. De esta forma el profesor dirige de forma dialéctica la línea de redacción de informes tal y como se desea que realicen. Sin tener que explicitar nada en concreto. El lema de esta etapa es “sin prisas, pero sin pausas”. Esta etapa suele concluir con las vacaciones de Navidad y Año Nuevos.

Los cuatro problemas tienen un mismo enunciado: “*Determine los mínimos globales de la función  $f(x)$  y los puntos donde se alcanzan ese mínimo.*”

$$f(x) = 1 + |x^3 - 3x|$$

Figura 9: Función del problema 1º.

$$f(x) = -1 + |x^3 - \sqrt{2}x + \sqrt{11}|$$

Figura 10: Función del problema 2º

$$f(x, y) = 1 + |(x^2 + y^2)x^3 - 3x^2 - 3y^2|$$

Figura 11: Función del problema 3º.

$$f(x, y, z) = 1 + |(x^2 + y^2 + z^2)x^3 - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2|$$

Figura 12: Función del problema 4º.

Ya hemos dicho que la línea de trabajo del estudiante debe ser secuencial, por ello se indica que hasta que no se le admita un trabajo no puede enviar otro trabajo. Con esto se persigue que las respuestas se ajusten a lo que se espera el profesor como respuesta del estudiante a cada uno de los cuatro problemas, pero sin que el profesor declare sus gustos de forma inicial. En cierta medida, el profesor o directos hacen la función de arbitraje de una revista científica, a la que el estudiante debe adaptarse si desea publicar, esto es una forma práctica de comprobar lo que hay en el mercado editorial.

Como la idea no es pedir resolver un problema, sino pedir que lo analice, lo resuelva y lo comunique, se le indica al estudiante debe seguir los siguientes apartados sin decirle cómo debe hacerlo.

- Que analice cada problema.
- Que aporte la teoría en la que se basa su análisis de cada problema.
- Que aplique algún método de resolución o de aproximación de la solución.
- Que lo explique y redacte correctamente de forma digital (Word o LaTeX).
- Que ponga algunas referencias bibliográficas que haya usado realmente.

Si no se cumple esto desde el inicio, se rechaza el trabajo hasta que lo entregue de forma a lo exigido, puesto que ya hemos dicho que el profesor se ha convertido en un árbitro de revista, es decir, el profesor hace un arbitraje como si fuera un revisor de una revista, con

lo cual, se comunican erratas y se acepta o se rechaza según convenga. Generalmente, la estructura queda clara para el estudiante el tercer problema.

Una vez aceptados los cuatro primeros trabajos, entonces se pide que se hagan el estudio de los mínimos y los lugares donde se alcanzan ese mínimo con las mismas funciones, pero estando las funciones restringida a unas cajas. Es decir, restringidas a un intervalo compacto rectangulares según la función:

$$[a, b], \quad [a, b] \times [c, d], \quad [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$$

En general se pide cajas cualquiera donde puedan encontrarse minimizadores del problema general, o cajas sin ningún minimizador del problema general. Estos problemas en estas últimas cajas son problemas convexos en general.

Así pues, el estudiante tiene otros cuatro problemas mas que debe entregare siguiendo el mismo protocolo de los cuatro primeros, en tiempo y forma. Igualmente, se pidió que se documentara cada respuesta con las referencias bibliográficas necesarias, dejando constancia escrita dónde fueron utilizadas. Nuevamente, no nos conformábamos con la resolución del problema como en un examen. Tampoco interpretábamos lo que quisiera decir en el texto, tan sólo leíamos lo que decía.

Es claro que para estos cuatro problemas la teoría pudiera ser menos concreta que la de los cuatro primeros, por ello, se permiten diversas técnicas para resolver cada problema. Por ejemplo, algebraicas, gráficas, numéricas ...

Estos problemas tenían fechas de entrega similar a los cuatro primeros, con esto el estudiante no podía desatender su formación mucho tiempo y sin avanzar muy rápidamente. En cierta medida se proponía un ritmo de sin prisas, pero sin pausas.

Lo importante de estos problemas es que, una vez finalizada la última entrega, se le comunicaba que todo lo que habían escrito podría servir para el inicio de la memoria que se debía entregar. Eso constituía trabajo adelantado a la memoria para el estudiante.

Las siguientes etapas ya no tiene plazos hasta el final del tiempo lectivo.

Una vez centrado el trabajo del estudiante y establecido el ritmo de éste, se pasa a centrar al estudiante en la utilización práctica de una aproximación del conjunto de optimizadores. Para ello, se emplea un algoritmo concreto como es el Cubic Algorithm o Algoritmo Cúbico (ver Delgado 2008).



Una razón de esta elección es por ser un algoritmo determinístico para funciones de Lipschitz continuas de las cuales se conoce la constante (ver Galperin 1990). La otra razón es por ser un algoritmo heurístico para funciones continuas, consideradas como funciones de Lipschitz locales, sin ser una constante conocida (ver Delgado-Galperin 2008).

De una forma vulgar y vaga se puede imaginar que este algoritmo es una generalización a una y varias variables del algoritmo de bisección de funciones de una variable en un intervalo cerrado.

La última razón para elegir este algoritmo es que es fácil de mecanizar con el ordenador.

Para el estudiante este algoritmo es totalmente nuevo y suele tener tendencia a valorar más otros algoritmos encontrados en su búsqueda de documentación. Algoritmos que suelen obtener una aproximación del mínimo, aunque no encuentren una aproximación del conjunto de los minimizadores. Por ello, al estudiante se le pide que practique la utilización del algoritmo cúbico con las funciones y las cajas de los problemas que ya tienen resueltos. De esta forma, puede determinar una aproximación del valor óptimo y una aproximación del conjunto de optimizadores sobre algo conocido y comprobar que su mecanización es correcta.

### **La innovación docente y discente en esta asignatura**

Es claro que hemos indicado que tanto el discente como el docente tenían que hacer algunas elecciones a lo largo del trabajo del discente. Por ello, nos encontramos con algunas sorpresas.

La primera sorpresa: Una de las mayores sorpresas del estudiante es que inicialmente tenían el deseo de que el profesor les dejara clara su tarea y los documentara. Cosa con la que el docente (el autor) no está de acuerdo. Este les decía que ellos debían aprender lo que él consideraba adecuado, pero que en ningún momento él explicaría, de forma tradicional, algo de la materia. El lema es: Yo no les explico nada, pero usted debe aprender. Desde luego aprender es una tarea del estudiante, luego cuanto más profunda sea su actuación, mayor será la ganancia.

La segunda sorpresa: Otro punto importante es la demanda de la forma que debería tener la memoria final. A esto el profesor les indicaba que utilizasen la forma del artículo que más les hubiera gustado. Con esto el profesor se asegura que las referencias bibliográficas indicadas fueron leídas o tendrían que leerse de nuevo.

La tercera sorpresa: El estudiante que está centrado en el camino final de la memoria solicita la función que debe optimizar. En este momento el profesor les recuerda que ya les pidió que apuntaran las funciones optimizadas en algún artículo con el fin de hacer un control de funcionamiento a la mecanización del algoritmo.

En esta versión de la asignatura de TFG se establece que:

- El estudiante elije, libremente, dos o tres de problemas de optimización de un mínimo de dos variables.
  - Uno similar a lo visto en la revisión de documentación, para que sirviera de ejemplo en la mecanización del algoritmo.
  - Otro para ser la función principal para realizar la memoria.
- El problema principal de la memoria. Lo elige el tutor entre un par de problemas propuestos por el estudiante, si bien, puede hacer variaciones de lo propuesto. El estudiante debe esperar la aceptación de la función a optimizar.
- La memoria del estudiante debe contener las siguientes partes:
  - Resumen y palabras claves en español e inglés.
  - Una Introducción al problema de optimización, en español e inglés.
  - Todos o parte de los problemas propuestos en el curso.
  - La parte principal del algoritmo cúbico.
  - Bibliografía.

El estudiante se encuentra un proceso innovador ya que es el quien decide lo que hará en el problema de optimización global. Además, aunque sea en enseñanza a distancia, él tiene la sensación de que el profesor está constantemente siguiendo su evolución, por lo tanto no debe parar por mucho tiempo.

El estudiante puede ver a su profesor puesto que éste realiza una webconferencia antes de iniciarse la tarea de la memoria final para aclarar ideas y consensuar tareas.

El profesor ejerce cierta innovación en su tarea sobre todo al proponer el modelo de afrontar esta asignatura, el tipo de trabajo de optimización y el algoritmo que debe estudiar el estudiante. En ningún momento, el profesor impone el problema concreto que deba resolver el estudiante, si bien, puede efectuar ligeras modificaciones a la función de

problema de optimización. Es claro que elige una de las dos o tres funciones que el estudiante propone optimizar.

El director se compromete a revisar tanto la memoria y como la presentación para la defensa pública de cada estudiante, con lo cual el estudiante se siente respaldado ante fallos posibles. Se debe tener en cuenta que el director es uno de los dos miembros del tribunal y que es quien solicita a otro compañero del departamento para ser miembro del tribunal.

Cabe destacar que la memoria debe hacerse en LaTeX para poder compilar un pdf, aunque se admite la redacción en fichero docx de Word en el caso que al estudiante le cueste mucho actuar en LaTeX. La defensa se realiza utilizando un fichero de presentación; bien pdf, Power Point o similar.

### **Persistencia de la innovación o conclusiones reiteradas**

Se ha indicado que el TFG es una asignatura del grado que pretende estudiar el nivel de profesionalidad matemática que tiene el futuro egresado. Por decirlo de una forma clara, es la última asignatura del grado por lo general.

Quizás algún lector pueda pensar que para superar esta asignatura pueden emplearse las mismas estrategias de resto de asignaturas del grado. En general, esa es la convicción de los estudiantes antes de matricularse en esta asignatura junto con otras, pero esto no es así. Quizás debamos explicar que en una universidad como la UNED, la docencia no es como la presencial, por ello, en la docencia de cualquier asignatura es obligatorio disponer como referencia del estudiante con un texto base recomendado. Texto que el estudiante puede emplear para adquirir los conocimientos, aunque tiene libertad para elegir sus textos. En la docencia de la asignatura del TFG intervenimos todos los profesores del departamento. No tiene texto base de referencia común, y podemos asegurar que no debería tener una bibliografía establecida para cada uno de los temas. Eso queda a elección de cada profesor.

En esta línea de estudios entendemos que el estudiante debe aprender a enfrentarse a los problemas que una asignatura (por ejemplo, TFG) para, después, ser catalogado como profesional de las Matemáticas. Cualquier matemático debe estar dispuesto a afrontar nuevos retos, aunque no conozca la materia en la cual se focaliza el reto. No decimos que el matemático tenga que afrontar el reto profesional de forma solitaria, pero si saber

buscar fuentes donde se describa la materia, estudiarla y comprenderla por sí sólo, o en grupo.

Esta asignatura que se debe contemplar como el final de grado, debe interpretarse como el inicio de la profesionalidad. Así pues, es una asignatura para destacar el cambio de nivel académico-laboral y, por lo tanto, encontrar disfuncionalidades en ese cambio para las cuales el estudiante debe acostumbrarse por necesidad. No siempre encontraremos a alguien que nos explique esto o aquello. Así pues, permitir que el estudiante desarrolle trabajos de este tipo favorece y facilita que el estudiante encauce su futuro profesional.

Con este tipo de trabajo no se le solicita a un estudiante un nivel de investigación matemática, aunque el estudio del tema pueda ser percibido por el estudiante como una investigación personal. De esta forma, el estudiante se compromete íntegramente con su aprendizaje y aprende que debe hacer cuando no sepa de algún tema.

Generar la memoria de una forma práctica permite entender que los problemas matemáticos, o no, se deben tratar recorriendo un camino desde algunos casos particulares hacia otros casos más generales, incluso terminando en una teoría.

Lo que si se constata es que la cantidad de trabajo del estudiante es superior al de otras asignaturas, y no tiene seguridad de avanzar de forma segura., aunque hay que recordar que en esta asignatura se tratan muchos más créditos que en las otras. Estudiar de esta forma deja en claro el dicho de “*prueba, error y rectificación*” que es muchas veces muestra la senda heurística que se emplean en muchos problemas matemáticos, incluso antes de acceder a una posible teoría muy compleja.

Al director o tutor se le carga con una cuota muy superior a lo estrictamente necesario pero gratificante, puesto que en este caso se trasmite la forma de actuar de él. Además, con este tipo de proceso innovador se puede atender a todos los estudiantes, sin problema de repetición o copia. Es decir, esta parte es una línea segura para profesor y estudiante.

### **El valor añadido de un TFG**

Una vez terminada la asignatura, es decir una vez calificada, se reconoce que el trabajo del estudiante es bueno o muy bueno, por ello se le pide si desea escribir un artículo breve (10 páginas) para ser publicado en la revista Pi-InnovaMath (UNED) que está dedicada a la innovación y divulgación matemática. En algunos casos, el estudiante aprende que un trabajo bien hecho puede tener el premio y convertirse en su publicación. En otras ocasiones se le invita a participar y comunicar en algún encuentro eXIDO.

## Bibliografía

Delgado Pineda, M. (2008) *Optimización Global De Funciones Continuas No Diferenciables*. 100Cias UNED

Delgado Pineda, M ; Galperín, E.A. (2003) *Global optimization in  $R^n$  with box constraints and applications: A MAPLE copde*. Mathematical and Computer Modelling.

Galperin, E.A. (1990) The Cube Algorithm for Optimization y Control.NP Research Publication. Montreal.

Google Académico. (2025) <https://scholar.google.es/schhp?hl=es>

R. Rodríguez. (2011) ¿Cómo afrontar el trabajo fin de grado? Un problema o una oportunidad para culminar con el desarrollo de las competencias. Revista Complutense de Educación 179, Vol. 22 Núm. 2 (2011) 179-193. Madrid  
[http://dx.doi.org/10.5209/rev\\_RCED.2011.v22.n2.38488](http://dx.doi.org/10.5209/rev_RCED.2011.v22.n2.38488)