

El modelo $sl_2(\mathbb{R})$ del plano hiperbólico

José L. García Heras¹

Facultad de Ciencias UNED

Presentado en E-Math2022



ABSTRACT

Among the best known models of the hyperbolic plane are the Poincaré models of the half-plane and the disk and that of the hyperboloid. In this article a new model H of the hyperbolic plane is studied, based on the vector space $sl_2(\mathbb{R})$ of the matrices in $M_2(\mathbb{R})$ with trace zero (section 1), where the scalar and exterior products of two matrices are defined, and so is a trilinear form of three matrices –volumen form– through the scalar product of the first by the exterior product of the other two. Such volumen form defines an orientation in H , where each point in H is given by one matrix in $sl_2(\mathbb{R})$ with determinant 1 and each oriented geodesic has a normal vector given by one matrix with determinant -1; the opposite matrix defines the normal vector of the same geodesic with the opposite orientation. The above model and such tools are somehow present in Iversen [1] and, with another notation, can also be found in Fenchel [2]. Here we have tried to restrict the definitions to what is essential, so that the results acquire the greatest possible generality.

This model of the hyperbolic plane and the Poincaré's models are isomorphic, and the projections of H on the half-plane and the disk allow to make all the representations in any of these.

Next to the previous definitions and results, in chapter 2, we analyse the relative position of two geodesics –secant, parallel or ultraparallel–; then, in chapter 3, we study the isomorphisms between the three models of the hyperbolic plane mentioned above, and so does the representation of hyperbolic circumferences and triangles, being next defined the power of a point with respect to a circle and obtained the formulae for the radical axis of two circles and the radical centre of three circles, as well as those corresponding to the elements of a triangle.

The majority of the contents can be found in [3]. The representations have been made using *Scientific Notebook* and *Geogebra* [4].

This article is addressed to those interested in the study of the geometry of the hyperbolic plane unfamiliar with the $sl_2(\mathbb{R})$ model.

Key words: Hyperbolic plane, Poincaré Half-plane, Poincaré Disk.

RESUMEN

Entre los modelos más conocidos del plano hiperbólico se encuentran el semiplano y disco de Poincaré y el del hiperboloide.º En el presente artículo se estudia un nuevo modelo del plano hiperbólico H , basado en el espacio vectorial $sl_2(\mathbb{R})$ de las matrices de $M_2(\mathbb{R})$ con traza cero (sección 1), donde están definidos el producto escalar y el producto exterior de dos matrices, además de una forma trilineal de tres matrices –forma volumen– mediante el producto escalar de la primera por el producto exterior de las otras dos. Dicha forma volumen define una orientación de H , donde cada punto de H viene dado por una matriz de $sl_2(\mathbb{R})$ con determinante 1 y cada

geodésica orientada tiene un vector normal que es una matriz con determinante -1 ; la matriz opuesta define el vector normal de la misma geodésica, con orientación contraria. El modelo anterior y tales herramientas, de algún modo, están presentes en Iversen [1] y, con otra notación, pueden encontrarse también en Fenchel [2]. Aquí se ha pretendido restringir las definiciones lo imprescindible, de manera que los resultados adquieran la mayor generalidad posible. Este modelo del plano hiperbólico y los modelos de Poincaré son isomorfos, y las proyecciones de H en el semiplano y el disco de Poincaré permiten realizar todas las representaciones en cualquiera de estos.

Después de las definiciones y resultados previos se analiza, en la sección 2, la posición relativa de dos geodésicas –secantes, paralelas o ultraparalelas–, y en la sección siguiente se estudian los isomorfismos entre los tres modelos aludidos del plano hiperbólico y la representación de circunferencias y triángulos hiperbólicos, definiéndose la potencia de un punto respecto a una circunferencia y obteniéndose las fórmulas del eje radical de dos circunferencias y el centro radical de tres circunferencias, así como las correspondientes a los elementos de un triángulo.

La mayoría de los contenidos teóricos pueden encontrarse en [3]. Las representaciones se han realizado en *Scientific Notebook* y en *Geogebra* [4].

El presente artículo se dirige a los interesados en el estudio de la geometría del plano hiperbólico poco familiarizados con el modelo $sl_2(\mathbb{R})$.

Palabras clave: Plano hiperbólico, Semiplano de Poincaré, Disco de Poincaré.

¹jlgheras@gmail.com

1. Plano hiperbólico

Sea F un espacio vectorial real de dimensión 3 donde hay definido un producto escalar $\langle X, Y \rangle$, de manera que para toda base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ de F se cumpla que:

$$\#\{i; \langle e_i, e_i \rangle = -1\} = 2, \#\{i; \langle e_i, e_i \rangle = 1\} = 1,$$

Entonces la pseudoesfera $S(F) \equiv \langle X, X \rangle = 1$ es un hiperboloide de dos hojas. Si H denota cualquiera de ellas, para dos puntos $A, B \in H$ se cumple $\langle A, B \rangle > 1$. Se define la *distancia hiperbólica* $d(A, B)$ mediante la igualdad:

$$\operatorname{ch} d(A, B) = \langle A, B \rangle.$$

Y con la métrica correspondiente, H es un *plano hiperbólico*.

Si $T \in F$, $\langle T, T \rangle = -1$, es un vector tangente a H en el punto A , $\langle A, T \rangle = 0$, entonces:

$$B(s) = A \operatorname{ch} s + T \operatorname{sh} s \quad ; s \in \mathbb{R}$$

es una *geodésica orientada* que pasa por $A = B(0)$, donde $|s|$ determina la distancia hiperbólica entre los puntos A y $B(s)$ de H .

1.1. El modelo $sl_2(\mathbb{R})$

Se considera el espacio vectorial tridimensional $sl_2(\mathbb{R})$ de las matrices $X \in M_2 = M_2(\mathbb{R})$ con traza cero, $\operatorname{tr} A = \alpha_{11} + \alpha_{22} = 0$, donde se define el producto escalar:

$$\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(XY) \in \mathbb{R}$$

Se cumple que $\langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle$ y $\langle X, X \rangle = \det X$.

(Observación: este producto escalar es una restricción del producto escalar

$\langle X, Y \rangle = -\frac{1}{2} \operatorname{tr}(XY^{\sim}) \in \mathbb{R}$, $X, Y \in M_2$, siendo $A^{\sim} = \begin{pmatrix} \alpha_{22} & -\alpha_{12} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{11} \end{pmatrix}$ la matriz adjunta de la

traspuesta de $A = (a_{ij}) \in M_2$. El grupo lineal especial $SL(2, \mathbb{R})$ de las matrices de M_2 con determinante 1 puede así expresarse como $SL(2, \mathbb{R}) = \{X \in M_2, \langle X, X \rangle = 1\}$).

Si $\langle U, U \rangle = 0$ decimos que U es un *vector isotrópico*. *Línea isotrópica* es la recta vectorial $L[U] = \{\lambda U : \lambda \in \mathbb{R}\}$ engendrada por un vector isotrópico.

Los vectores

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

constituyen una base ortonormal del espacio vectorial $sl_2(\mathbb{R})$.

Llamaremos $S(sl_2(\mathbb{R}))$ a $\{X \in sl_2(\mathbb{R}); \langle X, X \rangle = 1\}$, que es un hiperboloide de dos hojas. Una de ellas:

$$H = S^+(sl_2(\mathbb{R})) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in S(sl_2(\mathbb{R})); c > 0 \right\},$$

es un *2-espacio hiperbólico* con la métrica determinada por $\operatorname{ch} d(X, Y) = \langle X, Y \rangle$.

Las matrices X_1 y X_2 pueden ser consideradas como vectores tangentes al plano H en el

punto X_0 .

Cada elemento de H puede expresarse de la forma:

$$Z = \frac{1}{y} \begin{pmatrix} x & -x^2 - y^2 \\ 1 & -x \end{pmatrix} \quad ; y > 0.$$

Los vectores isotrópicos constituyen el *cono isotrópico* $C(sl_2(\mathbb{R}))$. Se llama *cono proyectado* al conjunto $PC(sl_2(\mathbb{R}))$ de líneas isotrópicas, que es homeomorfo a la circunferencia $S^1 \subset \mathbb{R}$. Resulta inmediato comprobar que cada línea isotrópica $L[U]$ está engendrada por un vector que admite una de las dos siguientes expresiones:

$$U = \begin{pmatrix} u & -u^2 \\ 1 & -u \end{pmatrix}, u \in \mathbb{R}, \quad \text{o} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Así, $PC(sl_2(\mathbb{R})) \approx \mathbb{R} \cup \{\infty\} \approx S^1$.

1.2. El plano hiperbólico H y los modelos del Semiplano y el Disco de Poincaré

Denominamos \mathcal{H} al semiplano de números complejos con parte imaginaria positiva, dotado con la distancia definida por:

$$\text{ch } d(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2 \text{Im}(z) \text{Im}(w)}.$$

En el caso particular $z = ip$, $w = iq$ se cumple:

$$d(ip, iq) = \left| \ln\left(\frac{p}{q}\right) \right|.$$

Se considera ahora el disco $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$, dotado con la distancia determinada por:

$$\text{ch}^2 \frac{1}{2} d(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}.$$

Si $z = 0$ y $w = x > 0$ se tiene que $d(0, x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$.

Entre los tres modelos cabe establecer las siguientes biyecciones:

$h : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{D}$, definida por:

$$h(z) = i \frac{z - i}{z + i}. \quad (1.2)$$

$F_2 : \mathcal{H} \rightarrow H$, siendo:

$$F_2(z) = \frac{1}{\text{Im}(z)} \begin{pmatrix} \text{Re}(z) & -|z|^2 \\ 1 & -\text{Re}(z) \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

$G_2 : \mathcal{D} \rightarrow H$, con:

$$G_2(w) = \frac{1}{1 - |w|^2} \begin{pmatrix} 2 \text{Re}(w) & -2 \text{Im}(w) - 1 - |w|^2 \\ -2 \text{Im}(w) + 1 + |w|^2 & -2 \text{Re}(w) \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Puede probarse que las tres aplicaciones conservan las métricas definidas en cada modelo. Es decir, \mathcal{H} , \mathcal{D} y H son isomorfos. Más aún, se cumple que $G_2(h(z)) = F_2(z)$, si $z \in \mathcal{H}$.

Cabe observar que el conjunto $\partial\mathcal{H}$ de puntos impropios de \mathcal{H} puede identificarse con la

circunferencia $\partial\mathcal{D} = S^1$ mediante $h(z) = i\frac{z-i}{z+i}$, y concretamente:

$$h(1) = 1, h(0) = -i, h(-1) = -1, h(\infty) = i$$

Y, como ya quedó dicho más arriba, $PC(sl_2(\mathbb{R})) \approx \mathbb{R} \cup \{\infty\} \approx S^1$:

$$U = \begin{pmatrix} u & -u^2 \\ 1 & -u \end{pmatrix} \rightarrow u \in \mathbb{R} \rightarrow z = i\frac{u-i}{u+i} \in S^1$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow u = \infty \rightarrow z = i \in S^1,$$

que se corresponden con los puntos impropios de H .

Así, $u = \frac{z+i}{1+iz}$ ($z \neq i$), $u = \infty$ ($z = i$), y entonces:

$$-1 \equiv \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, -i \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 1 \equiv \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, i \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y, en general, para $z = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta \in \partial\mathcal{D}$, $\cos\theta \neq 0$:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\cos\theta + i(1 + \operatorname{sen}\theta)}{1 - \operatorname{sen}\theta + i\cos\theta} = \frac{(\cos\theta + i(1 + \operatorname{sen}\theta))(1 - \operatorname{sen}\theta - i\cos\theta)}{(1 - \operatorname{sen}\theta)^2 + \cos^2\theta} \\ &= \frac{2\cos\theta}{2 - 2\operatorname{sen}\theta} = \frac{\cos\theta}{1 - \operatorname{sen}\theta} = \frac{1 + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \end{aligned}$$

$$\text{Así, } \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta \approx \begin{pmatrix} 1 & -(\sec\theta + \tan\theta) \\ \sec\theta - \tan\theta & -1 \end{pmatrix}.$$

Los resultados que siguen se prueban utilizando el modelo $S^+(sl_2(\mathbb{R}))$ del plano hiperbólico y las representaciones se realizarán indistintamente en cualquiera de los dos modelos de Poincaré del semiplano y del disco.

En el modelo del semiplano de Poincaré las *geodésicas* son semicircunferencias euclídeas con centro en el eje real o semirrectas euclídeas perpendiculares a dicho eje. Este modelo no satisface el axioma de las paralelas.

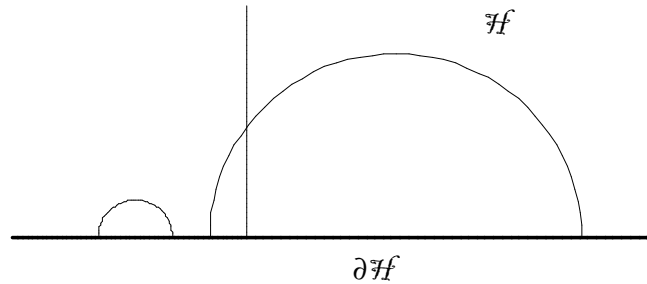


Figura 1: Semiplano de Poincaré

En el modelo del disco las *geodésicas* son los arcos de circunferencias, o los segmentos, perpendiculares a la circunferencia $S^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z|=1\}$. Tampoco este modelo satisface el axioma de las paralelas.

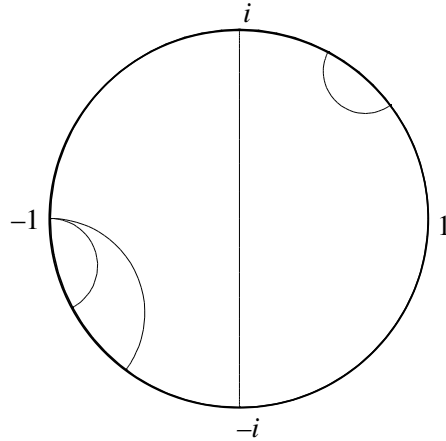


Figura 2: Disco de Poincaré

Las geodésicas del disco \mathcal{D} que tienen a i como uno de sus extremos se corresponden en el semiplano \mathcal{H} con semirrectas euclídeas perpendiculares al eje real.

Aún cabe considerar otro modelo del plano hiperbólico, basado en el hiperboloide. Consideramos el hiperboloide equilátero de ecuación $z^2 = 1 + x^2 + y^2$, y sea H^2 la hoja superior ($z > 1$). La proyección estereográfica de H^2 desde el vértice de la hoja inferior, S , sobre el plano $z = 0$ es un disco abierto \mathcal{D} , donde las geodésicas, considerado como un disco de Poincaré, se corresponden con curvas de H^2 , que constituyen las geodésicas del plano hiperbólico H^2 . También producen geodésicas las intersecciones de H^2 con los planos que pasan por el origen O .

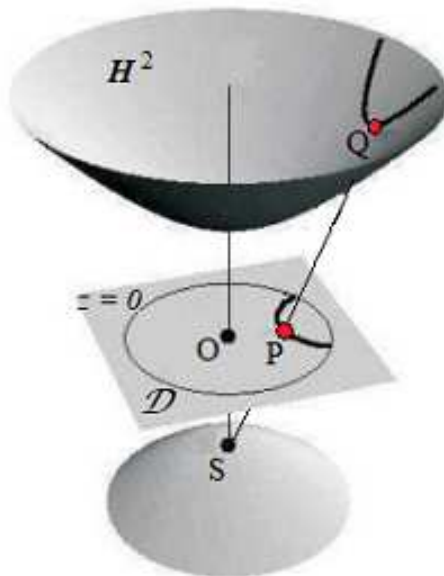


Figura 3: Hiperboloide H^2 y disco de Poincaré \mathcal{D}

Las rectas tangentes al hiperboloide trazadas por el origen O forman el cono isotrópico (llamado *cono de luz*) de ecuación $z^2 = x^2 + y^2$.

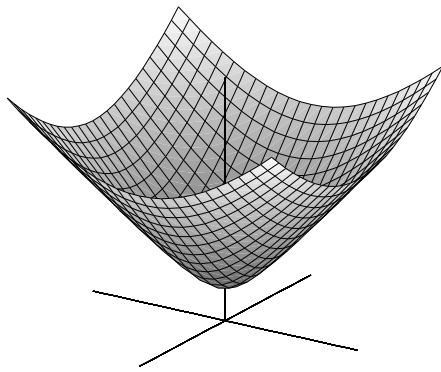


Figura 4: Modelo H^2 del hiperboloide

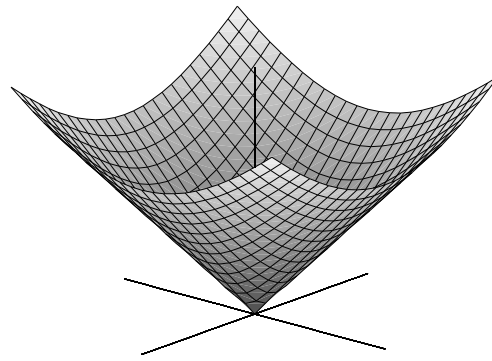


Figura 5: Cono isotrópico $C(H^2)$

1.3. Orientación de H

Producto exterior de dos matrices de $sl_2(\mathbb{R})$

Si $X, Y \in sl_2(\mathbb{R})$, entonces su producto exterior se define como:

$$X \wedge Y = \frac{1}{2} (XY - YX) \in sl_2(\mathbb{R}), \quad (1.5)$$

que es una aplicación bilineal y se cumple que:

1. $Y \wedge X = -(X \wedge Y)$ y $X \wedge X = 0$
2. $\langle X \wedge Y, X \rangle = \langle X \wedge Y, Y \rangle = 0$
3. $\langle A \wedge B, C \wedge D \rangle = \langle A, C \rangle \langle B, D \rangle - \langle A, D \rangle \langle B, C \rangle$
4. Si X e Y son unitarios:
 - $\langle X \wedge Y, X \wedge Y \rangle = 1 - \langle X, Y \rangle^2$, en el caso de $\langle X, X \rangle = \langle Y, Y \rangle$
 - $\langle X \wedge Y, X \wedge Y \rangle = -1 - \langle X, Y \rangle^2$, en el caso de $\langle X, X \rangle = -\langle Y, Y \rangle$
5. $X \wedge (Y \wedge Z) = \langle X, Z \rangle Y - \langle X, Y \rangle Z$

Forma volumen en $sl_2(\mathbb{R})$

En el espacio vectorial $sl_2(\mathbb{R})$ la expresión:

$$\text{vol}(X, Y, Z) = \langle X \wedge Y, Z \rangle = -\frac{1}{2} \text{tr}(XYZ) \in \mathbb{R}$$

define una forma trilineal que satisface, entre otras, las siguientes propiedades:

1. $\text{vol}(Y, X, Z) = -\text{vol}(X, Y, Z)$
2. $\text{vol}(Y, Z, X) = \text{vol}(X, Y, Z)$
3. Es una forma alternante: se anula si dos de las matrices X, Y, Z son iguales.
4. $\text{vol}(X, Y, Z) = 0$ si y sólo si X, Y, Z son linealmente dependientes.
5. $\text{vol}(X_0, X_1, X_2) = 1$, siendo X_0, X_1, X_2 las matrices (1.1) y, por tanto, si las matrices X, Y, Z constituyen una base ortonormal de $sl_2(\mathbb{R})$ se tiene que:

$$\text{vol}(X, Y, Z) = 1 \text{ o } \text{vol}(X, Y, Z) = -1.$$

La base $\{X_0, X_1, X_2\}$ induce una *orientación* en $sl_2(\mathbb{R})$. Tal orientación, como la inducida por cualquier base ortonormal $\{X, Y, Z\}$ con $[X, Y, Z] = 1$, se considera *positiva*. La orientación de $sl_2(\mathbb{R})$ es *negativa* si $[X, Y, Z] = -1$. A su vez, la orientación de $sl_2(\mathbb{R})$ induce en H una orientación del mismo tipo.

2. Geodésicas en H

Una geodésica orientada de H está determinada por un par $\{A, T\}$ de matrices de $sl_2(\mathbb{R})$, siendo $\langle A, A \rangle = 1$, $\langle T, T \rangle = -1$ y $\langle A, T \rangle = 0$. El par $\{A, -T\}$ determina la misma geodésica con la orientación opuesta. La *geodésica orientada* $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow H$ tiene ecuación:

$$\gamma(t) = A \operatorname{ch} t + T \operatorname{sh} t,$$

donde $A = \gamma(0)$ y $T = \gamma'(0)$ es un vector ortogonal a A con norma $\langle T, T \rangle = -1$, tangente a la geodésica en el punto A . Si $B = \gamma(t_0)$, entonces:

$$B = A \operatorname{ch} d(A, B) + T \operatorname{sh} d(A, B) \quad \text{y} \quad \langle A, B \rangle = \operatorname{ch} d(A, B).$$

Se llama *vector normal a la geodésica* $\gamma(t) = A \operatorname{ch} t + T \operatorname{sh} t$, contenida en H , a la matriz con determinante -1 :

$$N = \gamma'(t) \wedge \gamma(t) = T \wedge A = TA = -AT,$$

y es independiente del parámetro t . (Obsérvese que $\langle A, N \rangle = \langle T, N \rangle = 0$).

La geodésica $\gamma(t)$ admite también la ecuación:

$$\gamma(t) = A \operatorname{ch} t + (A \wedge N) \operatorname{sh} t = A \operatorname{ch} t + AN \operatorname{sh} t.$$

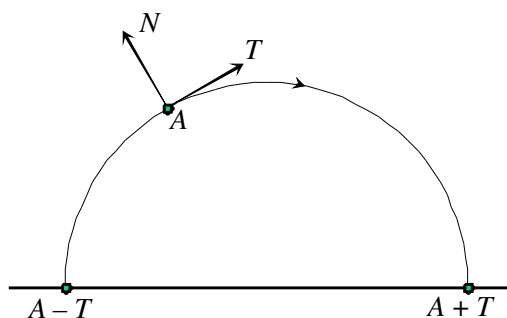


Figura 6: Vector $N = T \wedge A = -AT$, normal a la geodésica

La geodésica de ecuación:

$$\eta(t) \equiv A \operatorname{ch} t + N \operatorname{sh} t$$

es la perpendicular a γ trazada por el punto A .

Si dos geodésicas orientadas tienen vectores normales N y N' , entonces:

$$|\langle N, N' \rangle| = 1, |\langle N, N' \rangle| < 1, |\langle N, N' \rangle| > 1;$$

según sean paralelas, secantes o ultraparalelas.

Más aún, el vector $N \wedge N'$ determina, salvo constantes, el punto común, propio o impropio, o el vector normal a la geodésica perpendicular a ambas, según los casos. Téngase en cuenta que $\langle N \wedge N', N \wedge N' \rangle = 1 - \langle N, N' \rangle^2$.

2.1. Extremos de una geodésica

Conservando la notación de la introducción anterior, los vectores isotrópicos $U = A - T$ y $V = A + T$ son ortogonales a N y determinan, por tanto, los dos puntos impropios de ∂H llamados *extremos* de la geodésica γ . Los puntos de la geodésica orientada son ‘anteriores’ o ‘posteriores’ a A , según que el parámetro t en $\gamma(t) = A \operatorname{ch} t + T \operatorname{sh} t$ sea negativo o positivo, respectivamente.

Resulta así natural llamar a U extremo inicial de la geodésica y a V extremo final (figura 6).

Si una geodésica orientada γ del plano hiperbólico H tiene extremos $U, V \in \partial H$, dados en ese orden, determinado por la orientación de la geodésica, entonces esta puede expresarse como:

$$\gamma \equiv X(t) = A \operatorname{ch} t + T \operatorname{sh} t,$$

siendo $A = k(U + V)$, $T = k(V - U)$ y $k = (2\langle U, V \rangle)^{-1/2}$.

En consecuencia:

a) Si $u \neq \infty, v \neq \infty$, siendo:

$$U = \begin{pmatrix} u & -u^2 \\ 1 & -u \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} v & -v^2 \\ 1 & -v \end{pmatrix}$$

se tiene que:

$$A = \frac{1}{|u-v|} \begin{pmatrix} u+v & -u^2-v^2 \\ 2 & -u-v \end{pmatrix}, T = \frac{1}{|u-v|} \begin{pmatrix} v-u & u^2-v^2 \\ 0 & u-v \end{pmatrix}.$$

b) Si $u = \infty, v \neq \infty$, entonces:

$$A = \begin{pmatrix} v & -1-v^2 \\ 1 & -v \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} v & 1-v^2 \\ 1 & -v \end{pmatrix}.$$

Resulta inmediato comprobar que $\langle A, T \rangle = 0$, $\langle A, A \rangle = 1$ y $\langle T, T \rangle = -1$. Además, $A - T = 2kU$ y $A + T = 2kV$ representan las mismas líneas isotrópicas que U y que V , respectivamente. Las demás afirmaciones son consecuencias inmediatas.

2.2. Vector normal a la geodésica que une dos puntos propios o impropios

Si N es el vector normal a la geodésica orientada que une el punto $A_1 \in H$ con el punto $A_2 \in H$, entonces:

$$N = \frac{1}{\operatorname{sh} d(A_1, A_2)} (A_2 \wedge A_1).$$

Bastaría comprobar que $A_2 \wedge A_1 = (T \wedge A_1) \operatorname{sh} \delta = N \operatorname{sh} \delta$, siendo T el vector tangente a la geodésica en el punto A_1 y $\delta = d(A_1, A_2)$.

Si N es el vector normal a la geodésica orientada g de extremos U y V , dados en ese orden, determinado por la orientación de la geodésica, entonces:

$$N = \frac{1}{\langle U, V \rangle} (V \wedge U).$$

La geodésica g puede expresarse $g \equiv A \operatorname{ch} t + T \operatorname{sh} t$, siendo $A = \alpha(U + V)$, $T = \alpha(V - U)$ y $\alpha = (2\langle U, V \rangle)^{-1/2}$. Por tanto:

$$N = T \wedge A = \alpha^2 [(U - V) \wedge (V + U)] = 2\alpha^2 (V \wedge U),$$

lo que prueba la igualdad del enunciado.

Por otra parte, si $X(t) = tU + (1-t)V \in \operatorname{sl}_2(\mathbb{R})$, $0 < t < 1$, $\det X(t) = t(1-t)(u-v)^2$ y se cumple que $\gamma(t) = \frac{1}{|u-v|\sqrt{t(1-t)}} X(t) \in H$.

Además, al ser $\langle V \wedge U, U \rangle = \langle V \wedge U, V \rangle = 0$, se tiene que $\langle N, V \rangle = \langle N, U \rangle = 0$ y $\langle N, \gamma(t) \rangle = 0$.

Así, la geodésica orientada de vector normal N viene dada por la ecuación paramétrica:

$$\gamma(t) = \frac{1}{|u-v|\sqrt{t(1-t)}}(tU + (1-t)V), 0 < t < 1$$

2.3. Ecuación de la geodésica dado su vector normal

Sea $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, $a^2 + bc = 1$, el vector normal de la geodésica g . Entonces si $c = 0$ y

$N = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ los extremos de la geodésica son:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}b & -\frac{1}{4}b^2 \\ 1 & \frac{1}{2}b \end{pmatrix}$$

Y si $c \neq 0$ la geodésica tiene por extremos

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}(a+1) & -\frac{1}{c^2}(a+1)^2 \\ 1 & -\frac{1}{c}(a+1) \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}(a-1) & -\frac{1}{c^2}(a-1)^2 \\ 1 & -\frac{1}{c}(a-1) \end{pmatrix}$$

(En ambos casos: $\langle U, U \rangle = \langle V, V \rangle = 0$ y $\langle N, U \rangle = \langle N, V \rangle = 0$).

En el primer caso la geodésica tiene ecuación $\gamma(t) = \lambda(tU + (1-t)V)$, $0 < t < 1$, donde $\lambda = \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$:

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b(t-1) & \frac{1}{4}b^2(t-1) - t \\ 1-t & -\frac{1}{2}b(t-1) \end{pmatrix}$$

Y en el segundo, $\lambda = \frac{1}{\frac{2}{c}\sqrt{t(1-t)}}$ y entonces:

$$\gamma(t) = \frac{1}{2\sqrt{t(1-t)}} \begin{pmatrix} a+2t-1 & -\frac{1}{c}(4at + (a-1)^2) \\ c & 1-a-2t \end{pmatrix}$$

2.4. Geodésicas secantes: ángulo direccional y punto común

Si h y h' son dos geodésicas orientadas secantes en el punto A y S , T los vectores tangentes a sendas geodésicas en el punto A , acordes con la orientación de ambas, diremos que $\theta \in (-\pi, \pi)$ es el ángulo direccional de la primera geodésica h a la segunda h' si:

$$\langle S, T \rangle = \cos \theta \quad \text{y} \quad S \wedge T = A \sin \theta.$$

Puede observarse que A es ortogonal a los vectores S y T , que determinan, a su vez, el ángulo $\pi - \theta$. Así, la definición anterior adquiere sentido teniendo en cuenta que, además:

$$\langle S \wedge T, S \wedge T \rangle = 1 - \langle S, T \rangle^2 = \sin^2 \theta \quad \text{y} \quad \langle A, A \rangle = 1.$$

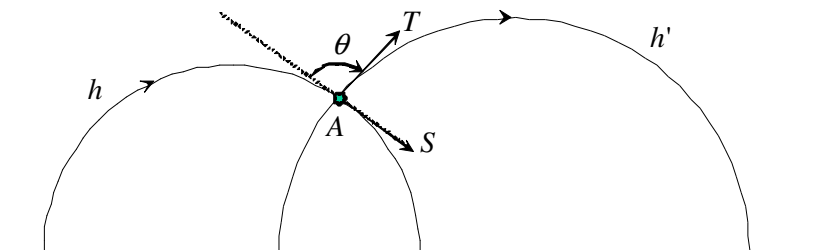


Figura 7: Ángulo direccional entre dos geodésicas secantes en A

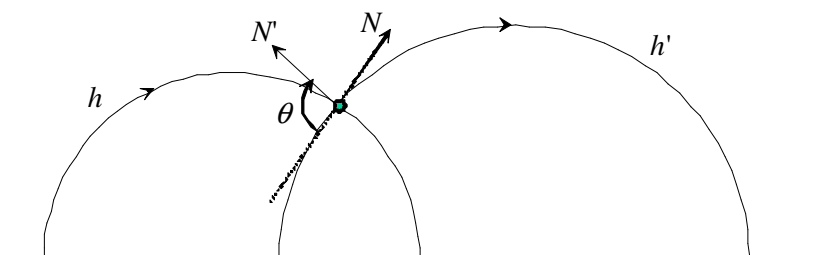


Figura 8: Ángulo direccional y vectores normales a dos geodésicas secantes

2.5. Geodésicas paralelas. Extremo común

Sean h y h' dos geodésicas orientadas de vectores normales N y N' . En el caso de paralelismo, según que $\langle N, N' \rangle = 1$ o $\langle N, N' \rangle = -1$, puede considerarse que el ángulo direccional de h a h' es, respectivamente, $\theta = 0$ ó $\theta = \pi$ (figura 9). En el primer caso, decimos que las geodésicas están *orientadas concordantemente*.

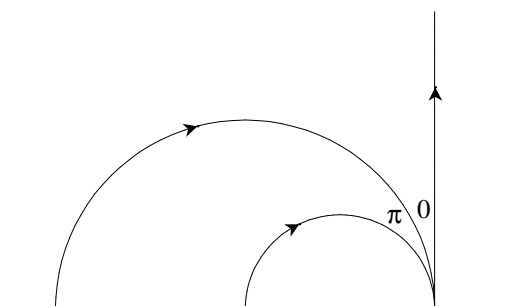


Figura 9: Geodésicas paralelas. Concordancia

Si N y N' son los vectores normales a dos geodésicas paralelas orientadas concordantemente, entonces el *extremo común* a ambas viene dado indistintamente por:

$$U = N + N' \quad \text{o} \quad U = N \wedge N'.$$

Basta comprobar que $\langle U, U \rangle = 0$ y $\langle U, N \rangle = \langle U, N' \rangle = 0$, siendo $\langle N, N' \rangle = 1$.

Caso de $\langle N, N' \rangle = -1$, los vectores $aN + bN'$ con $(a, b) \neq (0, 0)$ determinan, salvo constantes, los vectores normales del *haz de geodésicas paralelas* que tienen un *extremo común*. Tales vectores, una vez normalizados, pueden escribirse:

$$M = aN + (1 - a)N',$$

y se cumple que $\langle N, M \rangle = \langle N', M \rangle = -1$.

2.6. Geodésicas ultraparalelas. Perpendicular común

Si h y h' son dos geodésicas ultraparalelas de vectores normales N y N' , llamando K al vector

normal de la geodésica k perpendicular a ambas, si la orientación de las tres geodésicas es tal que $A = N \wedge K$ y $B = K \wedge N'$ son los puntos de la geodésica k pertenecientes a h y h' , respectivamente, entonces se cumple que $\text{ch}D = \langle A, B \rangle = \langle N, N' \rangle$, siendo D la distancia entre las dos geodésicas ultraparalelas. Obsérvese que, en este caso, tanto de h a k como de k a h' , el ángulo direccional es $\frac{\pi}{2}$ (figura 10) y se dice entonces que su orientación es *concordante*.

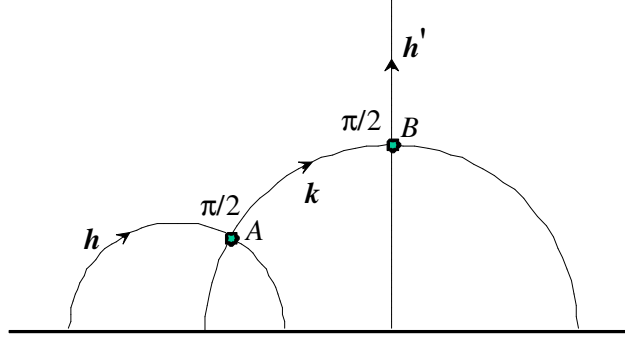


Figura 10: Geodésicas ultraparalelas. Concordancia

Dadas dos geodésicas ultraparalelas h y h' de H , orientadas concordantemente, de vectores normales N y N' , si K es el vector normal de la geodésica perpendicular común k , orientada de modo que $\frac{\pi}{2}$ sea el valor de los ángulos direccionales de h a k y de k a h' , entonces:

$$N \wedge N' = -K \text{sh}D \quad \text{y} \quad [N, K, N'] = -\text{sh}D,$$

siendo D la distancia entre las geodésicas h y h' .

Basta considerar que para los puntos $A = N \wedge K, B = K \wedge N'$ se cumple $B \wedge A = K \text{sh}D$, y como $N = A \wedge K$ y $N' = K \wedge B$ se tiene:

$$N \wedge N' = \langle K, B \wedge A \rangle K = -K \text{sh}D \quad \text{y} \quad [N, K, N'] = -\langle K, N \wedge N' \rangle = \langle K, K \rangle \text{sh}D = -\text{sh}D.$$

Los vectores de la forma $aN + bN'$ con $(a, b) \neq (0, 0)$ determinan, salvo constantes, los vectores normales del haz de geodésicas perpendiculares a la geodésica k .

2.7. Perpendicular a una geodésica trazada por un punto

Dados un punto A y una geodésica orientada g de vector normal N , llamando D a la distancia de A a la geodésica g , si H es el vector normal de la geodésica h perpendicular a g trazada por el punto A , entonces para cierta orientación de g y de h se tiene que $\langle A, N \rangle = -\text{sh}D$ y $H = \frac{1}{\text{ch}D}(A \wedge N)$. Si $A \in g$ entonces $\text{ch}D = 1$ y $H = A \wedge N$.

Suponiendo que A pertenece al semiplano interior a la geodésica orientada g si B es el punto común a las geodésicas g y h (figura 11), entonces:

$$A = B \text{ch}D + N \text{sh}D \quad \text{y} \quad \langle A, N \rangle = \langle N, N \rangle \text{sh}D = -\text{sh}D,$$

y la geodésica h viene dada por la ecuación $h \equiv A \text{ch}t + N \text{sh}t$.

Y dado que H es ortogonal a A y a N , basta considerar que:

$$\langle A \wedge N, A \wedge N \rangle = -1 - \langle A, N \rangle^2 = -\text{ch}^2D.$$

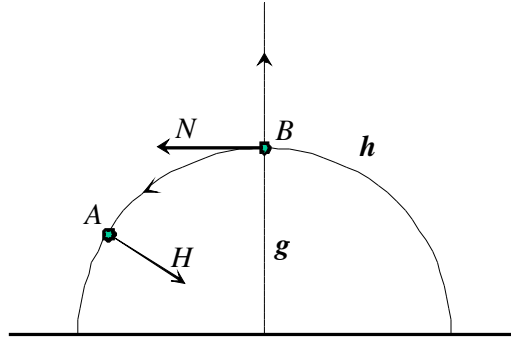


Figura 11

2.8. Paralelas a una geodésica trazadas por un punto

Dados una geodésica g , de vector normal N , y un punto A no perteneciente a ella, de manera que $\langle A, N \rangle > 0$, las dos geodésicas paralelas a g que pasan por A , tienen vector normal:

$$K = \frac{1}{\text{ch}^2 D} [A \text{ sh } D - N \pm (A \wedge N) \text{ sh } D],$$

siendo D la distancia del punto A a la geodésica g .

Es suficiente considerar que $\langle A, N \rangle = \text{sh } D$ y comprobar que $\langle A, K \rangle = 0$, $\langle N, K \rangle = 1$ y $\langle K, K \rangle = -1$.

Según qué signo del último sumando se utilice, se obtiene una u otra paralela de las dos posibles. Cualquiera de ellas tendría una orientación concordante con la orientación de la geodésica g inducida por el vector N (figura 12).

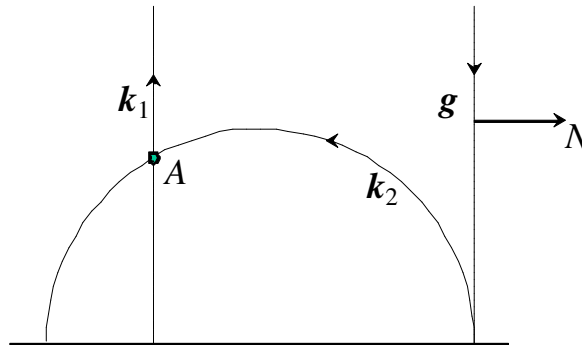


Figura 12

3. Representaciones geométricas

3.1. Proyección del modelo $sl_2(\mathbb{R})$ del plano hiperbólico H sobre los modelos del semiplano y del disco

Como ya se ha dicho (epígrafe 1.1), toda matriz de H puede expresarse de la forma:

$$Z = \frac{1}{y} \begin{pmatrix} x & -x^2 - y^2 \\ 1 & -x \end{pmatrix} \quad ; y > 0, \quad (3.1)$$

que se corresponde con el punto $x + iy \in \mathcal{H}$, de acuerdo con la biyección entre \mathcal{H} y H :

$$F_2(z) = \frac{1}{\text{Im}(z)} \begin{pmatrix} \text{Re}(z) & -|z|^2 \\ 1 & -\text{Re}(z) \end{pmatrix},$$

o, de modo equivalente, al punto $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in H$ le corresponde $\frac{a+iy}{c} \in \mathcal{H}$, que mediante la

biyección $h(z) = i \frac{z-i}{z+i}$ se transforma en

$$w = i \frac{a + i(1-c)}{a + i(1+c)} = \frac{2ac + i(1+a^2-c^2)}{a^2 + (1+c)^2} \in \mathcal{D}. \quad (3.2)$$

3.2. Representación de geodésicas en el disco de Poincaré

1. La semirrecta euclídea $u + \lambda i, \lambda > 0$, de \mathcal{H} se corresponde con

$$w = i \frac{u + i(\lambda - 1)}{u + i(\lambda + 1)} = \frac{2u + (u^2 + \lambda^2 - 1)i}{u^2 + (\lambda + 1)^2} \in \mathcal{D}$$

y está determinada por el conjunto de matrices

$$\frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} u & -(u^2 + \lambda^2) \\ 1 & -u \end{pmatrix} \in H, \lambda > 0$$

. Los extremos de la geodésica serían

$$u \equiv \begin{pmatrix} u & -u^2 \\ 1 & -u \end{pmatrix} = U, \infty \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = V$$

y si N es el vector normal de la geodésica:

$$N = \frac{1}{\langle U, V \rangle} (V \wedge U) = \begin{pmatrix} 1 & -2u \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

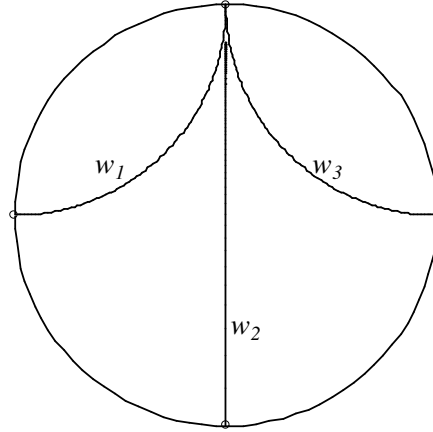


Figura 13

Las geodésicas correspondientes en \mathcal{D} serían, respectivamente (figura 13):

$$w_1(\lambda) = \frac{-2 + \lambda^2 i}{1 + (\lambda + 1)^2}, w_2(\lambda) = i \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \text{ y } w_3(\lambda) = \frac{2 + \lambda^2 i}{1 + (\lambda + 1)^2}, \lambda > 0.$$

y los vectores normales de las geodésicas son:

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, N_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. La matriz $\frac{1}{\sin t} \begin{pmatrix} \cos t & -r \\ \frac{1}{r} & -\cos t \end{pmatrix}$ determina la semicircunferencia euclídea de radio r de \mathcal{H}

: $r(\cos t + i \sin t), 0 < t < \pi$, de extremos

$$r \equiv \begin{pmatrix} 1 & -r \\ \frac{1}{r} & -1 \end{pmatrix}, -r \equiv \begin{pmatrix} -1 & -r \\ \frac{1}{r} & 1 \end{pmatrix}$$

, y el vector normal a la geodésica sería $\begin{pmatrix} 0 & -r \\ -\frac{1}{r} & 0 \end{pmatrix}$. En el disco \mathcal{D} la geodésica tendría

ecuación:

$$\frac{2ac + i(1 + a^2 - c^2)}{a^2 + (1 + c)^2} = \frac{2r \cos t + i(r^2 - 1)}{2r \sin t + r^2 + 1}$$

En los casos particulares $r = 1, r = 2, r = \frac{1}{2}$ obtenemos, respectivamente,

$$\left(\frac{2 \cos t}{2 \sin t + 1 + 1}, 0 \right), \left(\frac{4 \cos t}{4 \sin t + 5}, \frac{3}{4 \sin t + 5} \right) \text{ y } \left(\frac{4 \cos t}{4 \sin t + 5}, \frac{-3}{4 \sin t + 5} \right).$$

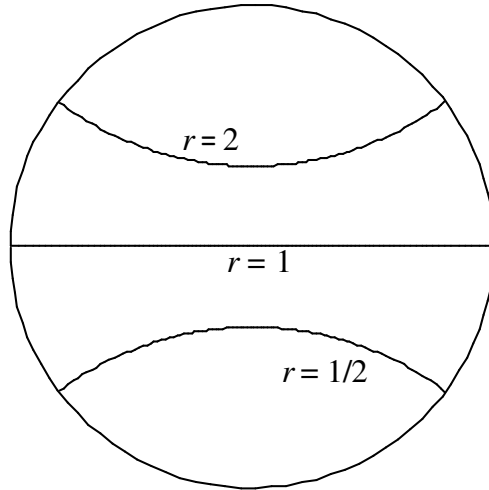


Figura 14

3.3. Geodésicas de vector normal dado

Como ya se dijo más arriba (epígrafe 2.3), si una geodésica γ de H tiene vector normal $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$, según que $c = 0$ y $a = 1$ o $c \neq 0$,

$$\gamma(t) = \frac{1}{2\sqrt{t(1-t)}} \begin{pmatrix} -b(1-t) & \frac{1}{2}b^2(t-1) - 2t \\ 2(1-t) & b(1-t) \end{pmatrix}, 0 < t < 1$$

o, si $c > 0$:

$$\gamma(t) = \frac{1}{2\sqrt{t(1-t)}} \begin{pmatrix} a + 2t - 1 & -\frac{1}{c}(4at + (a-1)^2) \\ c & 1 - a - 2t \end{pmatrix}, 0 < t < 1$$

En el primer caso ($c = 0, a = 1$), la geodésica correspondiente en el semiplano \mathcal{H} tendría ecuación:

$$z(t) = \frac{-b(1-t) + 2i\sqrt{t(1-t)}}{2(1-t)}, 0 < t < 1,$$

y en el disco de Poincaré \mathcal{D} , siendo

$$w(t) = i \frac{z(t) - i}{z(t) + i} = i \frac{-b(1-t) + 2i(\sqrt{t(1-t)} - (1-t))}{-b(1-t) + 2i(\sqrt{t(1-t)} + (1-t))},$$

$w(t) = i \frac{b^2(1-t) + 4(2t-1) + 4ib(1-t)}{b^2(1-t) + 4(1 + 2\sqrt{t(1-t)})}$ y resulta:

$$w(t) = \frac{-4b(1-t) + i(b^2(1-t) + 4(2t-1))}{b^2(1-t) + 4(1 + 2\sqrt{t(1-t)})}, 0 < t < 1 \quad (3.3)$$

que son geodésicas del disco \mathcal{D} con un extremo común en i (figura 15).

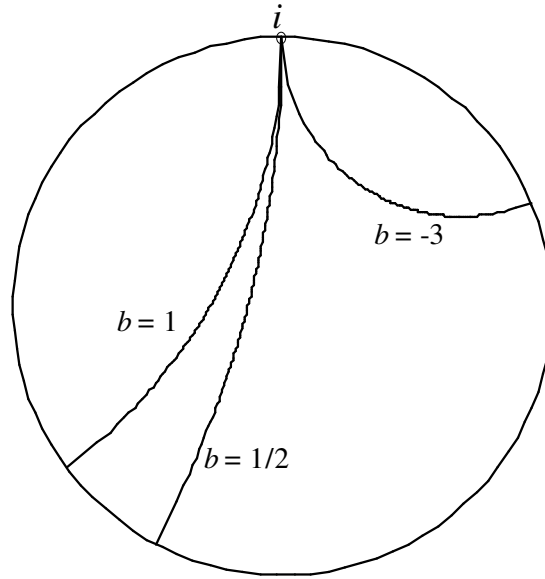


Figura 15

En el segundo caso ($c \neq 0$), $\gamma(t) = \frac{1}{2\sqrt{t(1-t)}} \begin{pmatrix} a + 2t - 1 & -\frac{1}{c}(4at + (a-1)^2) \\ c & 1 - a - 2t \end{pmatrix}$

$$z(t) = \frac{a + 2t - 1 + 2i\sqrt{t(1-t)}}{c}, 0 < t < 1,$$

y, siendo

$$\begin{aligned} h(z) &= i \frac{z(t) - i}{z(t) + i} = i \frac{a + 2t - 1 + i(2\sqrt{t(1-t)} - c)}{a + 2t - 1 + i(2\sqrt{t(1-t)} + c)} \\ &= i \frac{(a + 2t - 1)^2 + 4t(1-t) - c^2 - 2ic(a + 2t - 1)}{(a + 2t - 1)^2 + (2\sqrt{t(1-t)} + c)^2}, \end{aligned}$$

obtenemos la ecuación de la geodésica correspondiente en el disco de Poincaré:

$$w(t) = \frac{2c(a + 2t - 1) + i(4at + (a-1)^2 - c^2)}{(a + 2t - 1)^2 + (2\sqrt{t(1-t)} + c)^2}, 0 < t < 1 \quad (3.4)$$

Así, las geodésicas de vectores normales $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} -3 & -\frac{8}{3} \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ tendrían la siguiente representación: en el disco \mathcal{D} :

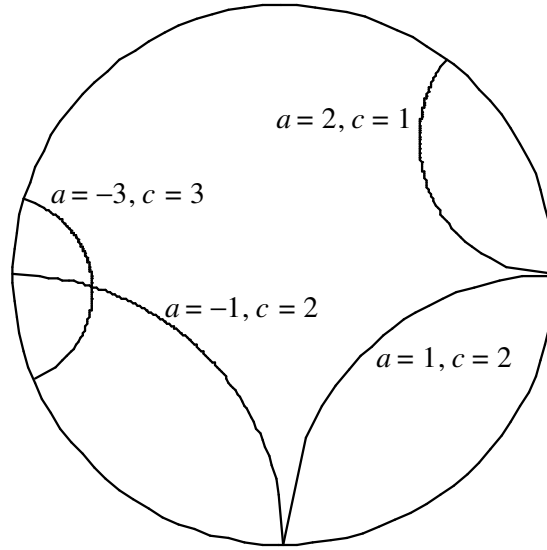


Figura 16

3.4. Circunferencias hiperbólicas

3.4.1. Ecuación de la circunferencia

Considerando que en \mathcal{H} la distancia $\delta = d(z, w)$ entre dos puntos $z = p + iq, w = x + iy$, con $q > 0$ e $y > 0$, viene dada por

$$\operatorname{ch} d(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2 \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w)},$$

o. equivalentemente, $\operatorname{ch} \delta = 1 + \frac{(p - x)^2 + (q - y)^2}{2qy}$, es posible, en cada caso particular, obtener la ecuación de la circunferencia hiperbólica en \mathcal{H} con centro $w = p + iq, q > 0$, y radio δ , cuya longitud y área hiperbólicas son, respectivamente, $L = 2\pi \operatorname{sh} \delta$ y $S = \pi \operatorname{sh}^2 \delta$.

Análogamente, como en \mathcal{D} la distancia δ entre dos puntos z y w , con $|z| < 1$ y $|w| < 1$, viene determinada por

$$\operatorname{ch}^2 \frac{1}{2} \delta = 1 + \frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)},$$

que puede escribirse como $\frac{\operatorname{ch} \delta - 1}{2} = \frac{(p - x)^2 + (q - y)^2}{(1 - (p^2 + q^2))(1 - (x^2 + y^2))}$, esta igualdad permite obtener la ecuación de la circunferencia hiperbólica en \mathcal{D} con centro $w = p + iq, |w| < 1$, y radio δ .

Sea, por ejemplo, $z = 0$ y $\operatorname{ch} \delta = 2$. Entonces $\frac{1}{2} = \frac{x^2 + y^2}{1 - (x^2 + y^2)} : y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - 3x^2}$. Así, $C \equiv x^2 + y^2 - \frac{1}{3} = 0$.

Y si $z' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ y $\operatorname{ch} \delta' = 3$, entonces $1 = \frac{(\frac{1}{2} - x)^2 + (\frac{1}{2} - y)^2}{\frac{1}{2}(1 - (x^2 + y^2))} : y = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{3} \sqrt{6x - 9x^2 + 1}$. Y $C' \equiv (x - \frac{1}{3})^2 + (y - \frac{1}{3})^2 = \frac{2}{9}$.

La circunferencia C tiene longitud $2\sqrt{3}\pi$, y la longitud de C' es $4\sqrt{2}\pi$.

3.4.2. Puntos de intersección de dos circunferencias secantes

Sea X un punto común a las circunferencias secantes de centros A, B y radios respectivos r, r' entonces $\langle A, X \rangle = \text{ch } r, \langle B, X \rangle = \text{ch } r'$.

En el caso anterior, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv 0, B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ y $\text{ch } r = 2, \text{ch } r' = 3,$

y si $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \langle X, X \rangle = -a^2 - bc = 1,$ entonces

$$AX = \begin{pmatrix} -c & a \\ a & b \end{pmatrix} \text{ y } BX = \begin{pmatrix} 2a - 5c & 5a + 2b \\ a - 2c & 2a + b \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $-\frac{1}{2}(b - c) = 2$ y $b = c - 4,$ $-\frac{1}{2}(2a - 5c + 2a + b) = 3$ y $b = 5c - 4a - 6.$ Así, $c - 4 = 5c - 4a - 6$ y $c = a + \frac{1}{2}, b = a - \frac{7}{2}.$ Y como $-a^2 - bc = 1$ entonces $a^2 + (a - \frac{7}{2})(a + \frac{1}{2}) = -1$ y $a = \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{15}, c = \frac{5}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{15}.$ Es decir,

$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{15} & -\frac{11}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{15} \\ \frac{5}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{15} & -(\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{15}) \end{pmatrix}$ y los puntos correspondientes en \mathcal{D} serían

$$P = \frac{15+4\sqrt{15}-i\sqrt{15}}{30+6\sqrt{15}} \text{ y } Q = \frac{-15+4\sqrt{15}-i\sqrt{15}}{-30+6\sqrt{15}}.$$

Si las circunferencias fueran tangentes obtendríamos una sola solución: el punto de tangencia de ambas circunferencias.

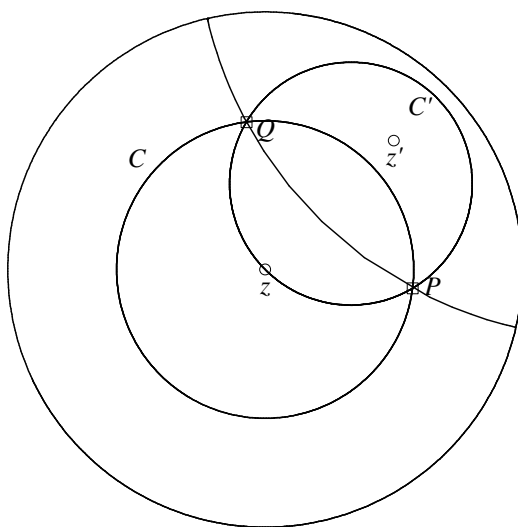


Figura 17

3.4.3. Tangentes a una circunferencia

Primer procedimiento

Dada la circunferencia hiperbólica de centro A y radio $r,$ si P es un punto exterior las geodésicas t y $t',$ tangentes a la circunferencia trazadas por el punto P pueden obtenerse del modo siguiente.

Sea $T \in t$ uno de los puntos de tangencia, entonces, como $\text{ch } d(A, P) = \text{ch } d(P, t) \text{ch } r$ (teorema de Pitágoras, apartado 3.4.6), se tiene que $\text{ch } r = \langle A, T \rangle$ y $\langle A, P \rangle = \langle P, T \rangle \langle A, T \rangle$ y la

tangente t viene dada por la expresión matricial $\lambda P + (1 - \lambda)T, \lambda \in \mathbb{R}$. Las ecuaciones anteriores permitirán calcular los puntos de tangencia T y T' y trazar las dos tangentes a la circunferencia.

Segundo procedimiento

Si N es el vector normal de una de las tangentes se cumple que $\langle N, P \rangle = 0, \langle A, N \rangle = \text{sh } r$ y el punto de tangencia T es la intersección de la tangente y la geodésica perpendicular que pasa por A . Es decir, T está determinado por la matriz

$$(A \wedge N) \wedge N = \langle N, A \rangle N - \langle N, N \rangle A = N \text{sh } r + A.$$

3.4.4. Tangentes comunes a dos circunferencias

Dados los centros A y B de dos circunferencias hiperbólicas secantes de radios r_1 y r_2 , un procedimiento para trazar sus tangentes comunes consiste en hallar los vectores normales T de las geodésicas t tales que $d(A, t) = r_1$ y $d(B, t) = r_2 : \langle A, T \rangle = \text{sh } r_1, \langle B, T \rangle = \text{sh } r_2$, para cierta orientación de t .

Y si las circunferencias no son secantes existen otras geodésicas tangentes a ambas, de modo que $\langle A, T \rangle = -\text{sh } r_1, \langle B, T \rangle = \text{sh } r_2$.

En el caso de dos circunferencias exteriores se obtienen dos soluciones, y una sola si son tangentes.

3.4.5. Potencia de un punto respecto a una circunferencia. Eje radical de dos circunferencias. Centro radical de tres circunferencias

Definimos la potencia de un punto A respecto a una circunferencia C , de centro O y radio r , como el número real $p_C(A)$ tal que

$$p_C(A) = \frac{\text{ch } d(A, O)}{\text{ch } r} \geq \frac{1}{\text{ch } r},$$

de modo que $\frac{1}{\text{ch } r} \leq p_C(A) < 1, p_C(A) = 1$ o $p_C(A) > 1$ según que el punto A sea interior a la circunferencia, un punto de ella o exterior a ella.

Se llama *eje radical* de dos circunferencias al lugar geométrico de los puntos que tienen igual potencia respecto a ambas. El eje radical es

perpendicular a la geodésica que une los centros. Si las circunferencias son secantes une los puntos comunes, y si son tangentes pasa por el punto de tangencia.

El *centro radical* de tres circunferencias es el punto que tiene la misma potencia respecto a las tres y es el punto común a los ejes radicales de cada par de circunferencias.

Si X es un punto del eje radical E_{12} de dos circunferencias de centros O_1, O_2 y radios r_1, r_2 entonces $\langle X, O_1 \rangle = \text{ch } d(X, O_1) = p \text{ch } r_1$ y $\langle X, O_2 \rangle = \text{ch } d(X, O_2) = p \text{ch } r_2$, siendo p el valor de la potencia de X respecto a ambas circunferencias.

Así, $p = \frac{\langle X, O_1 \rangle}{\text{ch } r_1} = \frac{\langle X, O_2 \rangle}{\text{ch } r_2} : \langle X, \frac{1}{\text{ch } r_1} O_1 - \frac{1}{\text{ch } r_2} O_2 \rangle = 0$, para todo $X \in E_{12}$, y la matriz $\frac{1}{\text{ch } r_1} O_1 - \frac{1}{\text{ch } r_2} O_2$ determina, salvo constantes, el vector normal N_{12} del eje radical de las circunferencias. Obsérvese que $\langle \frac{1}{\text{ch } r_1} O_1 - \frac{1}{\text{ch } r_2} O_2, O_1 \wedge O_2 \rangle = 0$, lo que muestra la perpendicularidad del eje radical E_{12} y la geodésica $O_1 O_2$.

Si una tercera circunferencia tiene centro O_3 y radio r_3 , entonces el centro radical de las tres circunferencias viene determinado por la matriz

$$\left(\frac{1}{\text{ch } r_1} O_1 - \frac{1}{\text{ch } r_2} O_2\right) \wedge \left(\frac{1}{\text{ch } r_2} O_2 - \frac{1}{\text{ch } r_3} O_3\right) \sim \\ (O_1 \wedge O_2) \text{ch } r_3 + (O_2 \wedge O_3) \text{ch } r_1 + (O_3 \wedge O_1) \text{ch } r_2 = \Omega$$

donde el símbolo \sim indica que las son matrices iguales salvo constantes.

Según que $\det \Omega > 0$, $\det \Omega = 0$ o $\det \Omega < 0$, la matriz Ω , una vez normalizada, determina un punto propio, un punto impropio (intersección en ambos casos de los ejes radicales, secantes o paralelos, respectivamente) o el vector normal a la geodésica perpendicular común a los tres ejes radicales, ultraparalelos en ese caso.

Para que $\det \Omega = \langle \Omega, \Omega \rangle \geq 0$ es necesario y suficiente que

$$2c_3c_1(c_{32}c_{21} - c_{31}) + 2c_2c_3(c_{21}c_{13} - c_{23}) + 2c_1c_2(c_{13}c_{32} - c_{12}) \geq s_{12}^2c_3^2 + s_{23}^2c_1^2 + s_{31}^2c_2^2,$$

donde $c_i = \text{ch } r_i$, $c_{jk} = \langle O_j, O_k \rangle$, $s_{jk} = \text{sh } r_j$.

Por otra parte, para que el centro radical exista y sea un punto propio o impropio X , se requiere que dos ejes radicales cualesquiera sean secantes; por ejemplo, E_{12} y E_{23} . y entonces X sería el vértice de un cuadrilátero con dos ángulos rectos, cuyos lados son segmentos de las geodésicas $E_{12}, O_1O_2, O_2O_3, E_{23}$ y X el punto común a E_{12} y E_{23} .

En todo cuadrilátero, si λ_i y α_i son los lados y los ángulos, de modo que $\lambda_i = A_iA_{i+1}$, $\lambda_4 = A_4A_1$, $\alpha_i = \widehat{\lambda_{i-1}\lambda_i}$, $\alpha_1 = \widehat{\lambda_4\lambda_1}$:

$$\kappa_4 = \sigma_1(S_1S_2 - C_1\kappa_2C_2)\sigma_3 - (\kappa_1\sigma_2C_2\sigma_3 + \sigma_1C_1\sigma_2\kappa_3) + \kappa_1\kappa_2\kappa_3,$$

donde $\kappa_i = \cos \alpha_i$, $\sigma_i = \sin \alpha_i$, $C_i = \text{ch } \lambda_i$, $S_i = \text{sh } \lambda_i$.

(Cfr. [3] Capítulo 2: Proposición 2.4.4)

En nuestro caso, si $\widehat{O_1O_2O_3} = \alpha_2 = \alpha$ y $\kappa_4 = \kappa$, entonces $\alpha_1 = \alpha_3 = \frac{\pi}{2}$ y $\kappa = S_1S_2 - C_1C_2 \cos a$, siendo $\kappa = 1$ si el centro radical es un punto impropio.

Así, la condición necesaria y suficiente para que E_{12} y E_{23} sean secantes sería $-1 \leq S_1S_2 - C_1C_2 \cos a \leq 1$ y, por tanto:

$$\frac{-1 + S_1S_2}{C_1C_2} \leq \cos a \leq \frac{1 + S_1S_2}{C_1C_2},$$

siendo $S_1 = |\langle O_2, N_{12} \rangle|$, $S_2 = |\langle O_2, N_{23} \rangle|$.

Obsérvese que $\frac{-1 + S_1S_2}{C_1C_2} = \frac{-1}{C_1C_2} + \frac{S_1S_2}{C_1C_2} < \frac{-1}{C_1C_2} + 1 < 1$, lo que muestra que la inecuación anterior siempre admite soluciones para α .

3.5. Triángulos

Las fórmulas siguientes y su demostración pueden encontrarse en cualquier texto específico de geometría hiperbólica.

Dados los vértices de un triángulo A, B, C , si denominamos a sus ángulos $\widehat{A} = \alpha, \widehat{B} = \beta, \widehat{C} = \gamma$, su área es $S = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ (fórmula de Gauss-Bonnet) y las relaciones entre sus lados y sus ángulos serían:

$$\cos \gamma = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{ch} c - \cos \alpha \cos \beta$$

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \cos \gamma$$

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sh} a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sh} b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sh} c}$$

Si el triángulo es rectángulo ($\gamma = \frac{\pi}{2}$), entonces $\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \cot \alpha \cot \beta$.

3.5.1. Medianas y baricentro de un triángulo

El punto medio M de un segmento hiperbólico \overline{XY} viene dado, salvo constantes, por $X + Y = \lambda M$, siendo $\lambda = (2 + 2\langle X, Y \rangle)^{-1/2}$, para que $\det M = 1$:

$$\langle X, X + Y \rangle = \langle X + Y, Y \rangle = 1 + \langle X, Y \rangle \text{ y } d(X, M) = d(M, Y).$$

Se considera el triángulo de vértices A, B, C : los puntos medios de los lados, M_a, M_b y M_c , están determinados por las matrices $B + C \sim M_a$, $C + A \sim M_b$ y $A + B \sim M_c$, y las medianas pueden representarse mediante la ecuación $m_a(t) = tA + (1 - t)M_a, 0 \leq t \leq 1$, y las otras dos ecuaciones análogas, teniendo en cuenta que cada punto de la mediana debe ser una matriz de determinante 1.

El baricentro G viene dado la matriz $A + B + C \sim G$:

$$\begin{aligned} \langle A + B + C, A \wedge M_a \rangle &= \operatorname{vol}(A + B + C, A, M_a) \\ &= \operatorname{vol}(A, A, M_a) + \operatorname{vol}(B + C, A, M_a) \\ &= \lambda \operatorname{vol}(B + C, A, B + C) = 0, \end{aligned}$$

siendo $\lambda = (2 + 2\langle B, C \rangle)^{-1/2}$. Así, el punto D pertenece a la mediana $\overline{AM_a}$, y análogamente se prueba su pertenencia a las otras dos medianas.

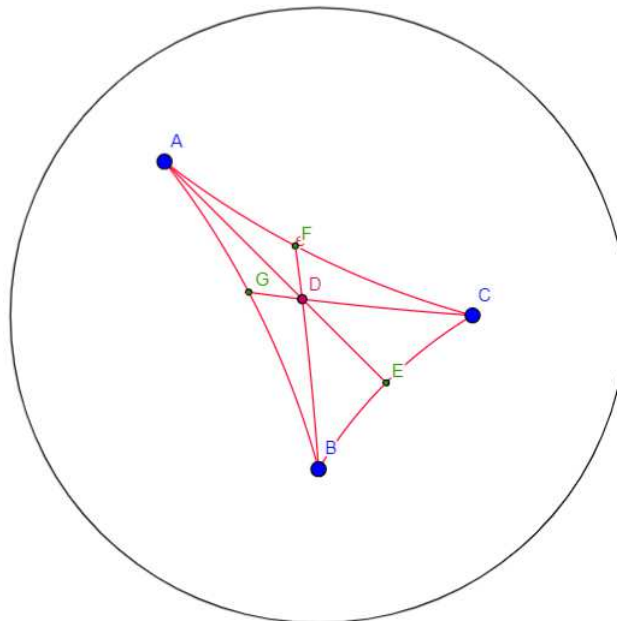


Figura 18: Baricentro de un triángulo

3.5.2. Alturas y ortocentro de un triángulo

La altura respecto al vértice A , perpendicular a la geodésica BC trazada por A , está

determinada por la matriz

$$A \wedge (B \wedge C) = \langle A, C \rangle B - \langle A, B \rangle C = B \operatorname{ch} b - C \operatorname{ch} c$$

y, si calculamos

$$(A \operatorname{ch} a - B \operatorname{ch} b) \wedge (B \operatorname{ch} b - C \operatorname{ch} c) = A \operatorname{ch} a \wedge B \operatorname{ch} b + B \operatorname{ch} b \wedge C \operatorname{ch} c + C \operatorname{ch} c \wedge A \operatorname{ch} a$$

se obtiene, salvo constantes, la matriz asociada al ortocentro, punto de intersección de las alturas.

3.5.3. Mediatrices de los lados de un triángulo. Circuncentro

La mediatriz de un segmento es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de sus extremos y es una geodésica perpendicular al segmento que pasa por su punto medio.

Si A y B son los extremos del segmento hiperbólico y P es cualquier punto de la mediatriz entonces $\langle A, P \rangle = \langle B, P \rangle$.

Por otra parte, $A + B$ y $A \wedge B$ determinan, salvo constantes, el punto medio M de \overline{AB} y el vector normal de la geodésica AB , la mediatriz viene dada por la matriz $M \wedge (A \wedge B)$, que, una vez normalizada, corresponde al vector normal de dicha mediatriz. Obsérvese que

$$\begin{aligned} (A + B) \wedge (A \wedge B) &= \langle A, B \rangle A - \langle A, A \rangle B + \langle B, B \rangle A - \langle B, A \rangle B \\ &= \langle A, B \rangle (A - B) + A - B = (A - B)(1 + \langle A, B \rangle) \sim A - B. \end{aligned}$$

Y los vectores normales de las otras dos mediatrices estarían asociados a las matrices $B - C$ y $C - A$.

El circuncentro O , intersección de las mediatrices, queda determinado por la matriz

$$(A - B) \wedge (B - C) = A \wedge B - A \wedge C + B \wedge C$$

y la circunferencia circunscrita tendría centro O y radio r : $\operatorname{ch} r = \langle O, A \rangle = \langle O, B \rangle = \langle O, C \rangle$.

Obsérvese que, por ejemplo, $\langle (A - B) \wedge (B - C), C \rangle = \langle A \wedge B, C \rangle = \operatorname{vol}(A, B, C)$ y el resultado no depende del segundo factor, A, B o C , del producto escalar.

3.5.4. Bisectrices de los ángulos de un triángulo. Incentro

Dado un triángulo ABC , si A' es el punto de la bisectriz del ángulo $\hat{A} = \alpha$ perteneciente al lado opuesto a , entonces:

$$\frac{\operatorname{sh} b'}{\operatorname{sh} b} = \frac{\operatorname{sh} c'}{\operatorname{sh} c},$$

siendo $b' = d(A', C)$, $c' = d(A', B)$.

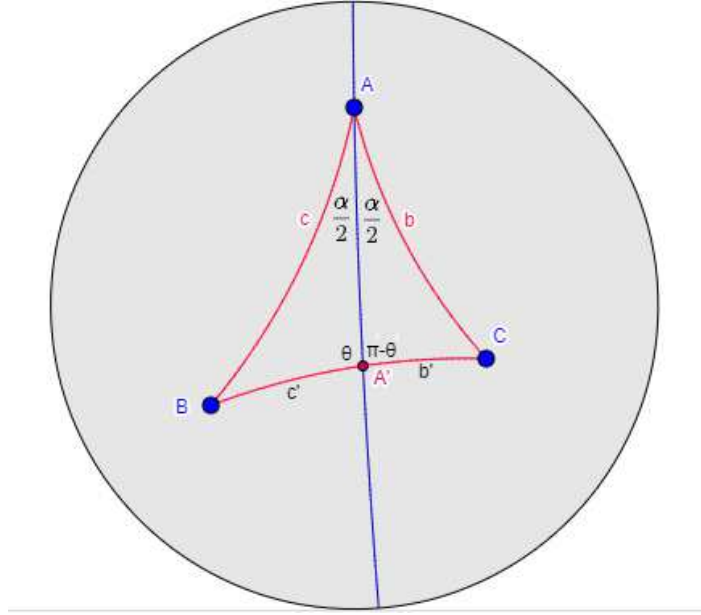


Figura 19

Como se puede observar, en los triángulos $AA'B$ y $AA'C$ se cumple, respectivamente, $\frac{\text{sh } c'}{\text{sen } \frac{\alpha}{2}} = \frac{\text{sh } c}{\text{sen } \gamma}$ y $\frac{\text{sh } b'}{\text{sen } \frac{\alpha}{2}} = \frac{\text{sh } b}{\text{sen}(\pi - \gamma)}$. lo que prueba la igualdad anterior.

Para hallar A' consideramos la matriz $B \text{sh } b + C \text{sh } c \in sl_2(\mathbb{R})$, con determinante

$$\Delta = \langle B \text{sh } b + C \text{sh } c, B \text{sh } b + C \text{sh } c \rangle = \text{sh}^2 b + 2 \text{ch } a \text{sh } b \text{sh } c + \text{sh}^2 c > 0$$

y, así, $X = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(B \text{sh } b + C \text{sh } c)$ es un punto propio de H que pertenece al segmento \overline{BC} , de manera que

$$\langle X, B \rangle = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\text{sh } b + \text{ch } a \text{sh } c) \text{ y } \langle X, C \rangle = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(\text{ch } a \text{sh } b + \text{sh } c)$$

y $\text{sh}^2 d(X, B) = \langle X, B \rangle^2 - 1$, $\text{sh}^2 d(X, C) = \langle X, C \rangle^2 - 1$. Es decir,

$$(\text{sh } b + \text{ch } a \text{sh } c)^2 - \Delta = \Delta \text{sh}^2 d(X, B) \text{ y } (\text{ch } a \text{sh } b + \text{sh } c)^2 - \Delta = \Delta \text{sh}^2 d(X, C)$$

Así,

$$\frac{\text{sh}^2 d(X, B)}{\text{sh}^2 d(X, C)} = \frac{(\text{sh } b + \text{ch } a \text{sh } c)^2 - \Delta}{(\text{ch } a \text{sh } b + \text{sh } c)^2 - \Delta} = \frac{\text{ch}^2 a \text{sh}^2 c - (\text{sh}^2 c)}{\text{ch}^2 a \text{sh}^2 b - (\text{sh}^2 b)} = \frac{\text{sh}^2 a \text{sh}^2 c}{\text{sh}^2 a \text{sh}^2 b} = \frac{\text{sh}^2 c}{\text{sh}^2 b},$$

y $\frac{\text{sh } d(X, B)}{\text{sh } d(X, C)} = \frac{\text{sh } c}{\text{sh } b}$: el punto X de \overline{BC} coincide con A' , que puede expresarse como

$$A' = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(B \text{sh } b + C \text{sh } c), \text{ con } \Delta = \text{sh}^2 b + 2 \text{ch } a \text{sh } b \text{sh } c + \text{sh}^2 c.$$

Una vez hallado A' , es posible obtener el vector normal N_α de la bisectriz AA' del ángulo \hat{A} , pues $N_\alpha \sim A \wedge A'$:

$$N_\alpha \sim A \wedge (B \text{sh } b + C \text{sh } c)$$

Otra expresión para N_α se obtiene considerando que

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\text{sh } c} \langle N_\alpha, A \wedge B \rangle = \frac{1}{\text{sh } b} \langle N_\alpha, A \wedge C \rangle \text{ y } \langle N_\alpha, A \wedge \left(\frac{1}{\text{sh } c} B - \frac{1}{\text{sh } b} C \right) \rangle = 0.$$

Es decir, $\text{vol} \left(N_\alpha, A, \frac{1}{\text{sh } c} B - \frac{1}{\text{sh } b} C \right) = 0$ y $N_\alpha, A, \frac{1}{\text{sh } c} B - \frac{1}{\text{sh } b} C$ serían linealmente

dependientes. Siendo A y $\frac{1}{\text{sh}c}B - \frac{1}{\text{sh}b}C$ independientes, $N_\alpha \sim A + \mu(B - C)$. Por otra parte, $\langle A, N_\alpha \rangle = 0$ y, así,

$$1 + \mu \langle A, \frac{1}{\text{sh}c}B - \frac{1}{\text{sh}b}C \rangle = 1 + \mu \left(\frac{1}{\text{sh}c} \text{ch}c - \frac{1}{\text{sh}b} \text{ch}b \right) = 0 \text{ y } \mu = \frac{\text{sh}b \text{sh}c}{\text{ch}b \text{sh}c - \text{sh}b \text{ch}c},$$

es decir,

$$N_\alpha \sim A(\text{ch}b \text{sh}c - \text{sh}b \text{ch}c) + B \text{sh}b - C \text{sh}c,$$

Para hallar el incentro I , punto de intersección de las bisectrices, y centro de la circunferencia inscrita al triángulo, se tiene que cumplir $\langle I, N_\alpha \rangle = \langle I, N_\beta \rangle = 0$, siendo $\beta = \widehat{B}$, y entonces

$$I \sim A \text{sh}a + B \text{sh}b + C \text{sh}c,$$

al ser

$$\begin{aligned} \langle A \text{sh}a + B \text{sh}b + C \text{sh}c, N_\alpha \rangle &\sim \langle B \text{sh}b + C \text{sh}c, A \wedge (B \text{sh}b + C \text{sh}c) \rangle \\ &= (-\langle B, C \wedge A \rangle + \langle C, A \wedge B \rangle) \text{sh}b \text{sh}c \\ &= (-\text{vol}(A, B, C) + \text{vol}(A, B, C)) \text{sh}b \text{sh}c = 0 \end{aligned}$$

y análogamente para N_β .

El radio de la circunferencia inscrita, $r = d(I, BC)$ se obtiene calculando $(A \text{sh}a + B \text{sh}b + C \text{sh}c) \wedge (B \wedge C)$:

$$A \wedge (B \wedge C) \text{sh}a + B \wedge (B \wedge C) \text{sh}b + C \wedge (B \wedge C) \text{sh}c = A \wedge (B \wedge C) \text{sh}a = \text{vol}(A, B, C) \text{sh}a$$

y, siendo

$$\begin{aligned} \langle A \text{sh}a + B \text{sh}b + C \text{sh}c, A \text{sh}a + B \text{sh}b + C \text{sh}c \rangle &= \\ \text{sh}^2a + \text{sh}^2b + \text{sh}^2c + 2(\text{ch}a \text{sh}b \text{sh}c + \text{ch}b \text{sh}c \text{sh}a + \text{ch}c \text{sh}a \text{sh}b) &= \Delta' \end{aligned}$$

y $\langle B \wedge C, B \wedge C \rangle = 1 - \text{ch}^2a = -\text{sh}^2a$, se tiene que

$$\text{sh}r = \frac{1}{\text{sh}a \sqrt{\Delta'}} |\langle A \text{sh}a + B \text{sh}b + C \text{sh}c, B \wedge C \rangle| = \frac{1}{\text{sh}a \sqrt{\Delta'}} |\langle A \text{sh}a, B \wedge C \rangle| = \frac{|\text{vol}(A, B, C)|}{\sqrt{\Delta'}}$$

- [1] Iversen, B.: *Hyperbolic Geometry*. London Math. Soc., Student Texts **25**, Cambridge University Press (1992).
- [2] Fenchel, W.: *Elementary Geometry in Hyperbolic Space*. de Gruyter Studies Math. **11**, de Gruyter (1989).
- [3] J. L. García-Heras. *Construcción de polígonos hiperbólicos y aplicación a las regiones fundamentales de grupos cristalográficos no euclídeos*-UNED (2006).
- [4] *Geometría hiperbólica con Geogebra* (José Luis García Heras, Geogebra.org 2016).