

# DE LA ACCIÓN AL CONOCIMIENTO: APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS A PARTIR DE UN ENFOQUE ALGORÍTMICO EN EDUCACIÓN BÁSICA

José Macario López Balderas, Asociación Nacional por la Inclusividad Educativa en México, ANIEM, [jmlbalderas@gmail.com](mailto:jmlbalderas@gmail.com)

Magally Martínez Reyes, Centro Universitario UAEM Valle de Chalco, UAEMex, [mmartinezr@uaemex.mx](mailto:mmartinezr@uaemex.mx)

Miguel Delgado Pineda, Universidad Nacional de Educación a Distancia, España, [miguel@mat.uned.es](mailto:miguel@mat.uned.es)

Presentado en eXIDO 23



## Resumen

El presente trabajo conlleva una reflexión ontológica en el quehacer educativo de un docente al realizar intervenciones didácticas en 11 alumnos de tercer grado de una Telesecundaria de una localidad semirural en el Estado de México, mediante un estudio cuasi experimental se exploran sus procesos cognitivos al introducir una actividad lúdica denominada “El andar de una hormiga”, donde se lleva a cabo un acercamiento al desarrollo de un proceso algorítmico que sirve para la solución de un problema de medición que explora las propiedades de triángulos rectángulos y acercase a la noción del Teorema de Pitágoras. La aproximación identifica los niveles cognitivos según Piaget de los 11 alumnos y diferencia en cada uno qué procesos y qué herramientas utilizan para resolver este problema y generar su propio conocimiento.

**Palabras clave:** nivel cognitivo, aprendizaje lúdico, proceso algorítmico, educación básica.

## Resumen

The present work involves an ontological reflection on the educational work of a teacher when carrying out didactic interventions in 11 third grade students of a Telesecundaria of a semi-rural locality in the State of Mexico, through a quasi-experimental study explores their cognitive processes by introducing a playful activity called "The walk of an ant", where an approach to the development of an algorithmic process is carried out for the solution of a measurement problem that explores the properties of right triangles and approaches the notion of the Pythagorean Theorem. The approach identifies the cognitive levels according to Piaget of the 11 students and differentiates in each one which processes and tools they use to solve this problem and generate their own knowledge.

**Key words:** cognitive level, playful learning, algorithmic process, basic education.

## Introducción

### 1.1 El modelo de Telesecundaria

Según el modelo oficial de Telesecundaria (SEP, 2016) la labor docente consiste en *proveer las condiciones y situaciones pertinentes para que el alumno gestione su propio*

*aprendizaje*. Para desempeñar dicha labor debe conocer el plan y programas de estudio vigentes; tener conocimientos básicos acerca de los contenidos de las diferentes asignaturas con precisión y claridad conceptual; habilidades para planear y adecuar estrategias pedagógicas, por lo que se deben conocer los materiales y recursos educativos de los que dispone el docente; así como destrezas que le permitan promover acciones para mejorar la calidad educativa y el logro académico, y dar seguimiento al proceso educativo y administrativo del alumno. Cada docente debe promover el desarrollo integral de sus alumnos, a la vez que les acerca herramientas adecuadas para su propio aprendizaje, de modo que permita, en cada uno de ellos, el crecimiento y la expresión de sus propias capacidades (López, 2016).

El docente participa en el proceso de construcción y *asimilación de los conocimientos por parte del alumno* al adecuar las secuencias de aprendizaje que los especialistas, *que se desempeñan como diseñadores instruccionales en áreas federales, elaboran para cada asignatura como una sugerencia de cómo dar continuidad al proceso educativo* (SEP, 2016). Las propuestas deben ser contextualizarlas para que sean ejecutadas en congruencia con la circunstancia que las justifican. La evaluación es considerada como una parte importante del proceso educativo, una herramienta más para promover la autonomía autogestiva del aprendizaje por parte del alumno, y fuente de información relevante para implementar acciones de mejora pedagógica (López, 2016).

Como se sabe, la Telesecundaria opera con un solo maestro para todas las asignaturas, por lo que más que ser un especialista de contenidos, la función del docente es coordinar e impulsar el aprendizaje con el apoyo de diversos materiales y medios educativos. Con estos antecedentes se considera que las competencias básicas ideales con las que habrá de contar el docente, de las que para este trabajo interesan (SEP 2016):

- Diseñar situaciones de aprendizaje conforme las propuestas pedagógicas incluidas en los materiales educativos y los enfoques establecidos en el Plan de estudio vigente que respondan a las necesidades e intereses de los alumnos de Telesecundaria.
- Utilizar, de forma básica, las Tecnologías de la Información y Comunicación como herramientas de apoyo para incrementar el potencial didáctico en relación con los objetivos de enseñanza y aprendizaje.

## **1.2 La Telesecundaria Emperador Cuauhtémoc**

Los alumnos de la Telesecundaria 0598 “Emperador Cuauhtémoc” (figura 1) son jóvenes que oscilan entre los 11 y 19 años, el 60% de ellos son nativos del pueblo de Coatepec, mientras que un 40% provienen de distintos Estados de la República Mexicana, tales como: Guerrero, Oaxaca, Veracruz, Michoacán, Puebla, etcétera. Son jóvenes que por la condiciones socioculturales y geográficas en que se desenvuelven presentan obstáculos en la construcción de conocimientos, ya que muchos de ellos presentan resistencias y ausencia de vínculos comunicativos; tales resistencias fueron percibidos como mecanismos de defensa que desarrolla la comunidad en su idiosincrasia, observables en comportamientos que podríamos tipificar como negativos o antisociales para la conformación de un buen ambiente de aprendizaje escolar, derivados y producto de problemas interpersonales tales como: violencia familiar y social, condiciones precarias propias de una economía informal (comercio) y formal (campesinos, obreros y jornaleros), problemas de integridad y disfuncionalidad familiar, alta marginación económica, situaciones de abusos y acosos

sexuales entre la familia nuclear y extensa, embarazos no deseados, machismo, alcoholismo y abusos de poder de género, entre otros.

Algunos problemas específicos son: inseguridad, violencia, retrasos en el lenguaje (expresión escrita y verbal) y sentimientos de vulnerabilidad, fobias, celos. En cuanto a la actitud, la gran mayoría de son: egoístas, cínicos, rebeldes, perezosos, indisciplinados, inestables, embusteros, chantajistas, entre otros antivalores sociales. Sin embargo, en cuanto a las condiciones favorables o positivas, tenemos jóvenes con un alto índice de percepción educativa, se observan cualidades de acercamiento epistemológico mediante el uso adecuado de estrategias de trabajo acorde a sus necesidades intelectuales, tienen capacidad de respuesta frente a los desafíos intelectuales, presentan interés en proyectos colaborativos de carácter científico, tecnológico o cultural, tienen un alto sentido de la verdad y la responsabilidad cuando se les informan con antelación los propósitos generales de algún proyecto o estudio de caso, saben responder ante las necesidades de la escuela cuando se crea conciencia de las mismas a través de talleres de identidad sociocultural, presentan corresponsabilidad ante las inclemencias del tiempo o situaciones álgidas al mostrar empeño en las tareas a descentralizar tales como: la limpieza de la escuela, limpieza por inundaciones, faenas generales, etcétera (López, 2016).



Figura 1. Telesecundaria 0598 Emperador Cuauhtémoc, Estado de México

De esta caracterización de alumnos de la Telesecundaria 0598, tomaremos como sujetos de estudio a 11 estudiantes, que oscilan entre los 13 a 17 años, que concuerdan con la descripción previa y a los cuales identificaremos primero con un nivel cognitivo según la Teoría de Piaget (1971) así como la interrelación existente entre lenguaje y pensamiento conforme a la teoría de Vygotsky (1995), y posteriormente realizaremos la experimentación del proyecto de innovación educativo “El andar de una hormiga” para valorar para valorar la efectividad de la estrategia y observar las transiciones entre lenguaje y el nivel cognitivo inicial y la profundización del nivel cognitivo que posean al concluir la experimentación.

### 1.3 Niveles cognitivos piagetianos

La base de los procesos epistémicos del sistema educativo mexicano está integrada conforme a la teoría piagetiana (en la actual reforma educativa les llaman fases), la cual determina que los estudiantes desarrollan procesos lógicos matemáticos a partir de su ingreso al sistema de educación secundaria, ya que entran al estadio de las llamadas “operaciones abstractas”. La teoría de Piaget parte de los siguientes estadios por edad (Piaget, 1971):

Periodo	Estadio	Edad	Operaciones lógico-matemáticas
Sensoriomotora	Reflejos congénitos, esquemas de conducta previos, descubre por experimentación.	0-24 meses	
Preoperacional	Preconceptual e intuitivo, inicia el lenguaje, imita.	2-7 años	
Operaciones concretas	Razonamiento lógico aplicable a problemas concretos, ser social, esquemas lógicos para solucionar problemas y generalizar.	7-11 años	Procesos de seriación, ordenamiento mental de conjuntos y clasificación de conceptos de causalidad, espacio, tiempo y velocidad. Capacidad intelectual de manejar cantidades numéricas, longitudes, volúmenes y su conservación.
Operaciones formales o abstractas	Abstracción de conocimientos concretos que emplea razonamiento lógico, sentimientos idealistas y forma su personalidad. Inicia su proceso de adolescencia.	11 -15 años	Procesos de razonamiento lógico inductivo y deductivo, abstrae de fenómenos observados y concretos. Puede formular hipótesis y realizar abstracción reflexiva. El pensamiento lógico-matemático comprende procesos de clasificación (semejanzas en objetos concretos y abstractos), procesos de seriación (transitividad y reversibilidad), conteo de números

Tabla 1. Niveles cognitivos de Piaget.

Lo que podemos esperar según la Tabla 1, es que los estudiantes de Telesecundaria por edad estén en el estadio de las **operaciones abstractas**; sin embargo, el principio de realidad educativa muestra que la mayoría de ellos realiza aprendizajes basados en “**el ensayo y el error**”, ya que no existe un proceso sistemático y razonado que les permita generar conocimientos instruccionales, y esto se manifiesta en particular en la forma de abordar la resolución de problemas matemáticos.

Así que, la población en la que se busca analizar procesos cognitivos con la experimentación que se plantea más adelante como “El andar de una hormiga” son los 11 estudiantes. Estos estudiantes aparecen en la Tabla 2, donde se puede apreciar que cerca del 90% no cumple con los niveles cognitivos propios de su edad y de su nivel escolar según la clasificación piagetiana; ya que si bien, la gran mayoría tienen que ver con la capacidad cognitiva con lo que los estudiantes son capaces de resolver problemas, éstos en términos

pragmáticos presentan serios problemas de integración en el simple planteamiento del problema; es decir, en el proceso algorítmico.

Sujeto	Nivel cognitivo	Características observables
A	Operaciones formales	Cuando se le presenta un problema de matemáticas realiza procesos de abstracción y de pensamiento complejo, establece esquemas o dibujos para comprender el problema, investiga conceptos o palabras que no comprende, selecciona los datos del problema, busca fórmulas o relaciones que le ayuden a resolverlo, realiza operaciones y obtiene un resultado.
B	Operaciones concretas	Ante un problema de matemáticas se bloquea porque no comprende qué le preguntan, su incorporación lingüística es muy deficiente, intenta seleccionar datos, busca a sus compañeros para copiar su modo de proceder, aunque no lo entienda, busca relaciones que le ayuden a resolverlo, realiza algunas operaciones,
C	Operaciones concretas y preconceptuales	Hace el esfuerzo de entender un problema de matemáticas, tiende en ocasiones a bloquearse por la falta de familiaridad lingüística, dado que no comprende qué le preguntan. Sin embargo, investiga palabras que no entiende, intenta seleccionar datos, trata de ayudar a sus compañeros para iniciar alguna estrategia, busca relaciones que le ayuden a resolverlo por ensayo y error, realiza algunas operaciones.
D	Operaciones concretas y preconceptuales	Cuando se le presenta un problema de matemáticas realiza dibujos para comprender el problema, tiene un proceso de abstracción basado en aprendizajes previos, selecciona los datos del problema y busca relaciones que le ayuden a resolverlo por ensayo y error, realiza las actividades y operaciones y aunque obtenga un resultado erróneo tiene mucha lógica para intuir el resultado correcto. No obstante, se aburre con facilidad.
E	Operaciones concretas	Ante un problema de matemáticas tiende a bloquear sus procesos cognitivos, ya que no le gusta pensar, porque no comprende lo que le preguntan, intenta seleccionar datos, busca a sus compañeros para copiar su modo de proceder, aunque no lo entienda, busca relaciones que le ayuden a resolverlo de manera práctica, realizando algunas operaciones basadas en el ensayo y error.
F	Operaciones concretas y preconceptuales	Busca integrar desafíos cuando se le presenta un problema de matemáticas, trata de entender las palabras que le ayuden a comprender lo que le preguntan, intenta seleccionar datos, tiene cierta independencia intelectual para resolver el problema, no duda en relacionarse para un posible desarrollo colaborativo. Realiza la mayoría de las operaciones, pero induce su procedimiento por ensayo y error.
G	Operaciones concretas y preconceptuales	Si se le presenta un problema de matemáticas se bloquea porque no comprende qué le preguntan; es decir, acepta el desafío, pero su incapacidad se presenta cuando no entiende el contexto semántico y lingüístico en que se le presenta el problema, intenta seleccionar datos, busca a sus compañeros para copiar su modo de proceder, aunque no lo entienda, busca relaciones que le ayuden a resolverlo, realiza algunas operaciones.
H	Operaciones preconceptuales y formales	Frente a un problema de matemáticas realiza un proceso de abstracción de este, a partir de esquemas que le permitan comprender el problema, investiga conceptos o palabras que no comprende, selecciona los datos del problema, busca fórmulas o relaciones que le ayuden a resolverlo, registra sus procesos y realiza operaciones y obteniendo un resultado.
I	Operaciones preconceptuales	Cuando se le presenta un problema de matemáticas realiza esquemas o dibujos para comprender el problema, organiza su información, lo grafica o ilustra si es necesario e investiga conceptos o palabras que no comprende, seleccionando los

	y formales	datos del problema, busca fórmulas o relaciones que le ayuden a resolverlo, realiza operaciones y obtiene un resultado.
J	Operaciones concretas y preconceptuales	Si se le presenta un problema de matemáticas se bloquea porque no comprende qué le preguntan, intenta seleccionar datos, hace el esfuerzo intelectual de entenderlo, pero necesita la intervención de alguien que le ayude a comprender el problema, busca relaciones que le ayuden a resolverlo e inclusive colabora con ellos, realiza algunas operaciones.
K	Operaciones concretas	Ante un problema de matemáticas se bloquea porque no comprende qué le preguntan, es muy procedimental en las actividades, su proceso de desarrollo del problema se integra a través del seguimiento de instrucciones, intentando seleccionar datos, busca a sus compañeros para colaborar en su modo de proceder, aunque no lo entienda, busca relaciones que le ayuden a resolverlo, realiza algunas operaciones.

Tabla 2. Clasificación de los estudiantes de Telesecundaria por nivel cognitivo.

#### 1.4. Proceso algorítmico

De acuerdo con Wikipedia (2023) "un algoritmo (del latín *algorithmus* y este del griego *arithmos*, que significa «número», quizá también con influencia del nombre del matemático persa Al-Juarismi) es un conjunto de instrucciones o reglas definidas y no-ambiguas, ordenadas y finitas que permite, típicamente, solucionar un problema, realizar un cómputo, procesar datos y llevar a cabo otras tareas o actividades". En educación secundaria los procesos algorítmicos para solucionar problemas matemáticos o de ciencias deberían estar presentes por su nivel educativo y por la edad según su desarrollo cognitivo; sin embargo, los alumnos no llegan siquiera a este proceso algorítmico.

Partiendo epistémicamente significaría que los alumnos no logran integrarse a un proceso algorítmico, dados los obstáculos multifactoriales que impiden generar un ambiente propicio de enseñanza y aprendizaje, si se aíslan los problemas de actitud mencionados en la sección 1.2 entonces quedarían por analizar factores específicos de su proceso de construcción de conocimientos.

Los algoritmos se convierten en recursos esquemáticos para plasmar el modelo de la resolución de un problema matemático, y no existe una metodología o didáctica estándar que se pueda considerar efectiva para desarrollar la capacidad analítica de los estudiantes en formación, con respecto al diseño y construcción de modelos algorítmicos (Rúa et al., 2018).

Bajo una perspectiva científica en el campo de la matemática educativa, un algoritmo se refiere a un conjunto ordenado de instrucciones o pasos que se siguen para resolver un problema de forma efectiva o realizar una tarea específica. Los algoritmos son utilizados en diversas áreas de estudio, incluyendo las matemáticas, la informática y la ciencia en general, y proporcionan un enfoque estructurado y sistemático para realizar cálculos y resolver problemas matemáticos. Un algoritmo matemático puede ser representado de diversas formas: como una secuencia de pasos escritos en lenguaje natural, un diagrama de flujo, una tabla de decisión o incluso un programa de computadora. Los algoritmos están diseñados para ser ejecutados de manera precisa y dar resultados correctos si se siguen de forma adecuada (Wikipedia, 2023).

De manera que en este trabajo se buscará hacer evidentes los procesos que llevan a la solución de un problema en particular, identificando las herramientas que los alumnos requieren en cada paso y los procesos cognitivos a realizar, para de esta forma analizar qué sucede en la construcción de su conocimiento de forma individual.

### 1.5 La actividad lúdica “El andar de una hormiga”

El proyecto de innovación educativa iniciado por Delgado y Martínez (2020; 2021; 2022; 2023; ANIEM 2022) busca introducir una actividad atractiva para experimentar ideas y conceptos matemáticos como una forma de introducción al pensamiento funcional. La situación inicial es intentar responder la pregunta ¿a qué distancia está una hormiga del vértice azul si recorre uno (o más lados) de un cuadrado unitario? La primera dificultad al que se enfrenta un estudiante es trazar un cuadrado, para facilitar este proceso en nivel secundaria se parte de una hoja blanca de tamaño carta y hacer un doblez preciso que permita generar el cuadrado y que se asegure de cumplir las propiedades de este, para ello se requiere de regla graduada y transportador para asegurarse de las medidas de lados, ángulos y diagonales, ver figura 2.

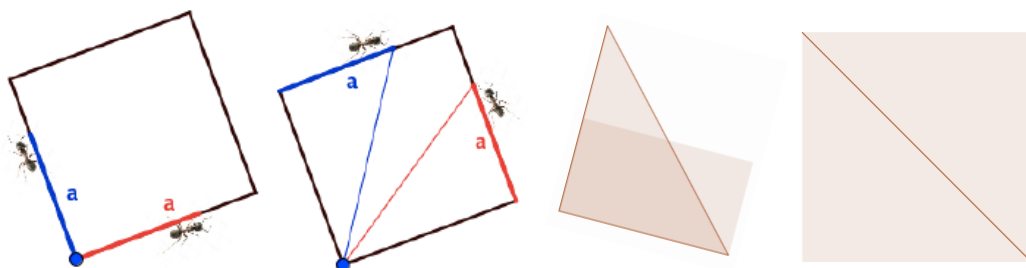


Figura 2. Problema del andar de una hormiga y generación del cuadrado por doblez.

En la secuencia didáctica para trabajar con el cuadrado y la hormiga, se fija un vértice y un sentido desde donde inicia el recorrido una hormiga, luego se realizan tres marcas en cada lado del cuadrado y se pide a los estudiantes medir la distancia del punto inicial hasta cada una de las marcas, observando que una **medida** corresponde al término **recorrido** y otro al de **distancia**, donde la distancia siempre será la medida más corta de inicio a fin.

En esta etapa se van formando triángulos rectángulos entre el recorrido y la distancia a algunas de las marcas, por lo que se pide a los alumnos trazar estos triángulos e intentar relacionar medidas de cada lado (cateto opuesto, cateto adyacente e hipotenusa) sin mencionar los términos formales, y preguntarles qué tipo de triángulos se forman.

Al ir trabajando con diversos triángulos rectángulos que colorearon se espera que los alumnos intuyan las propiedades del triángulo rectángulo a partir de la medición tabular, y logren llegar a **identificar la medida de una hipotenusa como la representación de una raíz cuadrada** que dará paso al finalizar al Teorema de Pitágoras.

De tal manera que el planteamiento de introducir la actividad lúdica del “andar de una hormiga”, permite crear ciertas condiciones algorítmicas para la solución del problema; ya que se debe **distinguir entre distancia y recorrido**, luego encontrar una relación entre ellas y describir lo que sucede con ese fenómeno, además de verificar que **contar y medir son dos actividades distintas, pues se enfrentan a medidas no exactas**.

Finalmente, seleccionan un triángulo y relacionan las medidas de los catetos con el recorrido, la medida de la hipotenusa con la distancia, y la relación entre la suma de los catetos y la hipotenusa, llegando al cuadrado de esas medidas y su expresión como  $a^2$ ,  $b^2$  y  $c^2$  mediante el llenado de una tabla, para concluir investigan el Teorema de Pitágoras. En este tipo de problema lúdico se parte de una acción para llegar a un conocimiento, y como se evidenciará más adelante la intención didáctica de la hormiga es en sí, un enfoque algorítmico.

## **Metodología**

Esta investigación fundamenta su metodología en la praxis de recolección de información de tipo cualitativo, descriptivo y de observaciones, para descubrir de manera discursiva los niveles cognitivos de cada uno de los 11 alumnos de Telesecundaria seleccionados como población de estudio, al iniciar el proceso de resolución del problema del “andar de una hormiga” y compararlo con el nivel cognitivo final al concluir el proceso.

Se fundamenta epistemológicamente el tipo de proceso algorítmico seguido por la población de estudio en la solución del problema del “andar de la hormiga”, producto de la implementación de técnicas e instrumentos generados expresamente para esta actividad y nivel educativo. La recolección de la información permite realizar una práctica cuasi experimental derivada de la intervención didáctica considerando los diferentes estilos y ritmos de aprendizaje, sus obstáculos cognitivos y la integración del pensamiento algorítmico.

## **Desarrollo**

### **3.1 Primer proceso del problema del andar de una hormiga**

- a) El trazado de un cuadrado en una hoja blanca, mediante dobleces, requiere de una motricidad fina, dada la precisión de los dobleces cortar o recortar (con tijeras o manual) para dejar solo un cuadrado.
- b) Para verificar que el cuadrado cumple con sus propiedades: cuatro lados de igual medida, dos diagonales de igual medida y cuatro ángulos de igual medida, entonces se verifican con el uso de regla y transportador.
- c) Se selecciona un vértice (punto inicial) desde donde partirá una hormiga para caminar alrededor del cuadrado (por el perímetro), se elige una dirección.

Estos primeros tres pasos corresponden al estadio de Operaciones concretas descrita por Piaget (1971) en la tabla 1, ver figura 3.



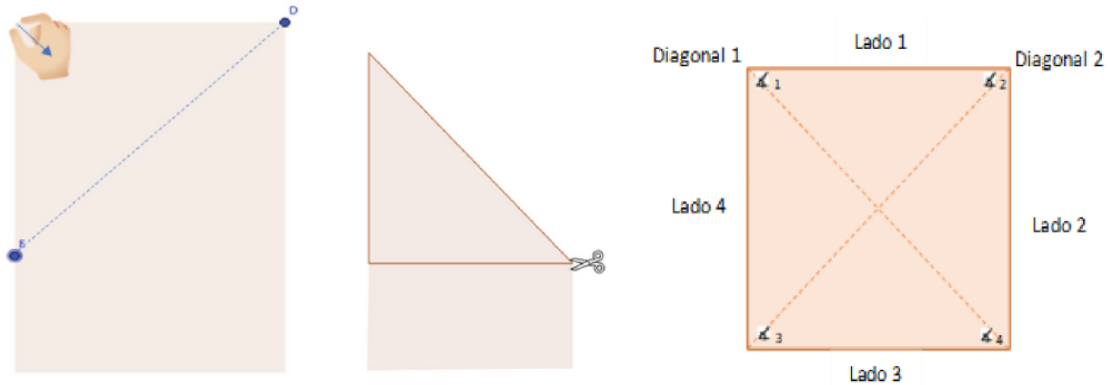


Figura 3. Doble de hoja para formar un cuadrado.

### 3.2 Segundo proceso del problema del andar de una hormiga

- Se realizan tres marcas en cada lado del cuadrado, doce en total, se solicita al alumno el llenado de una tabla de medidas donde se diferencia entre recorrido y distancia. En este proceso es importante la intervención del profesor para diferenciar entre medir y contar, así como entre recorrido por el perímetro del cuadrado y distancia como la medida más corta entre el punto inicial y punto final.
- Se procede a medir y colocar valores en la tabla, el alumno observa que en el primero y cuarto lados del cuadrado, el recorrido y la distancia son lo mismo. Esto no sucede en el segundo y tercer lado del cuadrado, donde el valor del recorrido es más largo y la distancia es más corta.
- El estudiante observa que se forman triángulos cuando se traza la distancia entre dos puntos en el cuadrado, procede a colorearlos. Deduce que estos triángulos son triángulos rectángulos, comienza a recordar algunas propiedades de este tipo de figura.

Estos tres pasos corresponden al tránsito de las Operaciones concretas a las Operaciones abstractas descritas por Piaget en la tabla 1, ver figura 4.



Figura 4. Recorrido de la hormiga en un cuadrado y registro de medidas en tabla.

### 3.3 Tercer proceso del problema del andar de una hormiga

- a) Se anima a los alumnos a realizar procesos inductivos para establecer la relación entre los lados del triángulo (cateto opuesto, cateto adyacente e hipotenusa). En este proceso es importante la intervención del profesor para fijar el objetivo de la actividad, no debe dar la respuesta ni nombrar formalmente cada lado del triángulo.
- b) Se relacionan las medidas de los lados del triángulo con las medidas del recorrido y la distancia que recorre la hormiga.
- c) Se construyen cuadrados con las medidas de cada lado del triángulo, las medidas de cada lado al cuadrado y se procede a llenar una tabla para comparar medidas.

Estos tres pasos corresponden a las fases finales de las Operaciones abstractas descritas por Piaget en la tabla 1, ver figura 5.



Figura 5. Construcción de cuadrados y triángulos para el recorrido de la hormiga.

### 3.4 Cuarto proceso del problema del andar de una hormiga

- a) Se eligen 5 medidas del cuadrado original y se seleccionan 5 triángulos rectángulos, de los que se obtienen las medidas  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c^2$  y  $a^2+b^2$ .
- b) Se deduce la relación entre los lados del triángulo y se induce numéricamente el Teorema de Pitágoras por transitividad.
- c) Finalmente, se investiga en la red la definición formal del Teorema de Pitágoras y se deduce si coinciden los resultados numéricos con la expresión algebraica.

Estos tres pasos corresponden a las fases finales de las Operaciones abstractas descritas por Piaget en la tabla 1, ver figura 6.

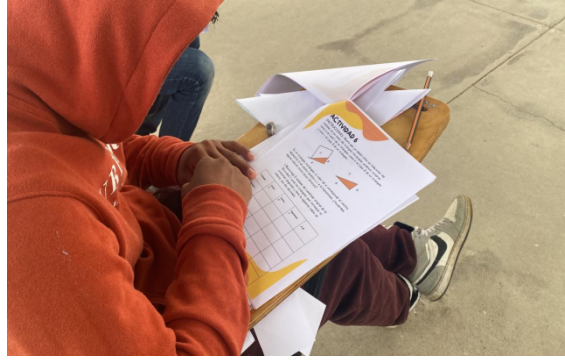
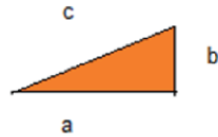
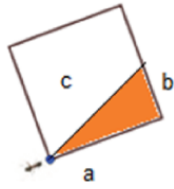


Figura 6. Último proceso para deducir el Teorema de Pitágoras.

## Resultados

El profesor decide hacer la actividad en el patio de la escuela, donde los alumnos salen con sus butacas y se instalan con cierta distancia entre ellos, cada uno cuenta con sus materiales; se deja un espacio común con una mesa al centro donde el profesor deposita materiales comunes por aquellos que no tienen todo el material completo. Se procura evitar que comenten entre ellos ya que se busca medir el avance cognitivo individual, ver figura 7.

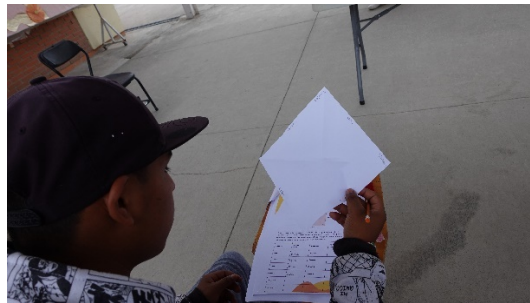


Figura 7. Condiciones iniciales de la experimentación y primera construcción del cuadrado.

De los 11 alumnos que realizan las actividades se tiene que 9 realizan el primer proceso satisfactoriamente al construir el cuadrado y verificar sus propiedades, aunque algunos no miden ángulos de forma correcta o tienen problemas para manejar medidas con decimales, ver figura 8.

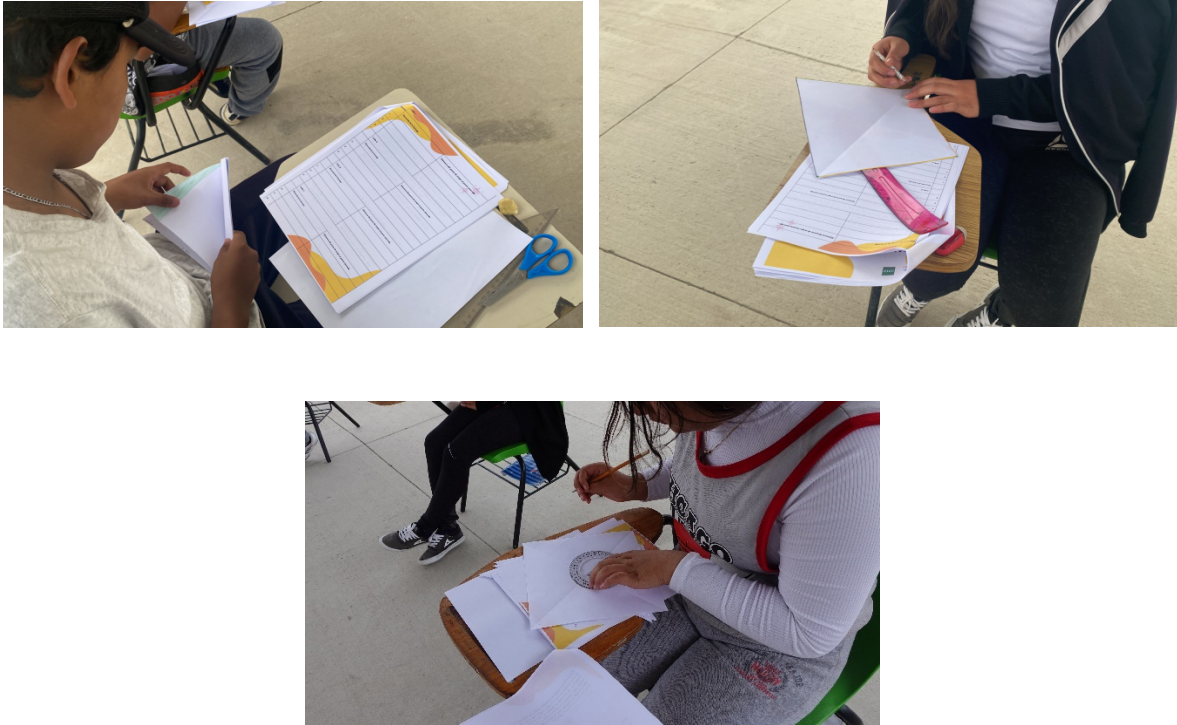


Figura 8. Construcción de cuadrados y verificación de propiedades, primeras medidas.

Para el segundo proceso, 5 logran colocar puntos en el cuadrado para medir recorridos y distancias, identifican que se forman triángulos rectángulos y deducen algunas propiedades de ellos. Sobresale que 6 identifican que se forman los triángulos, pero los clasifican por sus lados y no por sus ángulos, dicen que son escalenos o isósceles. En cuanto a medir, presentan problemas para manejar decimales, e incluso un sujeto midió en pulgadas, ver figura 9.

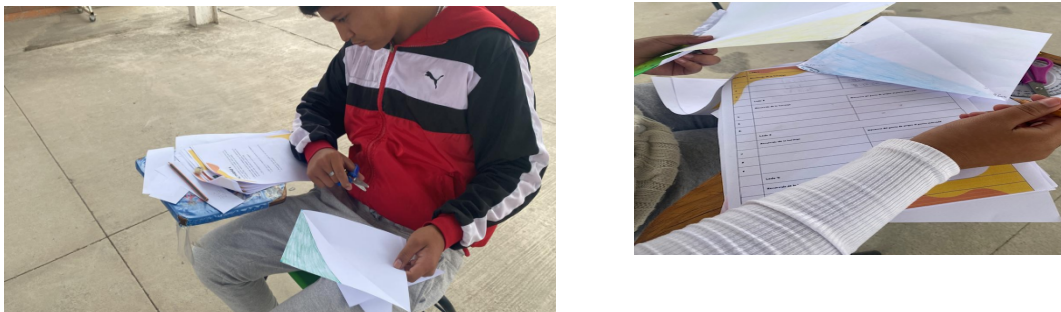


Figura 9. Construcción de triángulos rectángulos y registro de medidas en tablas.

Para el tercer proceso, 4 inducen relaciones entre los lados del triángulo (cateto opuesto, cateto adyacente e hipotenusa), y sus medidas; así como las medidas del recorrido y la distancia que recorre la hormiga con las de los lados del triángulo. Aquí se observa la dificultad de establecer relaciones entre variables o propiedades aún a pesar de medir correctamente y registrarlos en la tabla. Cabe mencionar que a partir de esta actividad 3 alumnos dejan de contestar el cuestionario, ver figura 10.

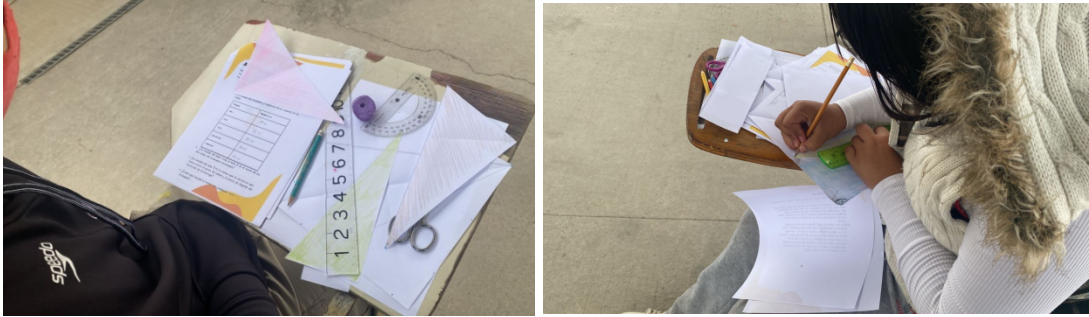


Figura 10. Relaciones entre catetos e hipotenusa de un triángulo rectángulo formado por el recorrido de la hormiga.

Finalmente, para el cuarto proceso, 4 alumnos realizan el proceso de pasar de la expresión verbal al símbolo algebraico y relacionar catetos e hipotenusa con estos símbolos, 3 alumnos ya no contestan el cuestionario y 4 saben que se relaciona con el Teorema de Pitágoras pero no registran datos en la tabla, ver figura 11.

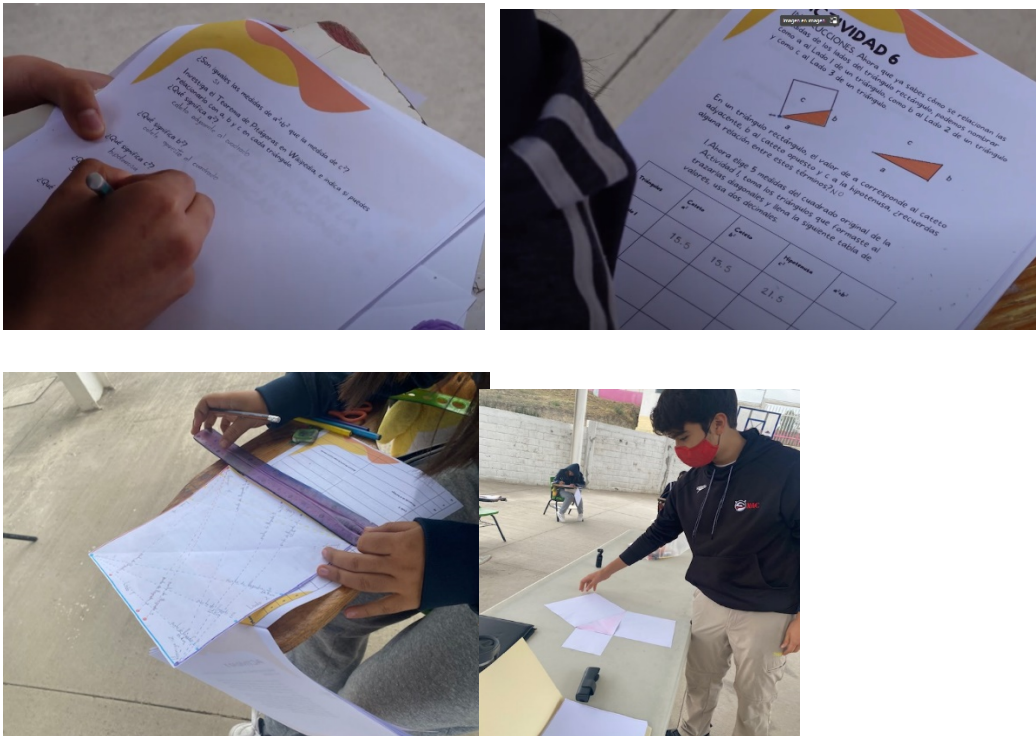


Figura 11. Proceso de construcción simbólico y tabular del Teorema de Pitágoras.

En general, retomando las teorías de Piaget (1971) y Vigotsky (1995), es importante mencionar que la correlación entre el cultivo del lenguaje y el desarrollo del pensamiento es fundamental para entender procesos epistémicos. Aquí partimos de un supuesto: “el método de la doble estimulación, presentan al sujeto, dos series de estímulos, una como objeto de la actividad (acercamiento numérico al Teorema de Pitágoras) y la otra como signo (interpretación procedimental ontosemiótica)”. No obstante, es importante mencionar que el principal factor en la formación de conceptos es un uso disciplinar de las palabras como

instrumentos funcionales y operativos en el desarrollo de un pensamiento algorítmico. De tal forma, que el desarrollo del pensamiento verbal es el desarrollo del pensamiento por complejos, haciendo alusión a los procesos de asociación e imagen sincrética inicial, divergencia contextual semántica y, la formación de pseudoconceptos, relaciones categóricas basados en una integración dinámica y secuencial de eslabones, fases y estadios cognitivos, en una sola cadena de procesos integradores. A esa integración cognitiva, Vigotsky alude a Piaget, donde la ley de Claparède, la integra, con la ley del cambio de posición, o lo que denomina desplazamiento entre estadios. Es decir, hacerse consciente que una operación mental significa transferirla del plano de la acción al del lenguaje, es decir, recrearla en la imaginación y representación para poder expresarla con palabras... “La ley establece que el dominio de una operación en el plano superior del pensamiento verbal presenta las mismas dificultades que el dominio previo de esa operación en el plano de la acción”. (Vygotsky, 1995)

De manera cualitativa se describe el avance de cada alumno en la tabla 3 enfatizando la actividad a realizar según lo que marca el nivel cognitivo de Piaget, y la actividad concreta a realizar en la actividad lúdica del andar de la hormiga. Es importante mencionar que el profesor a cargo del grupo aporta con la descripción individual para lograr identificar los avances cognitivos de cada alumno, ver tabla 3.

Sujetos	Categorías cognitivas	Tareas	Observaciones de carácter epistémico y algorítmico
A	Dimensión espacial	Construcción de cuadrados correcta, identificando propiedades de lados, ángulos y diagonales.	De acuerdo con Piaget, tiene las bases del pensamiento concreto, y se desarrolla dentro de la estructura preoperacional y formal; considerando la capacidad para integrar procesos de seriación, clasificación, integración espacial, relaciones de proporcionalidad, nociones probabilísticas e integra el concepto de número y sus propiedades intrínsecas en los conceptos de medición y conteo. Así mismo desarrolla un pensamiento proposicional combinatorio.  De acuerdo con Vygotsky, integra un desarrollo ontogenético e histórico cultural, hace uso del término zoped (zona de desarrollo próximo), para integrar procesos generalizadores como actos verbales del pensamiento aplicados en la solución del problema, estableciendo relaciones semióticas entre el significado y el significante, aludiendo al desarrollo de un pensamiento algorítmico que le permita interpretar, analizar y resolver el problema en cuestión. Este sujeto
	Medición	Mide recorridos, salvo tercer lado, mide distancias correctas en los cuatro lados, identifica triángulos rectángulos y sus propiedades.	
	Relaciones de variación	Identifica relaciones entre los lados del triángulo y sus medidas.	
	Seriación	Identifica la suma de los lados del triángulo como recorrido, pero no identifica la distancia con el tercer lado del triángulo.	
	Inferencias de variables	Relaciona los símbolos de los catetos con el Teorema de Pitágoras.	

			cuenta con la integración de pensamiento y lenguaje.
B	Dimensión espacial	Construcción de cuadrados incorrecta, medida de lados y diagonales incorrecta, solo de ángulos es correcta. No contesta preguntas.	No tiene las bases del pensamiento concreto, se desarrolla dentro de la estructura preoperacional; considerando la capacidad para integrar procesos de seriación, clasificación, integración espacial, relaciones de proporcionalidad, nociones probabilísticas, no integra el concepto de número y sus propiedades intrínsecas en los conceptos de medición y conteo. Así mismo no desarrolla un pensamiento proposicional combinatorio.  No integra un desarrollo ontogenético e histórico cultural, hace uso de la zona de desarrollo próximo, se distinguen claramente una fase prelingüística en el desarrollo del pensamiento y una fase preintelectual en el desarrollo del habla. Este sujeto no cuenta con la integración de pensamiento y lenguaje.
	Medición	No asigna medidas a los recorridos, medidas de distancia incorrectas. No contesta preguntas.	
	Relaciones de variación	No diferencia tipos de triángulos, ni sus propiedades, no mide correctamente los lados de los triángulos.	
	Seriación	No contesta a partir de la actividad cinco.	
	Inferencias de variables	No contesta a partir de la actividad cinco.	
C	Dimensión espacial	No construye correctamente el cuadrado, identificación de propiedades correcta, no comprende lo que se le pregunta respecto a paralelismo.	No tiene las bases del pensamiento concreto, se desarrolla dentro de la estructura preoperacional; no integra el concepto de número y sus propiedades intrínsecas en los conceptos de medición y conteo. Así mismo no desarrolla un pensamiento proposicional combinatorio.  No integra un desarrollo ontogenético e histórico cultural, hace uso de la zona de desarrollo próximo, cuenta con una fase prelingüística en el desarrollo del pensamiento y una fase preintelectual en el desarrollo del habla. Este sujeto no cuenta con la integración de pensamiento y lenguaje.
	Medición	No mide correctamente, omite decimales, solo usa números enteros.	
	Relaciones de variación	No establece relaciones entre los lados del triángulo.	
	Seriación	No contesta a partir de la actividad cinco.	
	Inferencias de variables	No contesta a partir de la actividad cinco.	
D	Dimensión espacial	Construye sus cuadrados correctamente, identifica propiedades de ángulos, lados y diagonales, pero no anota medidas. No comprende el concepto de paralelismo.	No tiene las bases del pensamiento concreto, se desarrolla dentro de la estructura preoperacional; no integra el concepto de número y sus propiedades intrínsecas en los conceptos de medición y conteo. Así mismo no desarrolla un pensamiento proposicional combinatorio.  No integra un desarrollo ontogenético e histórico cultural, hace uso de la zona de desarrollo próximo, cuenta con una fase prelingüística en el desarrollo del pensamiento y una fase preintelectual
	Medición	No mide, no llena ninguna de las tablas. Sin embargo, identifica recorrido y distancia.	
	Relaciones de variación	Identifica el triángulo, no tiene la noción de triángulo rectángulo.	
	Seriación	Identifica la suma de los lados como recorrido y la distancia como el tercer lado del triángulo, aunque no hace	

		ninguna medición.	en el desarrollo del habla. Este sujeto no cuenta con la integración de pensamiento y lenguaje.
	Inferencias de variables	No contesta a partir de la actividad cinco.	
E	Dimensión espacial	Construcción de cuadrados correcta, identificación de lados y diagonales correcta, no mide ángulos, no comprende el concepto de paralelismo.	No tiene las bases del pensamiento concreto, se desarrolla dentro de la estructura preoperacional; no integra el concepto de número y sus propiedades intrínsecas en los conceptos de medición y conteo. Así mismo no desarrolla un pensamiento proposicional combinatorio. Tiene ciertos procesos de abstracción espacial de las figuras.  No integra un desarrollo ontogenético e histórico cultural, hace uso de la zona de desarrollo próximo, cuenta con una fase prelingüística en el desarrollo del pensamiento y una fase preintelectual en el desarrollo del habla. Este sujeto no cuenta con la integración de pensamiento y lenguaje.
	Medición	No mide correctamente, no llena tablas, no identifica triángulos rectángulos, solo un triángulo rectángulo como una figura de tres picos.	
	Relaciones de variación	No establece relaciones entre los lados del triángulo y sus medidas.	
	Seriación	No diferencia entre recorrido y distancia. Llena tablas incorrectamente.	
	Inferencias de variables	No registro medidas correctamente, no establece relaciones de variación, no relación simbólicamente el Teorema de Pitágoras.	
F	Dimensión espacial	Construcción de cuadrados correcta, identifica propiedades de lados y diagonales correcta, no mide ángulos de forma correcta, no entiende que es paralelismo.	No tiene las bases del pensamiento concreto, se desarrolla dentro de la estructura preoperacional; no integra el concepto de número y sus propiedades intrínsecas en los conceptos de medición y conteo. Así mismo no desarrolla un pensamiento proposicional combinatorio.  No integra un desarrollo ontogenético e histórico cultural, hace uso de la zona de desarrollo próximo, cuenta con una fase prelingüística en el desarrollo del pensamiento y una fase preintelectual en el desarrollo del habla. Este sujeto no cuenta con la integración de pensamiento y lenguaje.
	Medición	No mide correctamente, llena todas las tablas. No identifica triángulos rectángulos y sus propiedades.	
	Relaciones de variación	No identifica relaciones entre los lados del triángulo y sus medidas.	
	Seriación	No identifica la suma de los lados del triángulo como recorrido, ni la distancia como el tercer lado del triángulo.	
	Inferencias de variables	Registra medidas de manera incorrecta, no establece relaciones de variación, no relaciona simbólicamente el Teorema de Pitágoras.	
G	Dimensión espacial	Construcción de cuadrados correcta, identifica propiedades de lados, diagonales y ángulos, aunque su unidad de medida fue en pulgadas, sus medidas fueron imprecisas y registra medidas incorrectas en los ángulos. No entiende el concepto de paralelismo.	Tiene las bases del pensamiento concreto, y se desarrolla dentro de la estructura preoperacional y formal; integra el concepto de número y sus propiedades intrínsecas en los conceptos de medición y conteo. Así mismo desarrolla un pensamiento proposicional combinatorio.  Integra un desarrollo ontogenético e histórico cultural, hace uso de la zona
	Medición	Mide recorridos en pulgadas, identifica triángulos rectángulos y sus propiedades. Confunde la orientación del triángulo.	



	Relaciones de variación	No identifica relaciones entre los lados del triángulo y sus medidas.	de desarrollo próximo, para integrar procesos generalizadores como actos verbales del pensamiento aplicados en la solución del problema, estableciendo relaciones semióticas entre el significado y el significante, aludiendo al desarrollo de un pensamiento algorítmico que le permita interpretar, analizar y resolver el problema en cuestión. Este sujeto no cuenta con la integración de pensamiento y lenguaje.
	Seriación	No diferencia recorrido y distancia.	
	Inferencias de variables	No relaciona los símbolos con el Teorema de Pitágoras. Confunde las variables del pensamiento matemático con el físico.	
H	Dimensión espacial	Construcción de cuadrados correcta, identificando propiedades de lados, ángulos y diagonales, coloca valores en cada figura.	Tiene las bases del pensamiento concreto, y se desarrolla dentro de la estructura preoperacional y formal; integra el concepto de número y sus propiedades intrínsecas en los conceptos de medición y conteo. Así mismo desarrolla un pensamiento proposicional combinatorio.  Integra un desarrollo ontogenético e histórico cultural, hace uso de la zona de desarrollo próximo, para integrar procesos generalizadores como actos verbales del pensamiento aplicados en la solución del problema, estableciendo relaciones semióticas entre el significado y el significante, aludiendo al desarrollo de un pensamiento algorítmico que le permita interpretar, analizar y resolver el problema en cuestión. Este sujeto cuenta con la integración de pensamiento y lenguaje
	Medición	Mide recorridos y distancias correctas, pero toma cada lado por separado.	
	Relaciones de variación	Identifica diferentes tipos de triángulos por sus lados, pero no por sus ángulos.	
	Seriación	Identifica los lados del triángulo como recorrido y el tercer lado como distancia.	
	Inferencias de variables	Relaciona los símbolos de los catetos con el Teorema de Pitágoras, aunque en su tabla hay imprecisión en las medidas.	
I	Dimensión espacial	Construcción de cuadrados correcta, identifica propiedades de lados, diagonales y ángulos, éstos últimos mide ángulos del triángulo y no del cuadrado.	Tiene las bases del pensamiento concreto, y se desarrolla dentro de la estructura preoperacional y formal; integra el concepto de número y sus propiedades intrínsecas en los conceptos de medición y conteo. Así mismo desarrolla un pensamiento proposicional combinatorio.  Integra un desarrollo ontogenético e histórico cultural, hace uso de la zona de desarrollo próximo, para integrar procesos generalizadores como actos verbales del pensamiento aplicados en la solución del problema, estableciendo relaciones semióticas entre el significado y el significante, aludiendo al desarrollo de un pensamiento algorítmico que le permita interpretar, analizar y resolver el problema en cuestión. Este sujeto cuenta con la integración de pensamiento y lenguaje.
	Medición	Mide recorridos y distancias correctas, en los cuatro lados, aunque toma cada lado por separado. Identifica triángulos solo por sus lados.	
	Relaciones de variación	Identifica relaciones entre los lados del triángulo y sus medidas, Pero sin observar la relación de variación.	
	Seriación	No identifica la suma de los lados del triángulo como recorrido, tampoco la distancia como el tercer lado del triángulo.	
	Inferencias de variables	Relaciona los símbolos de los catetos con el Teorema de Pitágoras, aunque el llenado de su tabla es incorrecto.	

J	Dimensión espacial	Construcción de cuadrados correcta, identifica propiedades de lados y diagonales, no mide ángulos, no identifica el concepto de paralelismo; sin embargo, lo identifica con un trazo lineal.	No tiene las bases del pensamiento concreto, se desarrolla dentro de la estructura preoperacional; no integra el concepto de número y sus propiedades intrínsecas en los conceptos de medición y conteo. Así mismo no desarrolla un pensamiento proposicional combinatorio.  No integra un desarrollo ontogenético e histórico cultural, hace uso de la zona de desarrollo próximo, cuenta con una fase prelingüística en el desarrollo del pensamiento y una fase preintelectual en el desarrollo del habla. Este sujeto no cuenta con la integración de pensamiento y lenguaje.
	Medición	Solo realiza el llenado de la primera tabla.	
	Relaciones de variación	No contesta a partir de la actividad tres.	
	Seriación	No contesta a partir de la actividad tres.	
	Inferencias de variables	No contesta a partir de la actividad tres.	
K	Dimensión espacial	Construcción de cuadrados correcta, identifica propiedades de lados y diagonales, aunque realizó medidas incorrectas. No mide ángulos. No comprende el concepto de paralelismo.	No tiene las bases del pensamiento concreto, se desarrolla dentro de la estructura preoperacional; no integra el concepto de número y sus propiedades intrínsecas en los conceptos de medición y conteo. Así mismo no desarrolla un pensamiento proposicional combinatorio.  Integra un desarrollo ontogenético e histórico cultural, hace uso de la zona de desarrollo próximo, para integrar procesos generalizadores como actos verbales del pensamiento aplicados en la solución del problema, estableciendo relaciones semióticas entre el significado y el significante, aludiendo al desarrollo de un pensamiento algorítmico que le permita interpretar, analizar y resolver el problema en cuestión. Este sujeto cuenta con la integración de pensamiento y lenguaje.
	Medición	Mide recorridos y distancias, aunque de forma incorrecta, toma los lados por separado e identifica triángulos por sus lados.	
	Relaciones de variación	No identifica relaciones entre los lados del triángulo y sus medidas, aunque si registra datos en todas las tablas.	
	Seriación	Identifica la suma de los lados del triángulo como recorrido y el tercer lado como distancia.	
	Inferencias de variables	No registra datos en la tabla, pero si identifica simbólicamente el Teorema de Pitágoras.	

Tabla 3. Caracterización de cada alumno y su nivel cognitivo.

Ahora bien, la hipótesis es que el nivel de lenguaje que manejan los alumnos obstruye el desarrollo del pensamiento algorítmico, por lo que se requiere identificar el manejo del lenguaje matemático en los 11 alumnos, ver tabla 4.

Sujeto	Número de palabras incorporadas (Muestra: 58 palabras)	Índice del Coeficiente de Comprensión Lectora (ICCL)	Relación lenguaje - pensamiento
A	135	1.78	A mayor nivel de incorporación lingüística más desarrollo del pensamiento algorítmico, existe una relación de proporcionalidad: a mayor rango ICCL mayor desarrollo proposicional combinatorio.

B	13	0.48	Un nivel limitado de incorporación lingüística obstaculiza el desarrollo del pensamiento, a menor rango ICCL menor desarrollo proposicional.
C	38	0.61	Nivel menor de incorporación lingüística obstaculiza el desarrollo del pensamiento, con un rango ICCL menor también es proporcional el desarrollo proposicional.
D	15	0.44	Un nivel limitado de incorporación lingüística obstaculiza el desarrollo del pensamiento, a menor rango ICCL menor desarrollo proposicional.
E	10	0.39	Un nivel limitado de incorporación lingüística obstaculiza el desarrollo del pensamiento, a menor rango ICCL menor desarrollo proposicional.
F	59	1.06	Nivel menor de incorporación lingüística obstaculiza el desarrollo del pensamiento, con un rango ICCL menor también es proporcional el desarrollo proposicional.
G	61	1.05	Nivel menor de incorporación lingüística obstaculiza el desarrollo del pensamiento, con un rango ICCL menor también es proporcional el desarrollo proposicional combinatorio.
H	58	0.87	Nivel menor de incorporación lingüística obstaculiza el desarrollo del pensamiento, con un rango ICCL menor también es proporcional el desarrollo proposicional.
I	102	1.20	A mayor nivel de incorporación lingüística más desarrollo del pensamiento algorítmico, existe una relación de proporcionalidad: a mayor rango ICCL mayor desarrollo proposicional combinatorio.
J	43	0.52	Nivel menor de incorporación lingüística obstaculiza el desarrollo del pensamiento, con un rango ICCL menor también es proporcional el desarrollo proposicional.
K	71	0.75	Nivel menor de incorporación lingüística obstaculiza el desarrollo del pensamiento, con un rango ICCL menor también es proporcional el desarrollo proposicional combinatorio.

Tabla 4. Caracterización de cada alumno por su nivel de lenguaje a partir de la estrategia ICCL.

Los datos de la tabla 4 se obtienen de los 11 sujetos ya que el profesor a cargo del grupo les solicita describir lo que entienden como significado de palabras en un glosario, de donde el análisis del manejo del lenguaje permite entrever por qué no entienden la indicación y si pueden ir modificando estos significados a lo largo de la actividad.

El Índice del Coeficiente de Comprensión Lectura (ICCL) es un parámetro (con rango de 0 a 2) que mide la correspondencia entre el nivel de promedio de lectura final y el indicador de palabras incorporadas de un alumno, incluyendo el número de palabras que lee por minuto. A mayor índice de palabras incorporadas, mayor comprensión lectora, y en consecuencia mayor aumento del nivel de aprovechamiento académico.

Es importante resaltar que el objetivo de este artículo es identificar también el proceso algorítmico que realiza el alumno, no es lo mismo resolver un problema por ensayo y error, que hacerlo estableciendo de forma consciente pasos y siguiendo una estrategia metódica que le permita al alumno revisar resultados parciales para llegar a una solución final. Esto se observa en el cuestionario que sirve de guía para la actividad del “andar de la hormiga”, donde se establecen pasos y metas por cada actividad y se observa el avance individual.

Finalmente, el otro objetivo para este artículo fue determinar la diferencia entre el nivel cognitivo inicial y el final de cada alumno de la población seleccionada, lo que se logra al analizar los instrumentos de recolección de datos, donde cada alumno debe llenar sus cuestionarios y expresar la forma de solucionar su problema, ver tabla 5.

Sujeto	Nivel cognitivo inicial	Nivel cognitivo final	Observaciones
A	Operaciones formales	Operaciones formales	Tiene una dimensión espacial que le permite construir los cuadrados y los triángulos, identificar sus propiedades, medir y llenar tablas, identificar relaciones de variación entre los lados de los triángulos y sus medidas, diferencia entre recorrido y distancia y logra inferir variables para inducir el Teorema de Pitágoras.
B	Operaciones concretas	Operaciones concretas	Presenta un problema de dimensión espacial y psicomotricidad fina que no le permite construir las figuras, tiene problemas de medición, no contesta varias preguntas del cuestionario porque no entiende qué debe realizar, no diferencia tipos de triángulos y sus propiedades.
C	Operaciones concretas	Operaciones concretas	Tiene un problema de dimensión espacial y psicomotricidad fina que no le permite construir las figuras, presenta problemas de medición ya que solo maneja cantidades enteras, no contesta varias preguntas del cuestionario porque no entiende qué debe realizar, no diferencia tipos de triángulos y sus propiedades.
D	Operaciones concretas y preconceptuales	Operaciones preformales	Posee una dimensión espacial que le permite construir los cuadrados y los triángulos, identificar sus propiedades, tiene problemas para medir y llenar tablas, puede identificar relaciones de variación entre los lados de los triángulos y sus medidas, aunque no llega a propiedades del triángulo rectángulo, diferencia entre recorrido y distancia. No logra inferir variables para inducir el Teorema de Pitágoras, no contestó esta última actividad.
E	Operaciones concretas	Operaciones preformales	Construye los cuadrados y los triángulos gracias a su dimensión espacial, identifica sus propiedades, tiene problemas para medir y llenar tablas, puede identificar relaciones de variación entre los lados de los triángulos, pero no los clasifica, salvo como figuras de tres picos, no llega a propiedades del triángulo rectángulo, no diferencia entre recorrido y distancia. No logra inferir variables para inducir el Teorema de Pitágoras, llena la tabla incorrectamente.
F	Operaciones concretas y preconceptuales	Operaciones concretas	Tiene una dimensión espacial que le permite construir los cuadrados y los triángulos, identificar sus propiedades, tiene problemas para medir y llenar tablas, no identifica relaciones de variación entre los lados de los triángulos porque no los clasifica, no llega a propiedades del triángulo rectángulo, no diferencia entre recorrido y distancia. No logra inferir variables para inducir el Teorema de Pitágoras, llena la tabla incorrectamente.
G	Operaciones concretas y preconceptuales	Operaciones preformales	Posee una dimensión espacial que le permite construir los cuadrados y los triángulos, puede identificar sus propiedades aunque se equivoca en asignar cateto opuesto y cateto adyacente, mide de forma imprecisa y en pulgadas, llena tablas

			correctamente, no identifica relaciones de variación entre los lados de los triángulos, no llega a propiedades del triángulo rectángulo, no diferencia entre recorrido y distancia. No logra inferir variables para inducir el Teorema de Pitágoras, confunde las variables denominadas en matemáticas con las denominadas en física.
H	Operaciones preconceptuales y formales	Operaciones formales	Presenta una dimensión espacial que le permite construir los cuadrados y los triángulos, asigna valores en cada figura, puede identificar sus propiedades, aunque solo por sus lados, mide y llena tablas de forma correcta, identifica relaciones de variación entre los lados de los triángulos, llega a propiedades del triángulo rectángulo, diferencia entre recorrido y distancia y logra inferir variables para inducir el Teorema de Pitágoras, aunque con imprecisiones en las medidas de la última tabla.
I	Operaciones preconceptuales y formales	Operaciones formales	Construye los cuadrados y los triángulos gracias a su dimensión espacial, identifica sus propiedades, solo clasifica triángulos por sus lados, medir y llenar tablas, no identifica relaciones de variación entre los lados de los triángulos y sus medidas, no diferencia entre recorrido y distancia, logra inferir variables para inducir el Teorema de Pitágoras aunque el llenado de la tabla final es incorrecto.
J	Operaciones concretas y preconceptuales	Operaciones concretas	Tiene una dimensión espacial que le permite construir los cuadrados y los triángulos, identifica el paralelismo con un trazo lineal, solo realiza el llenado de la primera tabla y deja sin contestar el resto del cuestionario.
K	Operaciones concretas	Operaciones concretas	Posee una dimensión espacial que le permite construir los cuadrados y los triángulos, puede identificar sus propiedades, aunque se equivoca al medir, identifica triángulos solo por sus lados, llena todas las tablas aunque de forma incorrecta, no identifica relaciones de variación entre los lados de los triángulos, si diferencia entre recorrido y distancia. No registra datos en la última tabla, pero si identifica simbólicamente el Teorema de Pitágoras.

Tabla 5. Comparación de los niveles cognitivos inicial y final por alumno.

Es claro que no se espera un cambio contundente de un nivel cognitivo a otro al desarrollar solo una actividad, pero el nivel de análisis de la tarea que el alumno debe desarrollar en cada una de las actividades del “andar de una hormiga” permite una interpretación más fina de los procesos heurísticos de cada sujeto e identificar las limitaciones que no le permiten avanzar en el desarrollo de un proceso algorítmico.

## Conclusiones

La actividad lúdica del “andar de una hormiga” alrededor de un cuadrado es una forma de aproximación al concepto de función de forma tabular, sin recurrir a definiciones o fórmulas, sino más bien inducir la identificación de variables y la relación de dependencia entre ellas usando tablas numéricas; ahora bien un requerimiento necesario para ello es **saber medir, diferenciando del proceso de contar**, porque se manejan decimales y se deben construir cuadrados con esas medidas y calcular raíces cuadradas asociadas con distancias.

Otro requerimiento necesario para la actividad es **identificar un triángulo rectángulo**, sus propiedades, e identificar cateto opuesto, cateto adyacente e hipotenusa, para posteriormente asociarlas simbólicamente con  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e inducir el Teorema de Pitágoras, esta aproximación al teorema de forma numérica para posteriormente llegar a la representación algebraica genera un proceso de abstracción y un cambio heurístico.

Los resultados de los 11 alumnos seleccionados muestran de forma cualitativa un análisis de sus procesos cognitivos al introducir la actividad lúdica, diferenciando sus procesos algorítmicos, **ya que dejan la estrategia de ensayo y error y utilizan una serie de pasos para resolver el problema**. La aproximación identifica los niveles cognitivos según Piaget de los 11 alumnos y diferencia en cada uno qué procesos y qué herramientas utilizan para resolver este problema y generar su propio conocimiento.

Además, el presente trabajo conlleva una reflexión ontológica en el quehacer educativo del docente a cargo del grupo de experimentación, incluye sus reflexiones al realizar intervenciones didácticas en los 11 alumnos de tercer grado de la Telesecundaria, y complementa el análisis epistemológico, así como el ajuste del instrumento de recolección de datos al nivel educativo.

En cuanto al objetivo de diferenciar entre el nivel cognitivo inicial y el final de cada alumno de la población seleccionada, se puede observar mediante el instrumento de recolección de datos, donde cada alumno debe llenar sus cuestionarios y expresar la forma de solucionar su problema, si bien no cambian de nivel con una sola actividad si se identifican procesos que ayudan u obstruyen su construcción conceptual.

Es importante mencionar, que los procesos de integración cognitiva, tal y como se maneja en líneas anteriores, está directamente relacionado a los procesos de incorporación lingüística, de ahí la importancia de establecer la correlación entre las actividades a desarrollar y el nivel de comprensión textual. El desarrollo del pensamiento algorítmico es directamente proporcional al nivel de incorporación del lenguaje técnico, así lo determinó la estrategia ICCL. Dado que en las actividades el planteamiento del problema se vio afectado desde su comprensión, inhibiendo las posibilidades del desarrollo de las actividades a descentralizar y la posible solución del problema planteado. No obstante, la inercia de los procesos instruccionales operativos permitió que algunos sujetos intentaran contestar y hacer las actividades, pero no determinó la construcción del significado del problema en sí. La correspondencia entre el índice del coeficiente de comprensión lectora (ICCL) y el planteamiento algorítmico es demostrable a través de los indicadores ya mencionados.

## Referencias

- ANIEM. (2022). Del andar de una hormiga hasta las funciones periódicas (Curso-Taller). Matemáticas Visibles. <https://asociacion-aniem.blogspot.com/2022/03/Matematicas-Visibles.html>.
- Caballero, J., López, J. y Martínez, M. (2020). Índice del Coeficiente de Comprensión Lectora (ICCL). Secretaría de Educación. Subsecretaría de Educación Básica.

<https://subeducacionbasica.edomex.gob.mx/sites/subeducacionbasica.edomex.gob.mx/files/files/TELE/ESPAÑOL/indice.pdf>

- Delgado Pineda, M. y Martínez, M. (2020). Taller: Explorando funciones con simuladores. Encuentro Internacional sobre la Enseñanza del Cálculo, Ciencias y Matemáticas (EICAL 11). <http://recacym.org/eical11/talleres/>
- Delgado Pineda, M. y Martínez, M. (2021). Conferencia especial: Uso de herramientas tecnológicas para el estudio de funciones con gradualidad de dificultad. Encuentro Internacional sobre la Enseñanza del Cálculo, Ciencias y Matemáticas (EICAL 12). <http://eical12.recacym.org/programa/>
- Delgado Pineda, M. y Martínez, M. (2022). Taller: Dinamizar un aula de forma experimental: el andar de una hormiga. Encuentro Internacional sobre la Enseñanza del Cálculo, Ciencias y Matemáticas (EICAL 13). <http://recacym.org/eical13/talleres/>
- Delgado, M. y Martínez, M. (2022b). Conferencia especial: Una experiencia para dinamizar actividades didácticas multinivel en el aula. Encuentro Internacional sobre la Enseñanza del Cálculo, Ciencias y Matemáticas (EICAL 13). <http://eical13.recacym.org/especiales>
- Delgado, M. y Martínez, M. (2021b). Construcción de funciones andando. Quintas Jornadas de Experiencias e Innovación Docente en Estadística y Matemáticas eXIDO 2021. <https://extension.uned.es/actividad/25289&idioma=en>
- Delgado Pineda, M. y Martínez, M. (2023). Introducción a los conceptos de función y de función periódica en la formación de profesores usando computadora (pp. 171-186). En: Cuevas, C., Martínez, M. y Hernández, J. *Investigaciones y experiencias en enseñanza de las ciencias y la matemática*. México: UAEM. <http://hdl.handle.net/20.500.11799/138309>
- Delgado Pineda, M. y Martínez, R. (2023b). Experiencia innovadora con funciones periódicas derivadas del andar de una hormiga en ingeniería. *Pi Innova Math*, 5: 46-60.
- López, J. (2016). Propuesta de intervención en adolescentes para mejorar competencias comunicativas en alumnos de la escuela telesecundaria oficial de tiempo completo no. 0598 “Emperador Cuauhtémoc”. Informe de experiencia profesional. Licenciatura en Educación media en el área de español. Escuela Normal Superior F.E.P.
- López, J., Ganem, P., Rivera, M. y Medina, B. (2023). El desarrollo del pensamiento complejo matemático en educación básica, una experiencia de formación docente en la ANIEM. *Pi Innova Math*, 5: 31-45.
- Piaget, J. (1971). *Psicología y aprendizaje*. Barcelona: Ariel.
- Rúa, J., García, J. y Porto, A. (2018). Pensamiento algorítmico, alternativa metodológica para la solución de problemas en ingeniería. En: J.M. González, F. Carmona, A. Arboleda y A. Porto (Comp.). *Educación transdisciplinar, tecno-didáctica y paradigmas emergentes para una ciudadanía planetaria* (pp. 69-87). Barranquilla: Ediciones Universidad Simón.

Secretaría de Educación Pública (SEP). (2016). Metodología de Telesecundaria. En:  
[http://telesecundaria.dgmie.sep.gob.mx/docs/Modelo\\_Educativo\\_FTS.pdf](http://telesecundaria.dgmie.sep.gob.mx/docs/Modelo_Educativo_FTS.pdf).

Vygotsky, L. (1995). Pensamiento y Lenguaje. España: Espasa.