¿ENTIENDEN LOS ALUMNOS NUESTROS APUNTES? REFLEXIONES SOBRE EL CONOCIMIENTO DE LA TERMINOLOGÍA MATEMÁTICA

Roque Molina Legaz
Francisco Molina Cánovas
Dpto Matemática Aplicada y Estadística
Universidad Politécnica de Cartagena
Antiguo Hospital de Marina, 30202 – Cartagena
roque.molina@upct.es, francisco.molinac@um.es

Presentado en eXIDO 22 (2022)

RESUMEN
En este trabajo [1] se presentan los resultados de un ensayo realizado con alumnos de primer curso del grado de Tecnologías Industriales en la Universidad Politécnica de Cartagena (matriculados en la asignatura de Matemáticas II; de segundo cuatrimestre), y en el que se les ha pedido identificar determinados símbolos matemáticos, así como traducir e interpretar al lenguaje coloquial determinadas expresiones matemáticas, y viceversa. Los resultados del estudio son bastante desalentadores. También en esta ponencia se reflexiona sobre la importancia del conocimiento y de la correcta interpretación de la simbología matemática para la superación con éxito de nuestras asignaturas de matemáticas, y de cómo, con determinadas acciones, podemos potenciar el conocimiento y utilización del lenguaje matemático entre nuestro alumnado, intentando salvar, en lo posible, las carencias que sobre este tema poseen los alumnos que acaban de incorporarse a la universidad.

Palabras clave: Matemáticas, simbología matemática, lenguaje matemático.

ABSTRACT
In this paper [1] presents the results of a test carried out with students in the first year of the degree in Industrial Technologies at Polytechnic University of Cartagena (enrolled in the subject of Mathematics II; in the second semester), and in which they have been asked to identify certain mathematical symbols, as well as translating and interpreting certain mathematical expressions into colloquial language, and vice versa. The results of the study are quite discouraging. This paper also reflects on the importance of knowledge and the correct interpretation of mathematical symbols for successfully passing our mathematics subjects, and how, with certain actions, we can enhance the knowledge and use of mathematical language among our students, trying to overcome, as far as possible, the shortcomings that students who have just joined the university have on this subject.

Key password: Mathematics, mathematical symbols, mathematical language.

(1) En todo este documento se utiliza el masculino gramatical como genérico, según los usos lingüísticos, para referirse a personas de ambos sexos.
(2) Autor para correspondencia: roque.molina@upct.es

INTRODUCCIÓN

Por difícil que resulte, debemos hacer entender a nuestros alumnos que la única forma correcta de comunicación en Matemáticas es el lenguaje matemático. Utilizarlo es necesario para "saber lo que se dice" y "decir lo que se sabe". Martín Caraballo et al. (2009)

En muchos análisis realizados sobre las dificultades que encuentran los estudiantes de asignaturas de matemáticas cuando pasan de un nivel educativo a otro, en particular cuando acceden a la universidad, siempre está presente el uso y conocimiento del *lenguaje matemático*, especialmente en cuanto a lo que corresponde a su uso y forma de interpretar la *simbología matemática*, puesto que los símbolos matemáticos no se suelen considerar como objetos de enseñanza en la universidad ni siquiera en etapas educativas anteriores; no obstante, su uso es esencial para el quehacer matemático.

Como bien se indica en Muniz y Borges (2008) "… *La enseñanza tradicional de la matemática se ha dedicado durante mucho tiempo a la trasmisión de contenidos ya sistematizados en lenguaje simbólico, el mismo usado para la comunicación universal entre especialistas del área, pero que, como se sabe, no es apropiado para la comunicación en la clase, lo cual ha tenido como consecuencia que esta disciplina se vea como algo exótico, difícil y poco atractiva".*

Por nuestra parte y en base a nuestra experiencia, podemos afirmar que ciertas características que son comunes a las dificultades que hallan los alumnos cuando dan sus primeros pasos en las asignaturas de matemáticas en la universidad no tienen tanto que ver con los contenidos de estos (ni siquiera con la calidad del docente) sino con entender lo que se les está pretendiendo contar. La diferencia que suele haber entre las formas de contar las matemáticas entre la educación universitaria y la de los niveles anteriores es lo que lleva al fracaso escolar de muchos alumnos y, sobre todo, al abandono de nuestras disciplinas.

El *lenguaje matemático*[1] (también nos referiremos en esta comunicación al mismo como *lenguaje simbólico*) viene a ser el código empleado por una persona para expresar ideas matemáticas. Pero el uso de este lenguaje no es solamente el simple conocimiento de ciertos símbolos lógicos y formales, o ciertos conceptos y vocabulario, etc., sino que también incluye tanto la simbología utilizada en matemáticas como la estructura y presentación de los contenidos matemáticos. De hecho, muchas de las dificultades que manifiestan los alumnos tienen que ver con el desconocimiento de algunos de los símbolos habitualmente utilizados; otras son de mayor calado, como la imposibilidad de que los alumnos interpreten correctamente una proposición representada exclusivamente a través de simbología o, al revés, traducir al lenguaje simbólico cualquier enunciado matemático.

Todo esto contribuye a que los alumnos tengan dificultades en la lectura de los materiales didácticos que, cada vez en mayor número (a través de aulas virtuales, por ejemplo), los profesores ponemos a su disposición, o en referencia a cualquier bibliografía que podamos recomendarles.

Esto nos ha llevado a intentar reflexionar en esta comunicación sobre como el uso adecuado de la terminología matemática en nuestras asignaturas podría facilitar la comunicación alumnado/profesorado en las mismas, lo que podría contribuir a poner nuestro "grano de arena" para paliar, en la medida de lo posible, el rechazo que tradicionalmente encontramos en las asignaturas relacionadas con nuestra disciplina.

[1] En este trabajo utilizaremos la expresión "lenguaje coloquial" como el referido al que habitualmente utilizamos en nuestro quehacer diario para diferenciarlo del "lenguaje matemático".

Nos consta que no todos los profesores de matemáticas a lo largo de la ESO y de bachillerato utilizan en clase una simbología matemática rigurosa, e incluso en los textos de estos niveles se puede apreciar, dentro de la rigurosidad con la que supuestamente están redactados, una exigencia menor a textos de matemáticas (correspondientes a los mismos niveles) de hace bastantes años, lo que seguro ha conducido a que los alumnos del primer curso universitario encuentren problemas en cuanto se intenta explicar los temas de matemáticas si los mismos se introducen con rigor matemático en cuanto a la simbología utilizada. Lo mismo ocurre con la interpretación de los apuntes (y de otro material) que les hagamos llegar.

Resaltemos el siguiente ejemplo extraído de Ortega y Ortega (2001): Si un alumno con poco conocimiento del idioma español se matricula en una asignatura de literatura de un grado de letras, ¿debería ser evaluado de gramática y sintaxis española o solamente de los contenidos propios de la materia? Evidentemente entendemos que debería de ser evaluado tanto de los conocimientos particulares de la materia como de las herramientas necesarias para poder trabajar dicha asignatura. Pues algo parecido opinamos que es lo que debería de ocurrir en nuestras asignaturas.

Siguiendo a Ortega y Ortega (2001) *"… La actividad matemática en los estudios de secundaria y bachillerato se puede calificar de "mostrativa" (basada en recordar, ordenar y sistematizar conocimientos fundamentados en el sentido común y la vida cotidiana, de manera que las definiciones se realizan mediante ejemplos concretos, por lo que el rigor y el uso del lenguaje matemático en estos cursos queda supeditado al nivel de conocimientos del grupo de alumnos a los que se imparte la asignatura, y los profesores procuran que sus alumnos aprendan el lado instrumental de las matemáticas, dejando un poco aparcado todo el aparato formal y la simbología que muchos no llegarían a comprender (ejemplos de esto puede ser como se explica el concepto de límite de una función en un punto, que se trabaja (en clase y en los textos) de forma intuitiva sobre gráficas, sin llegar en la gran mayoría de casos a presentar la definición formal, mediante lenguaje matemático, de este concepto (a pesar de que esta definición sí que suele venir incluida en los libros que usan)".* Sin embargo, en la universidad (seguimos referenciando a Ortega y Ortega (2001)) *"… Los estudios de matemáticas se centran en actividades tipo "demostrativas", cuyo objetivo principal es la construcción de conocimientos matemáticos, y utilizando de forma rigurosa el lenguaje simbólico, sin utilizar prácticamente literatura que no sea perteneciente a este lenguaje matemático. En definitiva, se pasa de una actividad matemática tecnicista, en los estudios de secundaria, centrada en las técnicas algorítmicas más sencillas, a una actividad matemática teoricista, en la universidad, en las que las técnicas solo juegan un papel auxiliar*".

La simbología matemática permite expresar, sin posibilidad de dar diferentes interpretaciones, y por lo tanto de una forma clara y concisa, las expresiones matemáticas que usamos en nuestras clases, y que no siempre el alumno comprende. El alumnado no siempre entiende que la simbología matemática permite interpretar correctamente un texto científico (no siempre tiene por qué ser un texto matemático, aunque en esta ponencia nos vamos a referir siempre a los mismos), de forma que el mismo puede ser entendido por cualquier otra persona independientemente de la lengua en la que habitualmente se exprese. Por ejemplo, para cualquier persona, al margen de cuál sea su idioma, la expresión

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{Z},\, n \neq 0 \right\}$$

querrá decir lo mismo: el conjunto de los números racionales se define como el cociente de dos números enteros, donde el que aparece en el denominador ha de ser no nulo. Alternativamente, la definición matemática de límite de una función en un punto es un claro ejemplo sobre formalización matemática de una definición que aparece en todos los textos de bachillerato pero que no siempre se explica de forma rigurosa:

$$\forall\epsilon \in \mathbb{R},\ \epsilon > 0,\ \exists\delta > 0;\ x \in (a-\delta, a+\delta),\ x \neq a \Rightarrow f(x) \in (l-\epsilon, l+\epsilon)$$

DESARROLLO

En Fedriani et al. (2016) se destaca que "… *Para una gran mayoría de los alumnos, el simbolismo matemático se reduce a una mera sintaxis desprovista de cualquier significado referencial, por lo que no son capaces de interpretar (o leer) los apuntes de las asignaturas de Matemáticas o cualquier libro de texto de Matemáticas; mucho menos logran traducir los símbolos que están viendo y relacionarlos con los conceptos que se suponen que están leyendo".* Por ello, y para resaltar las debilidades/fortalezas de nuestros alumnos en cuanto a estos conceptos, con el desarrollo de la experiencia objeto de esta ponencia, los autores quisimos realizar en nuestra aula y con nuestros alumnos de primer curso universitario, un sencillo estudio, muy puntual y que en ningún caso se ha pretendido que sea representativo de las situaciones que nos podemos encontrar a nivel universitario. Única y exclusivamente pretendimos que el mismo fuese el reflejo (es decir, una "foto fija") de lo que ocurre con unos alumnos concretos, de un curso concreto y en un momento concreto. No obstante, entendemos que este estudio sí que puede constituir un principio para el diseño de tareas y acciones (al igual que las recogidas en otros interesantes estudios realizados, muchos de los cuales se incluyen en la bibliografía de esta comunicación) que contribuyan a la correcta inclusión y utilización del significado de los símbolos matemáticos en nuestras asignaturas, convirtiéndolos de esta forma en objeto de enseñanza.

Para la realización de esta experiencia se ha preparado un cuestionario para ser respondido por los alumnos de primer curso de la asignatura de Matemáticas II del grado de Ingeniería en Tecnologías Industriales de la Universidad Politécnica de Cartagena. Los 33 alumnos que quisieron responder al mismo dispusieron de 20 minutos aproximadamente para su realización. El estudio fue realizado al principio del segundo cuatrimestre del curso 2021-2022.

Los símbolos por los que se ha preguntado no tienen un uso fuera del ámbito matemático (es decir, son símbolos artificiales). Además, los enunciados dados (ya sea en terminología matemática o en lenguaje coloquial) se ha intentado que sean lo más simples posibles, y que, de una u otra forma, siempre tengan que ver con contenidos matemáticos anteriores a la universidad. No solamente se han considerado símbolos aislados, sino que también se han incluido preguntas sobre cómo se utilizan los mismos desde un punto de vista sintáctico y semántico.

En definitiva, en el diseño de la prueba se ha preguntado por lo siguiente:

- Identificar el significado del símbolo (de forma aislada).
- Traducir una expresión simbólica a lenguaje coloquial.
- Escribir un enunciado de manera simbólico, respetando las reglas de sintaxis.
- Indicar si una expresión simbólica está correctamente escrita.

Los autores quieren destacar que posiblemente hubiese sido más aconsejable realizar esta experiencia en los primeros días del primer cuatrimestre y repetir la misma a mediados o al final del primer curso. De esta forma se podrían comparar los resultados de ambas pruebas, y analizar el seguro progreso que van a experimentar los alumnos en cuanto a sus resultados. Es una mejora que nos comprometemos a poner en marcha en los próximos cursos.

Se plantearon las siguientes cuatro cuestiones, que aparecen recogidas en las tablas siguientes (Tablas 1 a 4). Todas son de elaboración propia, aunque algunas entendemos que mejoradas de otras experiencias similares realizadas en otras universidades, y muchas de las cuales están recogidas en los artículos que se incluyen en la bibliografía de esta comunicación:

0.1 Completa la siguiente tabla de símbolos matemáticos:

Símbolo	Cómo se lee matemáticamente
$\forall$	
$\exists$, $\nexists$	
$\in$, $\notin$	
$\subseteq$, $\nsubseteq$	
$\cup$	
$\cap$	
$:=$	
$\setminus$ en $A \setminus B$ (A y B conjuntos)	
$\mid$ (en $\{... \mid ...\}$)	

Tabla 1: Pregunta sobre identificación de símbolos matemáticos habituales

Como puede observarse los símbolos que se incluyen en la Tabla 1 son de los más habituales que aparecen constantemente en nuestro material y los alumnos deben de haberlos utilizado en sus etapas educativas anteriores (especialmente en bachillerato); posiblemente pueda hacerse una excepción con el símbolo “:=”, que igual no se emplee en demasía.

0.2 Analizar si las siguientes expresiones están bien escritas:

Expresión	Poner BIEN/MAL escrita
$-5 \in \mathbb{Z}$	
$5 \subset \mathbb{N}$	
$[-1,1] \subset \mathbb{R}$	
$\{-1,1\} \in \mathbb{Z}$	
$\forall \mathbb{N}, \mathbb{N} > 0$	
$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$	
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$	
$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$	
$\exists x \in \mathbb{R} \mid x < 0$	

Tabla 2: Pregunta sobre compresión de una expresión matemática sencilla

Con el desarrollo de esta actividad se ha intentado profundizar en cuanto al significado de la mayoría de los símbolos analizados en la Tabla 1, introduciéndolos en un contexto (en una frase) matemático para ver hasta qué punto los alumnos son conscientes de su significado completo y de la importancia de escribir de forma correcta en términos de simbología matemática (por ejemplo, con las dos primeras expresiones se intenta ver la importancia/diferencia entre el símbolo de pertenecer -que afecta a elementos de conjuntos- con el de inclusión -que afecta solamente a conjuntos).

0.3 Expresa (coloquialmente con tus palabras) lo que significan las siguientes expresiones simbólicas:

Expresión simbólica	Expresión coloquial (con tus palabras)
$-5 \in \mathbb{Z}$	
$[-1,1] \subset \mathbb{R}$	
$\forall n \in \mathbb{N},\, n < n+1$	
$\forall x \in \mathbb{R},\, x^2 \geq 0$	
$\exists x \in \mathbb{R} \mid x < 0$	
$\nexists n \in \mathbb{N} \mid n < 0$	
$x \in (a-r, a+r)$	
$f(5)$	
$f^{-1}(5)$	

Tabla 3: Pregunta sobre traducción de expresión matemática a expresión coloquial

Insistiendo nuevamente sobre la mayoría de los símbolos usados en la Tabla 1, con esta cuestión se intenta establecer si los alumnos son capaces de "traducir" expresiones matemáticas (como, por ejemplo, las que podemos escribir en nuestro material, y que será, a la postre, el que usarán a la hora de estudiar nuestras asignaturas) a un lenguaje habitual. Con diferencia, los resultados que nos de esta Tabla 3 serán de los más importantes que se puedan obtener, ya que los mismos nos darán una clara "pista" para entender lo que se pretende con este estudio. Si el alumnado es incapaz de realizar esta tarea, difícilmente podrán entender lo que, por ejemplo, les preguntamos en un examen.

0.4 Escribe, utilizando simbología matemática, cada una de las siguientes expresiones coloquiales:

Expresión coloquial	Expresión simbólica (solo símbolos)
Cinco es un número natural	
Existe un número real negativo	
El cuadrado de cualquier nº real es mayor o igual a cero	
Cada número entero es mayor que su anterior	
Los naturales pares son un subconjunto de los naturales	
Existe algún racional cuyo valor absoluto es menor que 2	
Tres medios no es un número entero, pero si racional	
No existe ningún nº natural entre tres y cuatro	

Tabla 4: Pregunta sobre traducción de expresión coloquial a expresión matemática

De nuevo, con esta última pregunta se intenta profundizar entre la equivalencia entre el lenguaje matemático y el lenguaje coloquial. También se ha intentado analizar hasta qué punto los alumnos son capaces de apreciar que, a veces, algunas de las cosas que se les preguntan, ya han sido planteadas en las preguntas anteriores, aunque de otra forma; así, puede observarse que todas las cuestiones que se les preguntan en estas últimas cuestiones de la Tabla 4 están escritas en lenguaje simbólico en las tablas anteriores o son muy similares.

RESULTADOS

Las respuestas a cada una de estas cuestiones se incluyen a continuación para cada una de las cuatro preguntas realizadas. También se realiza un rápido análisis de los resultados obtenidos, resultados que, como se ha comentado al principio, pueden considerarse de "bastante desalentadores", y que no difiere del obtenido en otras experiencias similares, y recogidas en algunos de los trabajos que pueden encontrarse en la bibliografía anexa. Aunque como se ha comentado al principio, solamente se pretende dar una “fotografía real” de la situación objeto de estudio de la cuestión planteada en esta ponencia entre los alumnos a los que se les ha pedido realizar este cuestionario, sí que los resultados nos indican las dificultades con las que se encuentran los alumnos para la comprensión del material que les ponemos a su disposición en nuestras asignaturas.

Así, y dentro de esta experiencia, los resultados a la Tabla 1 fueron los siguientes (en porcentaje de alumnos que responden correctamente, incorrectamente o no saben/no contestan):

0.1 Completa la siguiente tabla de símbolos matemáticos:

Símbolo	BIEN (%)	MAL (%)	NS/NC (%)
$\forall$	48	18	34
$\exists$, $\nexists$	85	3	12
$\in$, $\notin$	94	3	3
$\subseteq$, $\nsubseteq$	24	6	70
$\cup$	85	9	6
$\cap$	86	3	11
$:=$	12	9	79
$\setminus$ en $A \setminus B$ (A y B conjuntos)	3	45	52
$\mid$ (en $\{... \mid ...\}$)	24	21	55

Tabla 5: respuestas (en %) a la Tabla 1

Hay que destacar, según se observa de las respuestas a las cuestiones planteadas en la Tabla 1, el amplio conocimiento en cuanto a los símbolos existe/no existe, pertenece/no pertenece y unión e intersección, con una observación en relación a estos dos últimos, puesto que los mismos han sido utilizados en el primer cuatrimestre del curso. También es de destacar la cantidad de respuestas en blanco y/o erróneas en cuanto a los símbolos de incluido/no incluido, del símbolo “:=”, de la diferencia de conjuntos “A\B” (muchas respuestas indicaban que este símbolo quiere expresar la división de A y B, sin entrar a valorar que A y B son conjuntos, por lo que no tiene sentido dividir los mismos), y también es preocupante las respuestas al símbolo “tal que”, que no lo interpretan correctamente (o lo dejan en blanco) mas del 75% de los encuestados, a pesar de que este es otro de los símbolos que en más ocasiones se han utilizado en el primer cuatrimestre del curso (aquí los autores quieren entonar un “mea culpa”, ya que es posible que lo que se indica en el enunciado fuese más sencillo de interpretar si se hubiese puesto un ejemplo de un conjunto concreto en lugar de utilizar la expresión {…|…}; se “toma nota” de esta observación y se cambiará en una futura repetición de este experimento).

Con las respuestas a las cuestiones de la Tabla 2,

0.2 Analizar si las siguientes expresiones están bien escritas:

Expresión	BIEN (%)	MAL (%)	NS/NC (%)
$-5 \in \mathbb{Z}$	80	6	14
$5 \subset \mathbb{N}$	34	39	27
$[-1, 1] \subset \mathbb{R}$	52	12	36
$\{-1, 1\} \in \mathbb{Z}$	30	36	34
$\forall \mathbb{N}, \mathbb{N} > 0$	24	30	46
$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$	39	3	58
$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$	24	9	67
$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}$	15	15	70
$\exists x \in \mathbb{R} \mid x < 0$	45	15	40

Tabla 6: respuestas (en %) a la Tabla 2

se vuelven a confirmar muchos de los resultados de la Tabla 1: básicamente, el alumnado está bien familiarizado con el símbolo de "pertenece" y el de "existe", pero tiene muchos problemas y/o confusiones entre "pertenece/incluido" no siempre diferenciando entre elementos y conjuntos, así como con la "inclusión" e "inclusión estricta" como se observa con el % de respuestas erróneas y/o en blanco de la tabla anterior.

Analizando de forma conjunta las respuestas a las Tablas 3 y 4,

0.3 Expresa (coloquialmente con tus palabras) lo que significan las siguientes expresiones simbólicas:

Expresión simbólica	BIEN (%)	MAL (%)	NS/NC (%)
$-5 \in \mathbb{Z}$	80	10	10
$[-1, 1] \subset \mathbb{R}$	30	10	60
$\forall n \in \mathbb{N}, n < n + 1$	39	6	55
$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$	45	6	49
$\exists x \in \mathbb{R} \mid x < 0$	42	20	38
$\nexists n \in \mathbb{N} \mid n < 0$	42	10	48
$x \in (a - r, a + r)$	30	10	60
$f(5)$	52	38	10
$f^{-1}(5)$	39	39	22

0.4 Escribe, utilizando simbología matemática, cada una de las siguientes expresiones coloquiales:

Expresión coloquial	BIEN (%)	MAL (%)	NS/NC (%)
Cinco es un número natural	76	10	14
Existe un número real negativo	39	29	32
El cuadrado de cualquier n^o real es mayor o igual a cero	39	20	41
Cada número entero es mayor que su anterior	29	3	68
Los naturales pares son un subconjunto de los naturales	0	6	94
Existe algún racional cuyo valor absoluto es menor que 2	6	15	79
Tres medios no es un número entero, pero si racional	29	0	71
No existe ningún n^o natural entre tres y cuatro	10	20	70

Tablas 7 y 8: respuestas (en %) a las Tablas 3 y 4

se observa que es más sencillo para los alumnos "traducir" del lenguaje matemático al "coloquial", que viceversa, a pesar de que muchas de las expresiones a incluir como respuesta a las cuestiones de la Tabla 4 ya están dadas en los enunciados de la Tabla

3 y anteriores. También es de destacar, la gran cantidad de respuestas en blanco a más de la mitad de las cuestiones planteadas en la Tabla 4.

ACCIONES DE MEJORA

Como se resalta en González Rodríguez et al. (2013), "… *Es importante que el docente desde la clase cree en el estudiante habilidades para la traducción del lenguaje común al algebraico y viceversa, siendo riguroso en el uso del lenguaje matemático, lo cual ayudaría a la comunicación del docente y el alumno en el desarrollo del proceso docente educativo y fuera de este, para la comprensión de los diferentes contenidos en la asignatura de matemática, lo cual convertiría el lenguaje algebraico en un lenguaje común para el estudiante en cuanto a la comunicación dentro de los contenidos matemáticos".*

Por ello, y a partir de nuestra experiencia, nos atrevemos a proponer algunas posibles acciones de mejora, considerando que las mismas son **flexibles y dinámicas**, para poder adaptarlas a las situaciones donde se apliquen, a la vez que **participativas y objetivas**, para que nos quede constancia de su correcta asimilación por parte de todo el alumnado.

Somos conscientes de que la mayoría de estas acciones se deberían de realizar en etapas educativas anteriores, incorporando poco a poco el uso de la simbología matemática de forma diaria en cada una de las clases de matemáticas de las etapas anteriores a la universidad (el aprendizaje del lenguaje simbólico debería de comenzar inclusive antes de la ESO e ir paulatinamente trabajándolo tanto en esta etapa educativa como -mucho más- en bachillerato). Pero si no se ha hecho, o aunque se hubiese realizado, es aconsejable poner en práctica determinadas acciones como las que se referencian a continuación:

- Realizar una <u>valoración inicial</u> (por ejemplo, con preguntas similares a las que aparecen en el estudio de este trabajo, seguro que mejorándolas e incluyendo otras posibles) para testar el conocimiento del que parten nuestros alumnos cuando acceden a la universidad.
- Incluir un <u>curso de matemáticas cero</u>, a desarrollar en las 4/5 semanas iniciales del primer cuatrimestre (cuando la carga de los alumnos es bastante menor), y donde puedan recordar los conocimientos mínimos ya supuestamente adquiridos y que les van a ser necesarios para la correcta asimilación de nuestras asignaturas; y todo ello desde una exigencia rigurosa del lenguaje matemático. La gran cuestión que podemos plantearnos es la de <u>cómo hacer que los alumnos participen en estos cursos</u>, ya que cuando se imparten, y por las especiales características éstos, no puede ser obligatoria ni la asistencia ni la participación en los mismos. Además de dar créditos de libre configuración, se ha de lograr que los Centros, y por extensión todo el profesorado sea consciente en la importancia de la impartición de estos cursos cero de matemáticas y los recomienden en sus asignaturas.
- Incluir en nuestros apuntes (especialmente en las asignaturas del primer cuatrimestre del primer curso) un <u>capítulo "cero"</u> sobre lenguaje matemático, y que se podría introducir el primer día de comienzo de la asignatura. Es interesante insistir al alumnado que repasen el mismo, ya que van a ser continuas las referencias a éste.
- Los <u>manuales/apuntes de la asignatura</u> se deben de <u>redactar en base a un lenguaje simbólico riguroso y formal</u>, aunque en los mismos manuales, especialmente si son de primer curso y sobre todo en los primeros temas de la asignatura, se recoja la "traducción" al lenguaje coloquial de lo que significan

estas expresiones simbólicas. De todas formas, esto será algo “obligatorio” a realizar por el profesorado cuando vaya introduciendo estos temas, poniendo un especial énfasis en la interpretación/significado de dichos símbolos: su significado, el porqué de su uso en esa situación concreta, la importancia de estos, los aspectos negativos con los que podemos encontrarnos si se omite alguno, etc.

- También se puede aconsejar a los alumnos que revisen la web: http://mathlanguagelevel.com/, desarrollada por el Centro de Investigación Icárea (www.upo.es/icarea) de la Universidad Pablo de Olavide, donde se pueden encontrar pruebas de nivel donde autoevaluar (y certificar en algunos casos) distintos niveles de competencia en el lenguaje matemático. Esta web, aunque no está muy actualizada en la fecha en la que se redacta esta ponencia, sí que es una iniciativa destacable como una de las labores que podemos realizar el profesorado (especialmente a través de los grupos de investigación) en pro del conocimiento objeto del estudio aquí publicado.
- Repetir el mismo cuestionario inicial al final del cuatrimestre, para que así los alumnos (y el profesorado) sean conscientes de su mejora en el ámbito de la terminología simbólica.
- De forma esporádica, y como relajación/distracción en algunas clases, se podría utilizar software (tipo Socrative/Kahoot, por ejemplo) para pasarles algún cuestionario sobre simbología y realizarlos en clase

Es fundamental que el profesorado siga en sus clases una dinámica acorde a los ideales anteriormente citados, de manera que presente los contenidos de forma rigurosa tanto en clase como en sus apuntes, aunque en un principio se vaya deteniendo un poco en ir explicando el porqué de esta notación y lo que ella significa. También se ha de exigir al alumno universitario que, si no al principio de la impartición de la correspondiente asignatura, sí que al final de esta, conozca y utilice los diferentes elementos de este lenguaje.

CONCLUSIONES

Como se indica en Martín Caraballo et al. (2021) “… *El profesorado ya no solo se enfrenta a una asignatura que, para el estudiantado, no es propia de la rama de conocimientos de la titulación que está cursando, sino que además le resulta literalmente un galimatías porque funcionalmente rozaría lo que podría llamarse el analfabetismo (en algunos casos solo funcional) matemático, ya que no es capaz de leer y escribir en el lenguaje correspondiente a expresar una idea o noción matemática. Esa imposibilidad práctica para poder desentrañar las expresiones formales que son esenciales y que se hacen imprescindible para formular conceptos y procedimientos puede conllevar una desmotivación que refuerza la apatía que suele mostrarse ante las asignaturas de esta materia”.*

La forma en como habitualmente se imparte la enseñanza de las matemáticas en la ESO/bachillerato incide sobre todo en la manera de presentar sus contenidos, y no tanto en los contenidos propiamente dichos (que podrán ser más o menos adecuados). Esto ocasiona, como la experiencia nos muestra, un escaso uso del lenguaje simbólico en estas etapas educativas anteriores a la universitaria, sustituyéndolo casi en su totalidad por *“… métodos más pedagógicos pero menos científicos …”* (González (2013)), lo que hace que los alumnos encuentren muchas dificultades en relación con este tema cuando suben de nivel educativo. Por ello, la presentación de los temas y la terminología utilizada en estas etapas educativas puede carecer del correspondiente rigor matemático, y que entendemos que es imprescindible cuando se pretende ahondar o ampliar en la materia que introducimos en nuestras clases universitarias.

Como se indica en Fedriani et al. (2016): *"… Parece haber un total acuerdo en que el desconocimiento del lenguaje matemático complica la transmisión de conceptos; por ello, en nuestra opinión, su estudio debe constituir una tarea primordial en los diferentes niveles académicos. Lo que ocurre es que los estudiantes, en general, se posicionan de forma contraria a las Matemáticas y también hacia su apariencia externa: sus símbolos, sus términos, sus estructuras, etc.*" Además, si los alumnos pueden aprobar (y de hecho lo hacen) sin necesidad de conocer la terminología matemática, *… ¿para qué "perder" tiempo y esfuerzos estudiando como interpretar y aplicar la misma?* Por esto es fundamental la labor del profesor de matemáticas en el aula, especialmente en el primer curso universitario, donde nos encontramos con alumnos con niveles muy bajos o sin ningún nivel en cuanto a estos conocimientos, lo que hace que los alumnos difícilmente puedan utilizar correctamente los materiales que les ponemos a su disposición.

Con el pequeño estudio realizado en este trabajo se ha querido reflexionar sobre una problemática (¡otra más!) con la que se encuentran los alumnos universitarios, especialmente los de primer curso, en las asignaturas de matemáticas. Así, hemos podido constatar que muchas de las dificultades iniciales que los alumnos tienen con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas tienen que ver con estos problemas de lenguaje. Como se indica en Socas (1989): *"… el conocimiento de nuestro lenguaje no bastará para resolver los problemas que plantean las matemáticas; las palabras tienen para las matemáticas un significado propio y distinto del que se le atribuye a estos términos en la vida cotidiana; por ejemplo, palabras como función, dominio, radio tienen un significado específico y particular en la ciencia de las matemáticas, que difiere del lenguaje común. Aquí radica la importancia de hablar del lenguaje de la matemática, lenguaje que nos permite describir muchos de los modelos de carácter cuantitativo que suceden a nuestro alrededor y sin el cual sería difícil describir y hacer comprensible la matemática misma"*.

También, y como se indica en Ortega y Ortega (2001): "… *Los símbolos matemáticos se deben conocer para poder interpretar lo que se quiere decir con ellos, al mismo tiempo que se deben utilizar para expresar lo que se quiera decir. Todos los símbolos son necesarios para la perfecta construcción de ideas, de manera que la sustitución de alguno de ellos por otro diferente, aunque sea gráficamente parecido, cambiaría totalmente el significado. Es decir, todas y cada una de las "palabras" matemáticas tienen un significado concreto, no existiendo sinónimos para las "palabras matemáticas" como ocurre en el lenguaje normal".*

En nuestra opinión como profesores universitarios, el lenguaje matemático se ha de ir introduciendo poco a poco en todas las asignaturas de matemáticas, desde el nivel más elemental al más superior, de manera que se vaya asimilando por el alumnado (casi sin darse cuenta) y que no les suponga un cambio radical cuando se accede por vez primera a la universidad, donde el alumno se encuentra con una terminología y una forma de dar clase muy diferente hasta la que ahora han seguido. Toda la colaboración que se obtenga en este sentido por parte del profesorado de los niveles anteriores irá en ayuda de los alumnos cuando ingresan en universidad.

La mayor dificultad, manifestada en otros estudios previos (como por ejemplo en Distéfano et al. (2019)) y que los autores de esta comunicación corroborado con su pequeña experiencia realizada en clase, aparece cuando los estudiantes tienen que convertir al lenguaje simbólico una expresión coloquial, ya que no solamente han de comprender lo que quiere decir esta expresión, sino que son ellos los que han de elegir qué símbolos han de emplear y adecuarlos a la sintaxis con la que los combina en la expresión a escribir. También los alumnos encuentran dificultades al reconocer cuando una expresión simbólica está mal escrita (o contiene una errata), pues la detección del error (que, a veces, no es sino un pequeño símbolo; por ejemplo, confundir el símbolo de pertenecer con el de estar incluido) requiere un conocimiento previo de la sintaxis asociada a los símbolos que aparecen en dicha expresión.

Sin embargo, de la experiencia realizada también se deduce que nuestros alumnos sí que responden correctamente sobre aquellos símbolos que se han utilizado previamente en nuestras clases (como ha ocurrido con las respuestas a los símbolos de unión, intersección, pertenece, y algún otro), lo que nuevamente nos muestra que, como se afirma en Distéfano et al. (2010): *"… muchos de los estudios publicados ponen de manifiesto que dedicar un pequeño tiempo a la formación en el manejo de símbolos tiene un resultado muy positivo"*..

BIBLIOGRAFÍA

- Distéfano, M. L., Aznar, M. A. y Pochulu, M. D. (2019). Caracterización de procesos de significación de símbolos matemáticos en estudiantes universitarios. Educación Matemática, vol. 31, núm. 1.
- Distéfano, M. L., Urquijo, S. y González, S. (2010). Una intervención educativa para la enseñanza del lenguaje simbólico. Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 23, 59-71.
- Fedriani, E., Martín, A. M., Paralera, C. y Tenorio, A. F. (2016). El aprendizaje del lenguaje matemático y su relevancia en el aula. XVI CEAM. Matemáticas, ni más ni menos.
- González Rodríguez, A. y Calderón Díaz, J. L. (2013). ¿Cómo contribuir al lenguaje matemático en la carrera de Cultura Física? EFDeportes.com, revista digital, año 18, nro 186.
- Jiménez y otros (2010). La comunicación: eje en la clase de matemáticas. Praxis & Saber. Revista de Investigación y Pedagogía.
- Martín Caraballo, A. M., Paralera Morales, C., Romero Palacios, E. y Segovia González, M. M. (2009). Mejora de la comprensión del lenguaje matemático mediante una acción tutorial. Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de Asepuma, enero 2009.
- Martín Caraballo, A. M., Paralera Morales, C. y Tenorio Villalón, A. F. (2021). ¿Son capaces nuestros estudiantes de interpretar una expresión matemática?: la competencia en el uso de la simbología matemática. Anuales de ASEPUMA, nº 29: A109.
- Muniz, V. y Borges, F. (2008). *Utilização da Linguagem Matemática como instrumento para reflexão sobre o ensino-aprendizagem: o caso da redação Matemática.* Campinas: Anais do Segundo Seminário de Histórias de/em Aulas de Matemática (SHIAM), pp. 377 – 387.
- Ortega, J.F., Ortega, J.A. (2001). Matemáticas: ¿Un problema de lenguaje? Actas de las IX Jornadas de ASEPUMA.
- Ortega, J.F., Ortega, J.A. (2002). Experiencia sobre el conocimiento del Lenguaje Matemático. Rev. Electr. De Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA, actas_10(1).
- Pimm, D. (1990). El lenguaje matemático en el aula, *M.E.C. Morata*, Madrid.
- Socas, M. (1989). Iniciación al álgebra. Serie Cultura y Aprendizaje. Editorial Síntesis.