Uso de Geogebra en las Matemáticas Aplicadas de Acceso

Francisca Lara Miranda

eXIDO 2019

INTRODUCCION:Con el fin de conseguir que los alumnos comprendan mejor los conceptos de geometría, y apoyarme en un recurso que me facilita una representación y manejo cómodo de los mismos, podemos decir que contamos con la mejor calculadora gráfica: Geogebra.

Empezaremos por recordar dos teoremas, en los que se basan la mayoría de los resultados de la geometría que impartimos en las dos asignaturas de Matemáticas de Acceso; me refiero a los Teoremas de Pitágoras y Tales. Sus demostraciones se aportan, con referencias a dos páginas webs que abren dos archivos de Geogebra, donde son demostrados.

Dada la naturaleza de este trabajo, basado en archivos creados con un programa y pensado para mostrarlo a los alumnos con apoyo de la pantalla de un ordenador, es complicado mostrar el proceso de construcción a través de un texto fijo, sin posibilidad de transformación. He pensado hacer capturas de pantalla, que resuman el desarrollo de los contenidos, como estamos acostumbrados en cualquier proceso matemático, es muy importante el orden de dicho desarrollo.

Al final de estas páginas en las referencias aparecerá los vínculos a los archivos que ahora paso a mostrar, estos se pueden realizar con conocimientos no muy exigentes de Geogebra. Mi objetivo no es esta herramienta en sí, en las referencias, hay una página con información y enlaces a videos de demostración, manuales,…etc, que nos pueden llevar a conseguir el nivel adecuado, sino el uso particular en Geometría de la materia de Matemáticas Aplicadas.
Tan solo con tener una dirección de Gmail y creando una cuenta con su contraseña, podemos acceder a infinidad de archivos de otros compañeros interesados en explicar las matemáticas con Geogebra. El ser un software libre facilita su adquisición.

INDICE:

2.1. Teorema de Tales para triángulos en posición de Tales.
   2.1.1. Condición para que tres puntos estén alineados.
   2.1.2. Pendiente de la recta definida por dos puntos y los diferentes rectas según la pendiente sea positiva, negativa o nula y (nº/0).
   2.1.3. Ecuación General o Implícita de la recta
   2.1.4. Ecuación punto-pendiente
   2.1.5. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

En el tercer archivo: Posición relativa de dos rectas

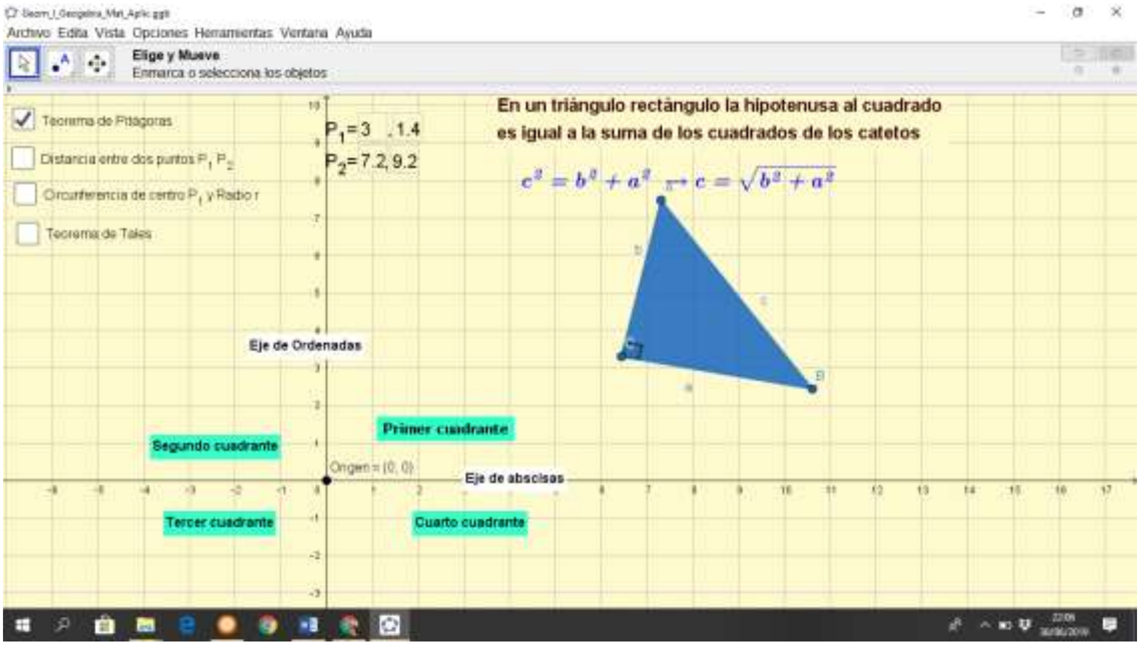
3. Posición relativa de dos rectas.

METODOLOGÍA

Empezamos abriendo el archivo: Geom_I_Geogebra_Mat_Aplic.ggb

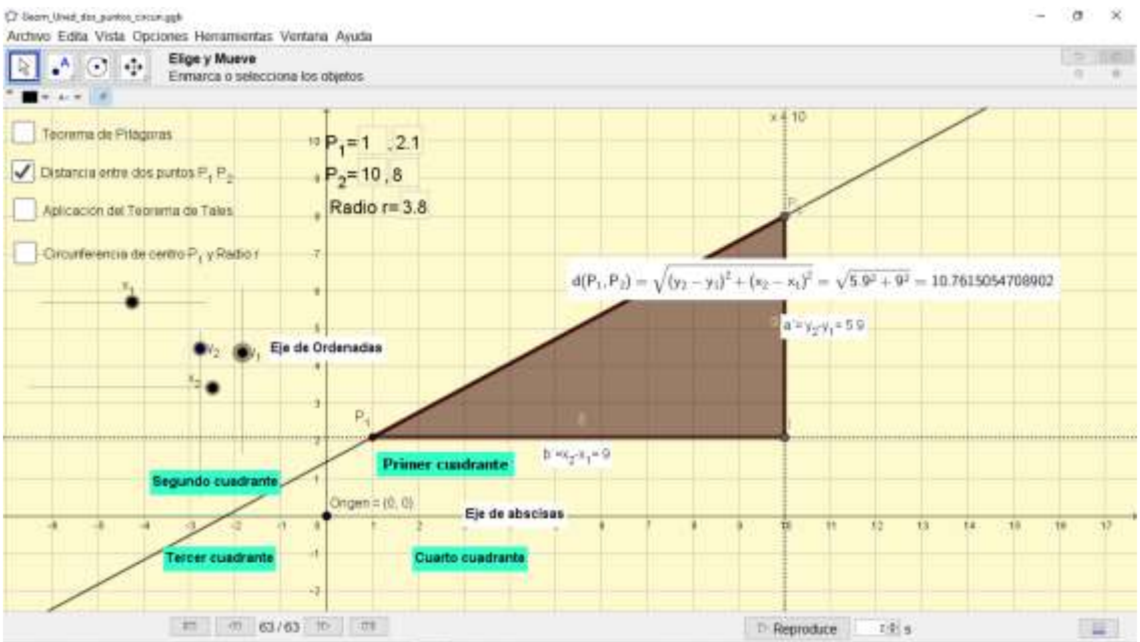
Observamos que aparecen los nombres de los ejes de coordenadas, el Origen, así como de cada cuadrante, en este momento podemos aprovechar para explicar elementos básicos del plano, punto, propiedades de los puntos de cada cuadrante,…etc.

Tenemos la posibilidad de activar cada una de las cuatro casillas de la izquierda Empezamos por la primera el Teorema de Pitágoras:



La demostración está en un enlace dentro de las Referencias. Teorema de Pitágoras (1)

La segunda, Distancia entre dos puntos:



Hacer notar a los alumnos que hay una relación directa entre el Teorema de Pitágoras y el resultado de la fórmula de la distancia entre dos puntos. La hipotenusa de un triángulo rectángulo es ahora la distancia entre dos puntos que se convierten en los vértices del triángulo rectángulo. Dicho triángulo se construye si dibujamos la recta que pasa por P_1 y P_2 y las rectas perpendiculares a los ejes que pasan por ellos.

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

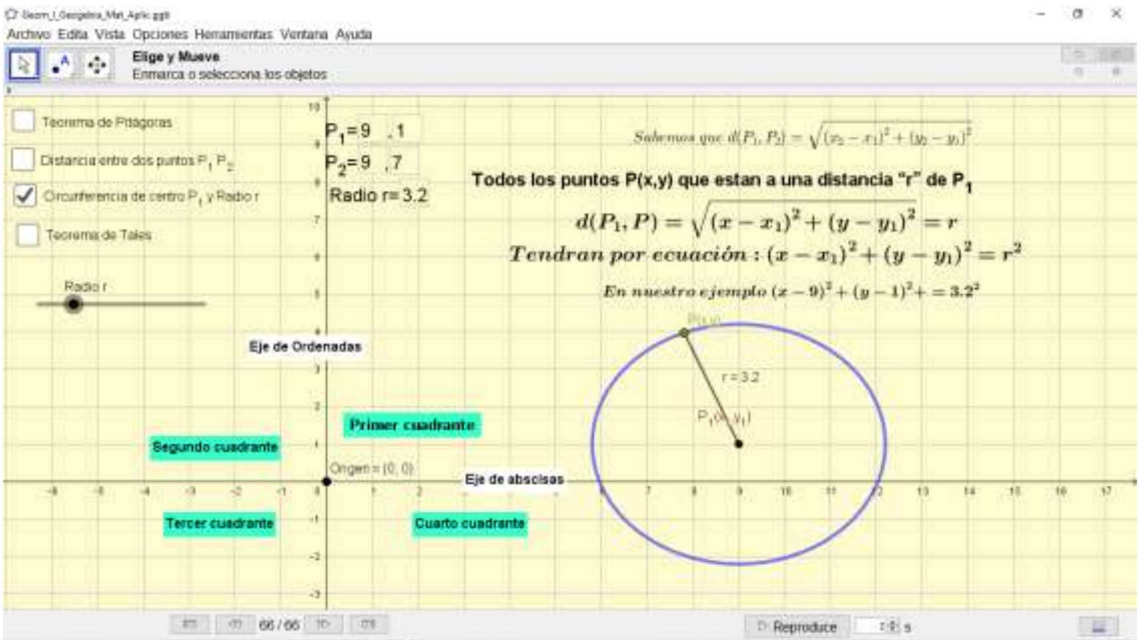
En cualquier momento podemos cambiar los valores de las coordenadas de los puntos P_1 y P_2; a través de movimientos de los llamados “deslizadores” (los puntos que aparecen a la izquierda) o escribiendo las coordenadas del punto directamente donde aparecen los nombres P_1 y P_2.

Si ahora fijamos la distancia entre ambos puntos P_1 y P_2 y dibujamos todos los puntos P que se encuentran a esa distancia de P_1, pasaremos a la tercera casilla. La Circunferencia, escribiremos su ecuación, como la igualdad que cumplen todos los puntos P(x,y) que se encuentran a una distancia fija, llamada radio “r”, de uno dado P_1, que llamaremos centro. Dicha ecuación quedará:

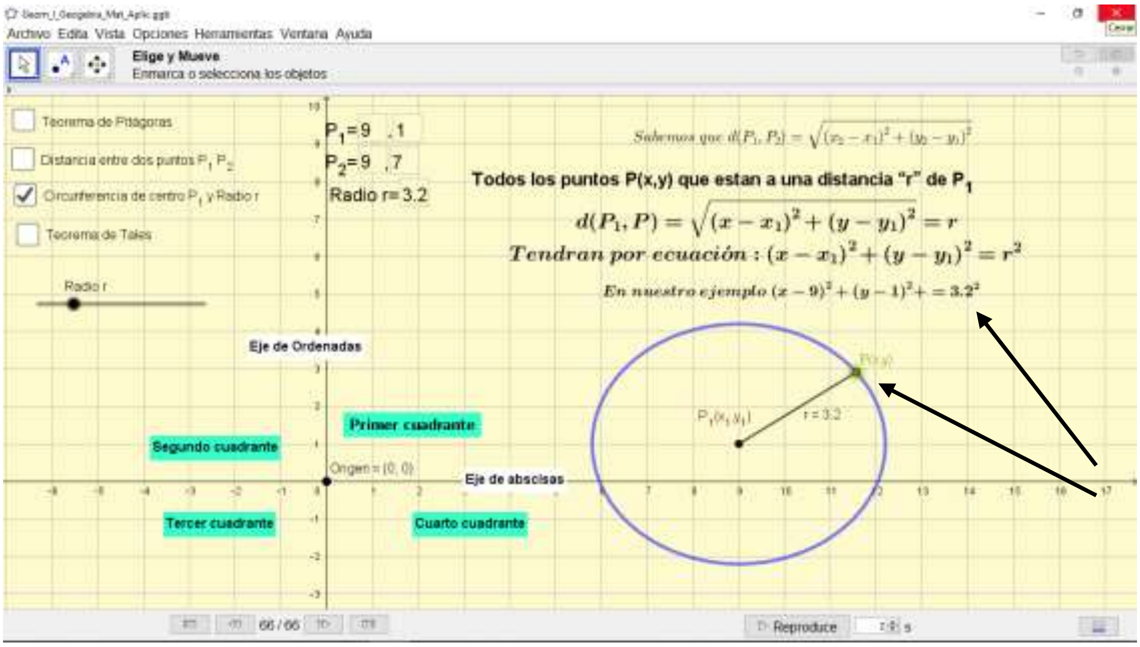
$$d(P_1, P) = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} = r$$

O al elevar al cuadrado: $(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = r^2$

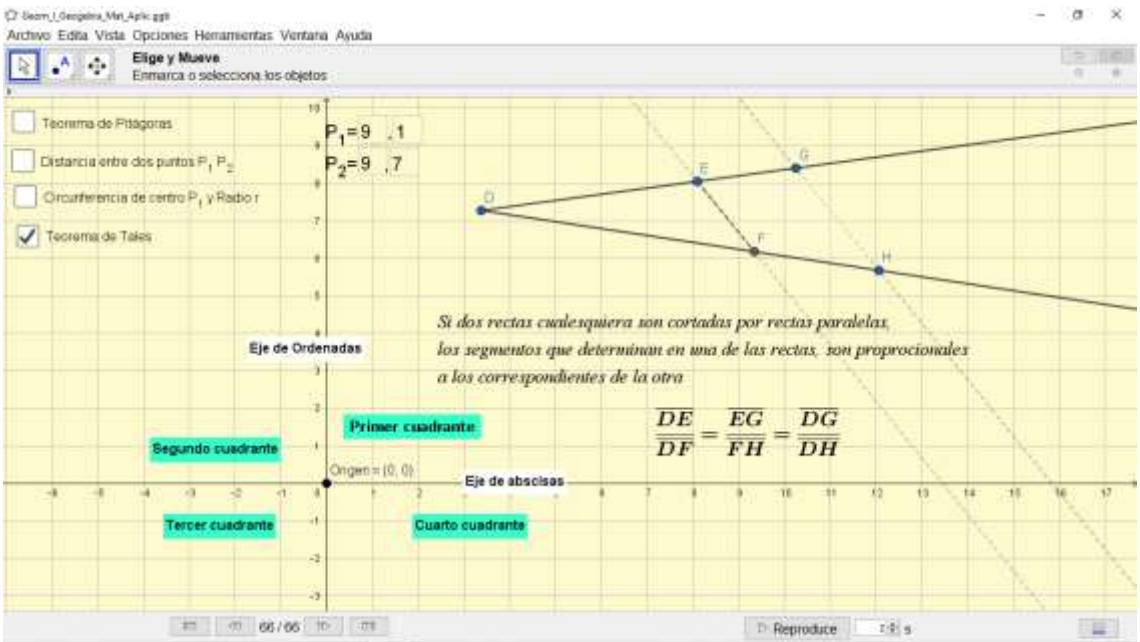
Podemos cambiar el valor del radio en el deslizador que encontramos a la izquierda.



Si movemos el punto P sobre la circunferencia observamos que esta distancia no cambia (en la imagen 3.2).



La última casilla de este archivo, nos introduce al siguiente y es El teorema de Tales. Cuya demostración aparece en las Referencias como Teorema de Tales (2)



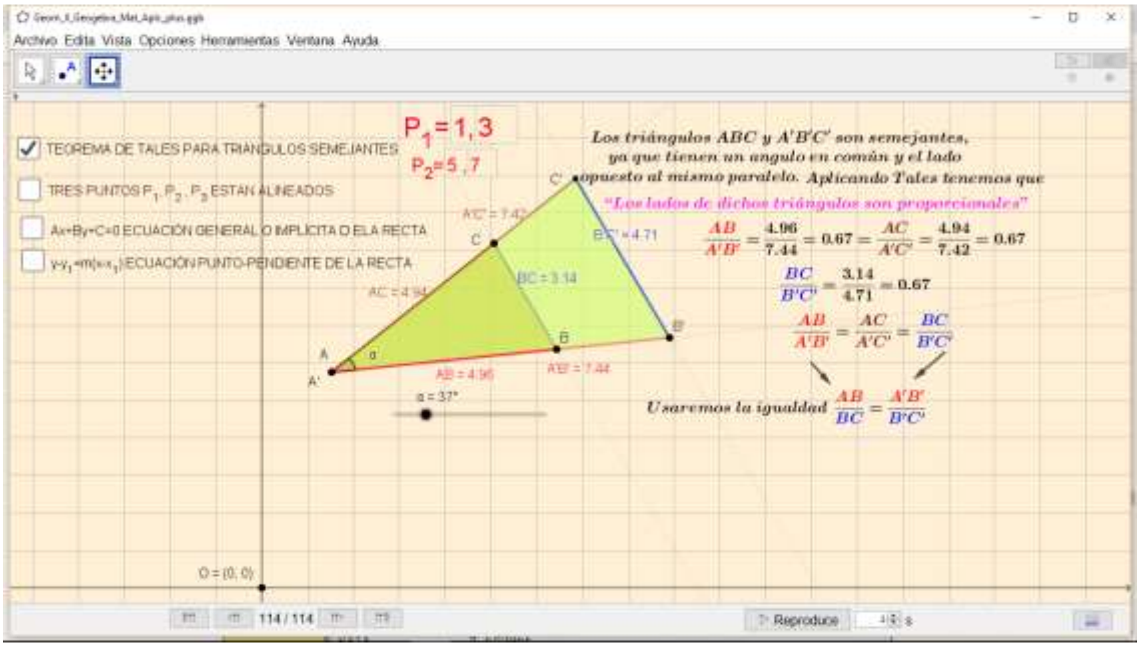
Empezamos con el segundo archivo: Geom_II_Geogebra_Mat_Aplic.ggb

Al abrirlo, aparecen nuestros protagonistas P_1 y P_2; dos puntos cualesquiera del plano que nos van a acompañar hasta el final, junto con las casillas que vamos a tratar de desarrollar.

Explicaremos, a partir del Teorema de Tales aplicado a triángulos semejantes, las ecuaciones de la recta general y punto pendiente.

Pero antes, si activamos la primera casilla tenemos el teorema de Tales, aplicado a triángulos semejantes, siendo ahora los segmentos proporcionales, los lados de los triángulos que comparten un ángulo y el lado opuesto al mismo es paralelo, (triángulos en posición de Tales).

El punto C se mueve al deslizar el ángulo “α”, y el punto C’ lo podemos mover sobre la semirrecta de origen A y pasa por C’. Si movemos los puntos C y C’ los triángulos que se forman siguen teniendo sus lados proporcionales.



Pasamos a dibujar los dos puntos P_1, P_2 y la recta r que pasa por ellos. Si el punto P_3 está lineado con ellos, se encuentra sobre la recta r y los triángulos T_1

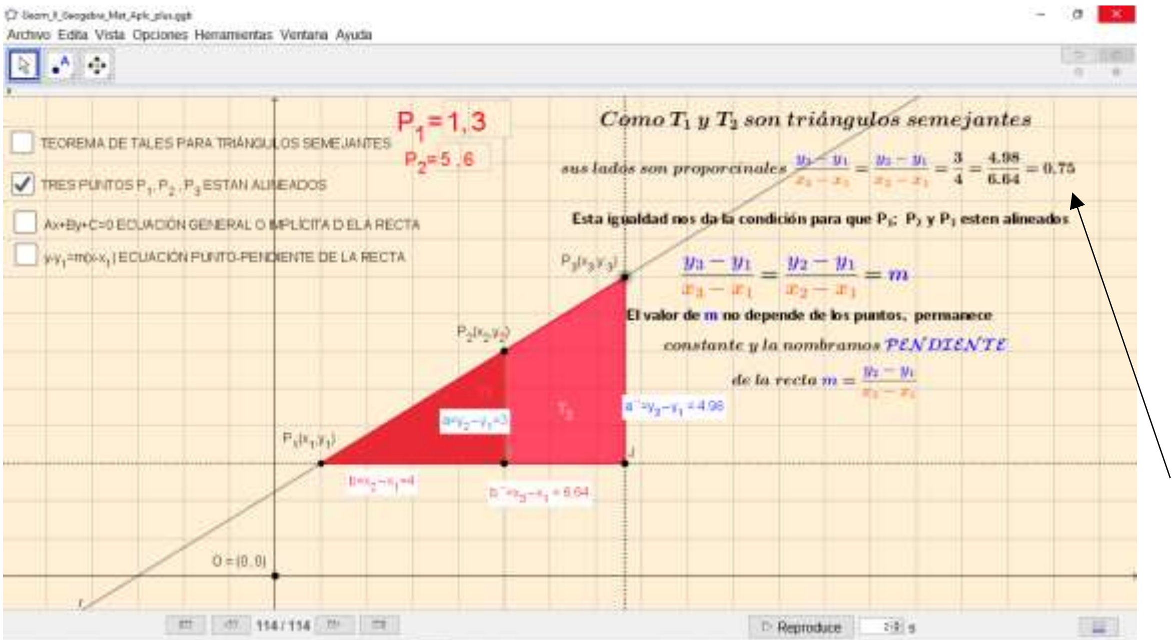
y T_2 que vamos a dibujar, tomando dos rectas paralelara entre si y perpendiculares a los ejes pasando por los puntos P_2 y P_3, son triángulos en posición de Tales y por tanto semejantes, entonces sus lados son proporcionales lo que nos da la condición necesaria y suficiente para que tres puntos estén alineados.

$$\boxed{\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

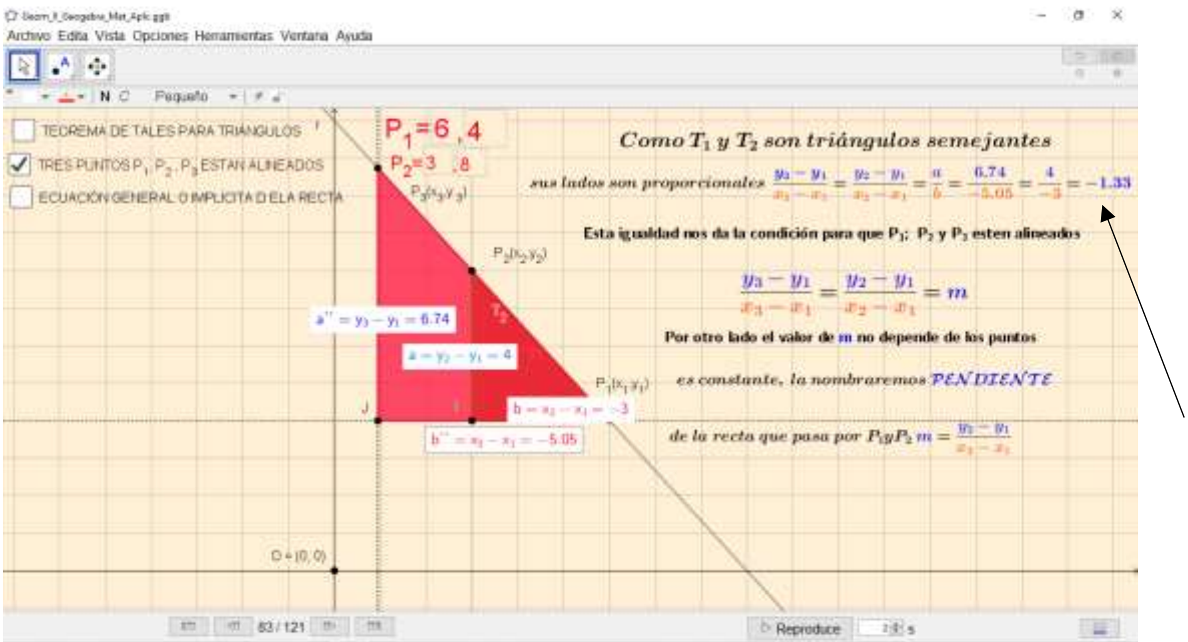
Podemos empezar a hablar ya de pendiente de la recta r, como la *constante* que resulta al dividir la medida de las alturas Δy y las bases Δx de cualquier triángulo que formemos como T_1 (con P_1, P_2 e I como vértices) o T_2 (con P_1, P_3 y J). Insistir que el punto P_3 se puede cambiar, siendo cualquiera de la recta r y el valor de dicha pendiente es constante.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Al hallar la pendiente con otro punto P_3, comprobamos que coinciden los resultados.



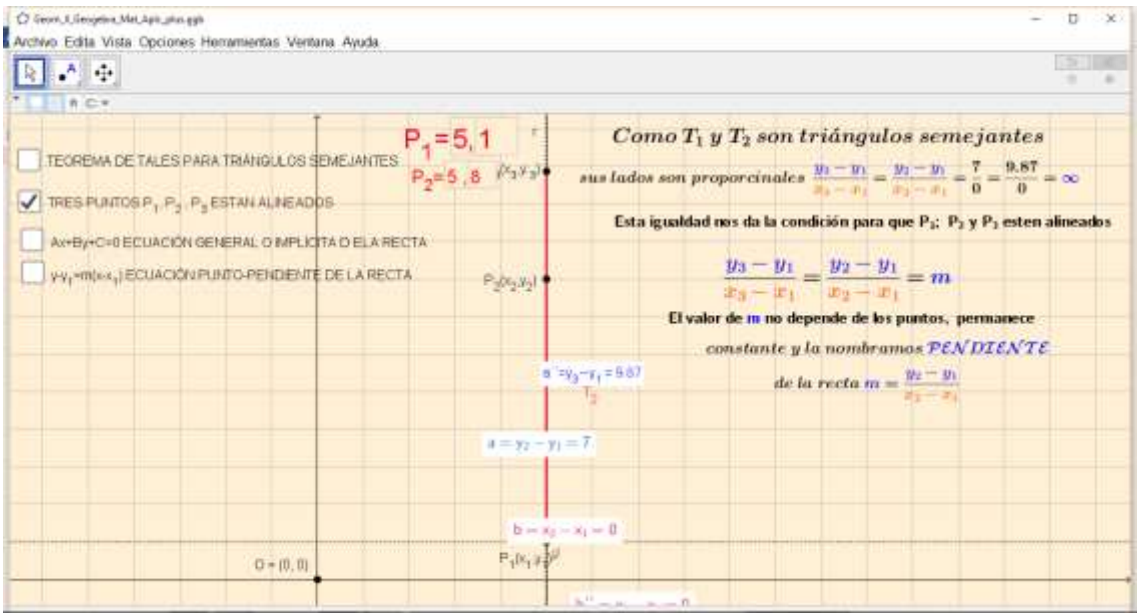
El “*signo de la pendiente*” tiene un significado en la gráfica de la recta. En el ejemplo anterior la pendiente era positiva, $\left(si\ m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} > 0;\ \Delta x > 0 \Longrightarrow \Delta y > 0\right)$ la recta será creciente. Al dibujar otros puntos P_1, P_2 y la recta que los une, resulta una recta decreciente, la pendiente que obtenemos ahora es negativa. Se cumple a la inversa, si la pendiente es negativa es porque la recta es decreciente, $\left(\text{si } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} < 0;\ \Delta x > 0 \Longrightarrow \Delta y < 0\right)$.



¿Qué pasaría si en el cálculo de la pendiente, el numerador es 0 $(y_2 = y_1)$? Vamos a dibujar la recta que pase por P_1 (1,5) y P_2 (5,5).

La pendiente es 0; tiene como interpretación gráfica que es una recta horizontal, sin pendiente; además cuando la recta es horizontal la pendiente es nula.

¿Qué pasaría si en el cálculo de la pendiente, el denominador es 0, $(x_2 = x_1)$? Vamos a dibujar la recta que pase por P_1 (5,1) y P_2 (5,8).



Ahora la pendiente es ∞; lo cual tiene como sentido gráfico que la recta tiene la máxima pendiente, es *vertical*. En el sentido inverso también se cumplirá, si la recta es vertical su pendiente es nº/0

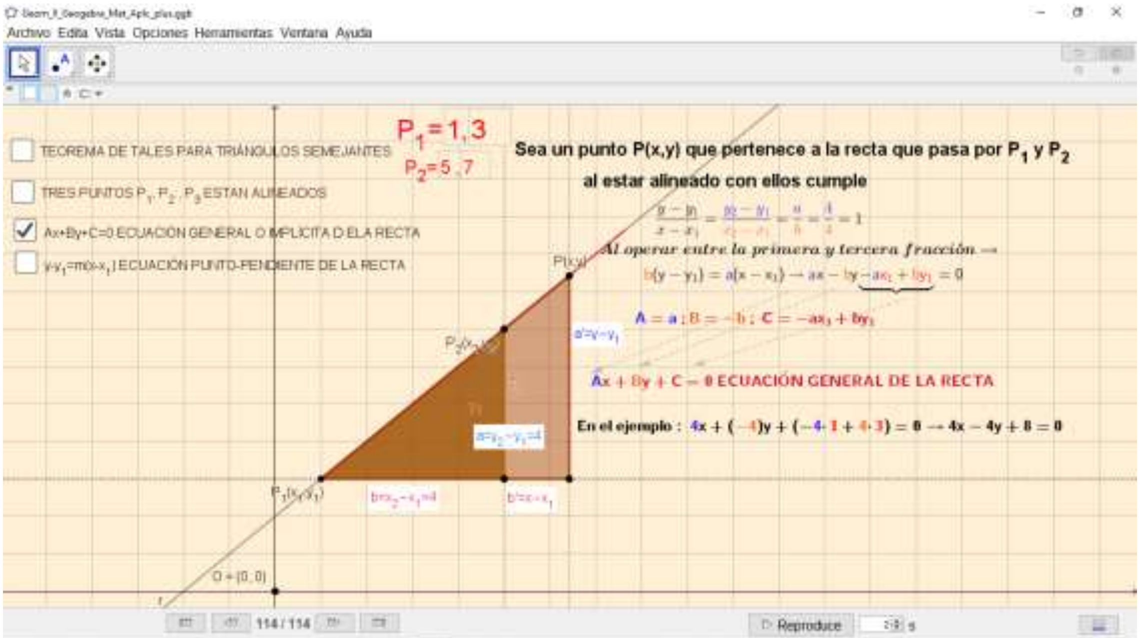
Empezamos a deducir las distintas ecuaciones de las rectas.

Pasamos a dibujar los dos puntos, la recta que pasa por ellos. Si elegimos un punto arbitrario P sobre la recta, dibujamos los triángulos en posición de tales que formaremos, como antes, necesitamos dos rectas entre sí paralelas y perpendiculares a los ejes pasando por los puntos P_2 y P. Obtendremos aplicando Tales:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{a}{b}$$

A partir de aquí, basta hacer click en la tercera casilla de la pantalla de nuestro archivo, explica cómo obtener la ecuación general.

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{a}{b}$$
$$b(y-y_1)=a(x-x_1)$$
$$by-by_1=ax-ax_1$$
$$ax-by+by_1-ax_1=0\ si\ A=a;B=-b\ y\ C=by_1-ax_1$$
$$Ax+By+C=0$$



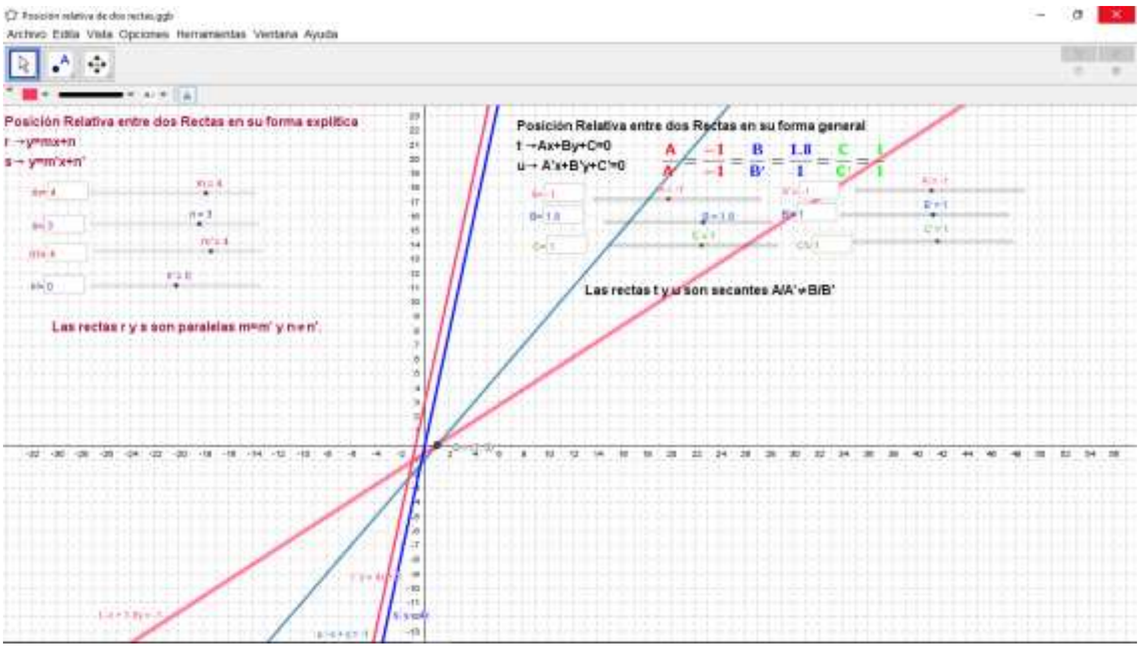
Si pasamos de estas igualdades a las que incluyen la pendiente tenemos, si operamos como sigue; la ecuación punto pendiente de la recta:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=m=\frac{a}{b}$$
$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y=y_1+m(x-x)$$
$$y=mx+y_1-mx_1$$

Y de ella la Ecuación Explícita $y=mx+n$. Donde $n=y_1-mx_1$

Al tener como datos dos puntos, hemos podido deducir los tipos de ecuaciones de la recta r que pasa por ellos. Teniendo la pendiente y un punto directamente obtenemos la ecuación punto-pediente. Y el paso de una a otra consiste en “quitar” denominadores e igualar a 0, despejar “$y-y_1$”, despejar “y”,…etc
Esta es la explicación que nos encontramos en la cuarta y última casilla.

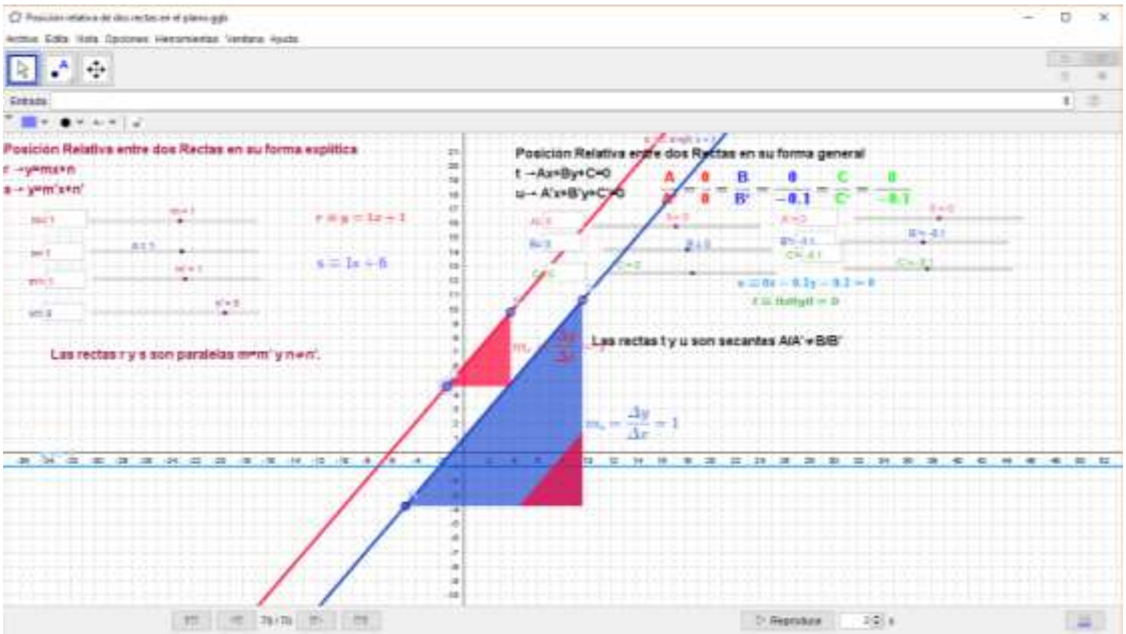
Una vez que hemos terminado podemos llegar a la última pregunta, de la que no tenemos casilla y está desarrollada en el tercer archivo: Posición relativa de dos rectas en el plano



Hay dos partes en la pantalla según el tipo de ecuación de la recta. Como en otras ocasiones, se pueden cambiar los valores de los parámetros: m, n, m', n', A, B, C, A', B' y C'. Hacer notar el sentido gráfico del parámetro "n", como ordenada en el origen, de "m" como cociente del $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, si se desea incluso insistir en el crecimiento y decrecimiento de las rectas en función del signo de "m"

El texto que aparece en pantalla cambiará dependiendo de la posición de las rectas.

En las rectas que son paralelas los triángulos, que calculan sus respectivas pendientes son semejantes, con lados por tanto proporcionales.



CONCLUSIONES

Este trabajo no pretende ser un curso de Geogebra, sino una muestra de su uso en el aula. Mis razones para usar Geogebra en el aula son:

- El uso de presentaciones dinámicas puede mejorar los métodos de exposición por parte del profesor; sobre todo en lo relacionado con la Geometría.
- El alumno puede interactuar con objetos matemáticos de forma simple y natural favoreciendo su autonomía en el aprendizaje.
- Es fácil de usar.
- Se puede usar de Primaria a la Universidad - **Muchas soluciones**
- Tiene una gran comunidad detrás - **Miles de actividades**
- Tiene licencia GPL3 y Creative Commons
- Tiene soporte y actualizaciones
- Es **gratis**

- Funciona en Windows, Mac, Linux, ChromeOS, iOS o Android
- Funciona en cualquier dispositivo con navegador (mejor con Chrome o Chromium)

Aterrizando en el tema de Geometría que nos ocupa, he intentado simplificar la comprensión de todo el tema, con ayuda de Pitágoras y Tales a: la representación de dos puntos, la recta que los une y la construcción de triángulos rectángulos en posición de Tales y una vez obtenidos los resultados con formato de fórmulas, ecuaciones y relaciones usarlos para facilitar su comprensión y uso, como por ejemplo la representación y posición de rectas en el plano.

REFERENCIAS

Teorema de Pitágoras (1). Recuperado de: https://www.geogebra.org/classic/djjtdaqn

Teorema de Tales (2). Recuperado de: https://www.geogebra.org/m/dJAmszjQ

Teorema de Tales (3). Recuperado de: https://www.geogebra.org/graphing/ejv62h2y

Más materiales (4). Recuperado de: https://wiki.geogebra.org/es/Tutoriales

https://wiki.geogebra.org/es/Manual
https://help.geogebra.org/
https://www.geogebra.org/m/Ebm5wBW5

Archivos utilizados.

Geom_I_Geogebra_Mat_Aplic.ggb Recuperado de:
https://www.geogebra.org/graphing/csbzfyva

Geom_II_Geogebra_Mat_Aplic.ggb Recuperado de:
https://www.geogebra.org/classic/hxx6h5fd

Posición_relativa_de_dos_rectas_en_el_plano. Recuperado de:
https://www.geogebra.org/classic/wqysegmz