

Agustín-Luis Cauchy: El rigor en la Matemática

J.L. De María González

Dep. Matemáticas Fundamentales

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional de Educación a Distancia; UNED

Agustín-Luis Cauchy

- La vida de Cauchy
- Sus estudios
- Trabajos profesionales
- Inicios matemáticos y Matemáticas
- El rigor en el Análisis
- Funciones complejas
- EDOs y EDPs
- Álgebra y Mecánica



El rigor en la Matemática

Cauchy instauró un método de fundamentación de las Matemáticas, especialmente del Análisis y se le considera el fundador del rigor en matemáticas lo que permitió el nacimiento y desarrollo de una gran parte de las Matemáticas modernas como la Variable Compleja o las teorías de las Ecuaciones Diferenciales y de la Ecuaciones en Derivadas Parciales que son una de las herramientas fundamentales en la Física

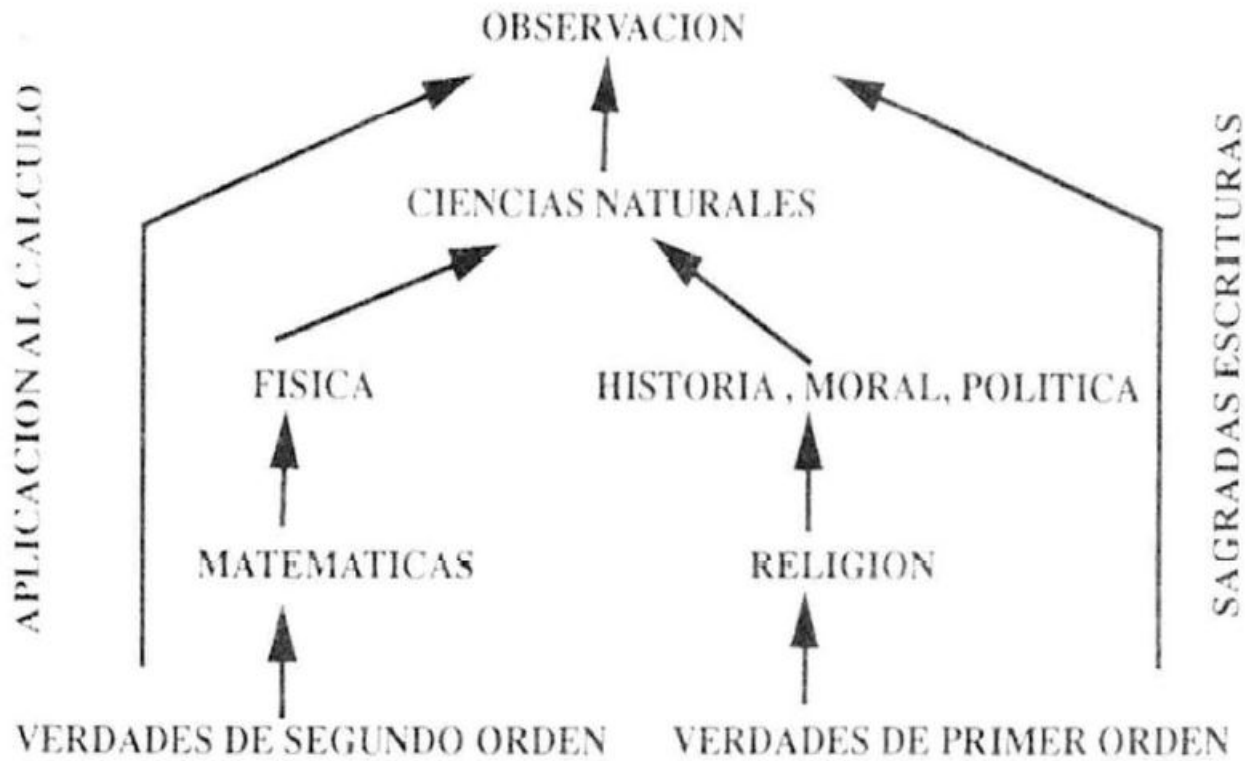


Es muy difícil entender el trabajo de Cauchy sin entroncarlo previamente en el momento histórico en que vivió, pues su nacimiento en el año de la Revolución Francesa, hace que haya sucesos en su vida que forjaron su carácter. Fue una época sin duda de violentos cambios políticos y sociales.

Las ideas y el carácter de Cauchy

- Con un carácter monárquico, conservador y católico, tanto su desarrollo personal y científico fue siguiendo los ciclos de los acontecimientos, perdiendo y recuperando trabajos en la ingeniería y en la universidad, según hubiese monarquía, revolución, república o imperio.
- Fue una persona de principios hasta el punto de negarse a jurar fidelidad a nuevos regímenes y gobernantes lo que incluso le llevó a tenerse que exiliar.

Las ideas de Cauchy



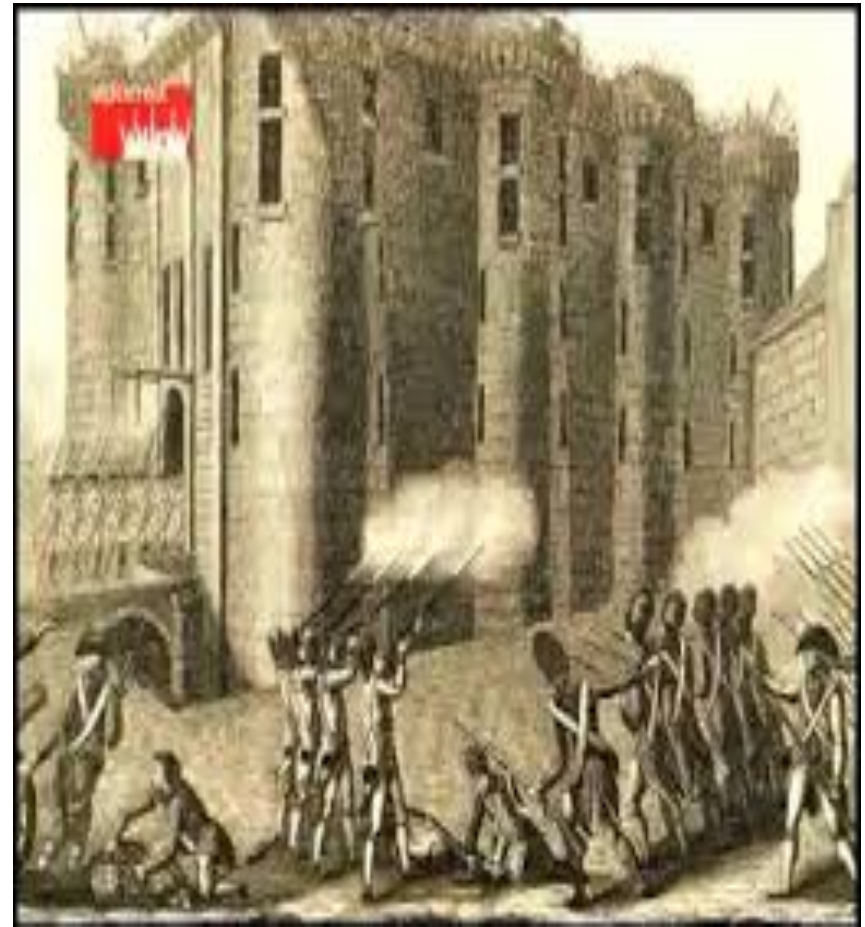
Un poco de historia

- **1789-1799** Revolución Francesa. Abolición de la Monarquía y Instauración de la Primera República. Marcó el final definitivo del absolutismo y dio a luz a un nuevo régimen donde la ciudadanía se convirtieron en la fuerza política dominante en el país.
- Napoleón Bonaparte que llegó a ser Cónsul en la República coronándose emperador en **1804**. Fundó de Academias, protector de las Ciencias y Legislador desarrollando el Código Civil Napoleónico. Europa reaccionó derrocándolo finalmente en 1815. Murió en **1821**.
- Luis XVIII a quien sucedió Carlos X, pero el pueblo no aceptó al monarca y tuvo lugar la revolución de **1830** que elimina la monarquía del antiguo régimen y a la vez ??? corona a Luis Felipe I el monarca ciudadano.
(Ya que estamos Francia le declara la guerra a Méjico conocida como la Guerra de los Pasteles, en 1939)
- En 1848 abdica Carlos X y se declara la Segunda República con presidente Luis Napoleón Bonaparte, sobrino del emperador, (???) que dio un golpe de estado declarándose emperador como Napoleón III.

En medio de todo este jaleo histórico transcurrió la vida de Cauchy que por sus ideas inalterables tuvo que ir ajustando su avatar vital y científico a los cambios

Vida y Obra de Cauchy

- Agustín-Luis nació el 21 de agosto de 1789 en París y fue bautizado en la Iglesia de Saint-Roch pocas semanas después del asalto a la Bastilla y entre cambios como la abolición del Régimen Feudal y la Declaración de los Derechos del Hombre



Vida y Obra de Cauchy

- Los biógrafos se inclinan a pensar que estos años determinaron la tremenda lucha que durante su vida mantuvo Agustín-Luis para intentar deshacer lo resultado de la Gran Revolución de 1789 a la que veía como un gran desastre.
- Cuando Luis Thiroux, el protector de la familia Cauchy y Jefe General de la Policía fue condenado a muerte en 1790, los Cauchy huyeron a Arcueil donde estaba la "Sociedad de Arcueil" fundada por Laplace y Berthollet. Como anécdota, Luis Francisco, el padre, presentó varias veces a Laplace y a Legendre a su hijo Agustín y Laplace en una ocasión dijo refiriéndose a Cauchy:
- "Ahora veis aquí un muchacho que un día no reemplazará a todos nosotros simples geómetras".

Vida y Obra de Cauchy

- En Arcueil , Luis Francisco se hizo cargo de la educación de sus hijos, formándoles en latín y griego, así como dándoles una amplia formación religiosa que familiarizó a Cauchy con lo textos Bíblicos. En una carta de Luis Francisco se dice:
- "Las Ciencias son hermanas de la Arte y nadie interesado en las últimas puede ignorar las primeras".
- Con la caída de Robespierre, el 27 de julio de 1794, la familia regresó a París, donde Luis Francisco fue nombrado Director de la Oficina de Artes y Oficios.

Estudios de Cauchy

- Siguiendo el consejo de Laplace y de Legendre, el padre de Agustín inscribió a su hijo en l'Ecole Centrale du Pantheon en otoño de 1802, donde completó sus estudios de Humanidades. Este colegio era uno de los tres mejores de París. En dos años estudió lenguas clásicas, dibujo y ciencias naturales. El código disciplinario era liberal contrariamente a los Liceo Imperiales que en 1804 Napoleón instauraría.
- Cauchy tenía un carácter vigoroso y una enorme pasión por la verdad que sus contemporáneos confundieron con testarudez, sobre todo en materia de política.

Estudios de Cauchy

- En otoño de 1804 recibió clases de matemáticas por Dinet y en 1805 fue examinado por Biot resultando segundo de los 293 candidatos y 125 admitido , por lo que pudo elegir destino en l'Ecole des Ponts y Chaussés.En aquel tiempo los estudiantes tenían que elegir varios libros de texto.
- Cauchy eligió los siguientes:
 - Curso de Análisis Algebraico de Garnies.
 - Tratado elemental de Cálculo Diferencial e Integral de Lacroix.
 - Tratado de Mecánica de Prony.
 - Geometría Descriptiva de Monge.
 - Hojas de Análisis Aplicado a la Geometría de Monge.
 - Aplicación del Algebra a la Geometría de Monge y Hachette.

Trabajos de Cauchy

- Cuando dejó l'Ecole Polytechnique tenía 18 años .
- Al final de 1807 fue a l'École de Ponts et Chaussées donde ganó 4 premios de estudios . En vacaciones asistía a la Sociedad de Arcueil y en 1808 fue asignado a las obras del sistema de aguas de París al Ourcq Canal y a la construcción del acueducto de Saint-Deni .
- En dos manuscritos presentó un trabajo sobre la teoría de puentes de piedra y sobre la construcción de Arcos.
- En esos momentos ya pertenecía a la congregación de la Santa Virgen, fundada en 1801 por el jesuita Jean Baptiste Bourdier-Delpuits, para llevar la oración a la Universidad bajo el lema "Cor unum et ánima una".
- El enfrentamiento entre el Papado y Napoleón puso a la congregación contra el Imperio.

Trabajos de Cauchy

- En 1810 fue enviado a Cherbourg donde Napoleón comenzaba a construir su flota para las operaciones contra Inglaterra. Cauchy, físicamente frágil y por primera vez separado de su familia durante su estancia en Cherburgo y durante un largo período de tiempo, demostró con creces su cualidades como ingeniero y organizador. Escribía a su padre el 8 de junio de 1810: "El proyecto del Puerto de Napoleón es más y más importante y el trabajo me proporciona conocimiento muy interesantes".
- Llevaba consigo al partir:
 - La Mecánica Celeste de Laplace.
 - El Tratado de las funciones analíticas de Lagrange.
 - La Imitación de Cristo de Kempis.
- Si bien el ambiente no era muy propicio para la creación, allí en Cherburgo comenzó su carrera como matemático.

Inicios Matemáticos

- Empezó trabajando en demostraciones **geométricas** sobre poliedros no convexos siguiendo los trabajos de Poincaré, Legendre y Carnot. Por los temas que trató se puede deducir que Cauchy, como sólo muy pocos matemáticos del siglo XIX, ya desde el inicio de su carrera científica aspiraba a dominar un amplio sector de la totalidad de la matemáticas, incluyendo algunos campos de aplicación de ellas.

Inicios Matemáticos

- En cuanto a sus métodos de trabajo se reflejan muy bien en el comentario de Legendre.
- "Queríamos dar una idea de la demostración de Cauchy, pero hemos reproducido casi completamente sus argumentos. Así hemos comprobado la brillantez con que el joven geómetra ha resuelto un problema que se había resistido a los maestros".
- Cauchy fue uno de los matemáticos más fecundos que han existido. Publicó siete libros y más de 800 trabajos científicos. En el año 1813 Cauchy regresó a París para dedicarse sólo al estudio e investigación en Matemáticas

Matemáticas

- En los años siguientes Cauchy pudo dedicarse sistemáticamente a resolver problemas matemáticos. Fue el período de su más afortunada actividad científica, durante el que, aunque sólo fue en estado embrionario, alcanzó sus más relevantes resultados científico .
- Este período se prolongó hasta la Revolución de julio de 1830.

Matemáticas

- En 1816, tras la caída de Napoleón, fue reorganizada la estructura de las Instituciones Científicas de París, y se procedió contra los científicos de orientación revolucionaria y aquellos que se comprometieron con la Revolución.
- La tranquila vida de Cauchy pronto se vió convulsionada por la Revolución de 1830, en la cual fue reemplazado Carlos X de Borbón por Luis Felipe de Orleans. Cauchy rehusó jurarle fidelidad con lo que perdió su cátedras. Pero eso no fue suficiente, Cauchy se exilió primero a Friburgo y luego a Turín con Carlos X donde fue encargado de la educación del Principe Duque de Chambord. Fue nombrado Barón.

Su pensamiento religioso

- La religión tuvo un enorme peso en la actividad personal y científica de Cauchy, ejemplo de ello es el comentario a una conferencia de un naturalista que Sthendhal (sí, el escritor que era muy aficionado a las Matemáticas) le atribuye en 1826 en un acto de la Academia de Ciencias:
- “Aunque todo lo expuesto fuese tan cierto como erróneo pienso que es, no sería conveniente divulgarlo entre el público, esto no puede más que perjudicar nuestra religión”, lo que produjo grandes carcajadas entre el público y dejó a Cauchy como algo que el mismo pretendía , como un mártir despreciado.

Su pensamiento

- Como académico no estaba obligado a prestar juramento al estado, no obstante lo hizo saber con lo que hubo de hacerse una excepción para que pudiese trabajar en la Oficina de Longitudes.
- En 1848 se instauró la Segunda República que derogó el juramento de fidelidad con lo que volvió a su cátedra de Mecánica Celeste en la Sorbona, que mantuvo a pesar de que Napoleón III reinstauró el juramento.
- La última comunicación de Cauchy a la Academia acaba con la frase "esto e lo que explicaré en una próxima memoria". Dieciocho días más tarde , el 23 de Mayo de 1857, *murió*.

- Otra historia confirmada de Cauchy, extraída del diario del rey de Cerdeña con fecha de 10 de enero de 1831, es que durante una audiencia Cauchy contestó cinco veces iniciando su respuesta con "Ya me imaginaba que Su Majestad me preguntaría esto y ya vengo preparado para responder". Entonces sacó una memoria de su bolsillo y comenzó a leer.

¿hiperactividad matemática?

- Del nivel de producción científica fue tal que publicar tantas notas en el semanario *Comptes Rendus* no era nada fácil y por esto fundó en 1826 una revista privada llamada *Exercices de mathématiques*. Sus doce números anuales se llenaron con artículos de Cauchy de los temas más diversos sin ningún orden ni concierto.

¿hiperactividad matemática?

- La mayor parte de sus trabajos están escritos apresuradamente, pero no de forma poco correcta. Era totalmente distinto de Gauss, quien publicó mucho menos de lo que era capaz y muchos de sus trabajos ni siquiera vieron la luz.
- Los trabajos de Cauchy tienen una frescura de la que carecen los de Gauss, que son maduros.
- Además estimulaban nuevas investigaciones mucho más que los de Gauss, y en temas más diversos y amplios que los de éste. Sus publicaciones y métodos hacían pensar a Gauss que Cauchy tenía una inteligencia demoníaca que le hacía conocer todos los secretos mejor y más profundamente que cualquier otro hombre.

Matemáticos coetáneos con Cauchy y que le influyeron

- **Dirichlet**
- **Gauss**
- **Lagrange**
- **Laplace**
- **Legendre**
- **Rolle**
- **Darboux**
- **Fourier**
- **Lamé**
- **Liouville**
- **Monge**
- **Bessel**
- **Jacobi**
- entre otros

El rigor en el Análisis

- “Pero podría ser un serio error pensar que uno puede encontrar certeza sólo en demostraciones geométricas o en el testimonio de los sentidos”

A.L. Cauchy

Alrededor de 1800 los matemáticos comienzan a ser conscientes de la laxitud de muchas ramas del Análisis:

- no estaba claro el concepto de función
- uso de series sin considerar la convergencia
- errores en cuanto a las series trigonométricas
- la derivada y la integral tienen definiciones ambiguas

El rigor en el Análisis

- Un grupo importante de matemáticos deciden fundamentar el Análisis en la Aritmética y no en la Geometría. (Alrededor de 1800)
- Bolzano, Cauchy, Abel, Dirichlet y Weierstrass comienzan la fundamentación.
- Cauchy en : *Cours d'analyse algébrique, Leçons sur le Calcul différentiel* comienza a usar frases como “aproximación indefinida”, “tan cerca como queramos”, “variable en el límite” que supone un cambio en la metodología del pensamiento de los problemas de su tiempo como la trasmisión del calor y otras cuestiones provenientes de la Física que Fourier, Legendre habían empezado a formalizar dando lugar a nuevas técnicas

COURS D'ANALYSE
DE
L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,
*Ingenieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique,
Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.*

I.^{re} PARTIE. *ANALYSE ALGÈBRE.*



DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

CHEZ DESBRES FRÈRES, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi,
rue Serpente, n.^o 7.

1821

LEÇONS
SUR LE
CALCUL DIFFÉRENTIEL.

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY.

*INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES, PROFESSEUR A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE,
PROFESSEUR ADJOINT A LA FACULTÉ DES SCIENCES, MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,
CHEVALIER DE LA LÉGIION D'HONNEUR.*



ACCADEMIA
DEI BELLE SCIENZE
DI TORINO

A PARIS,

CHEZ DE BURE FRÈRES, LIBRAIRES DU ROI ET DE LA BIBLIOTHÈQUE DU ROI,
RUE SERPENTE, N.^o 7.

1829.

El rigor en el Análisis

- Durante el siglo XVIII había discrepancia incluso en el concepto de función. Una función tenía una expresión analítica concreta. Euler y Lagrange permitían en distintos dominios tener distintas expresiones con lo que podía haber “discontinuidades” en los cambios de dominio. El mismo Gauss añadía la coletilla “hasta donde esto se pueda considerar como función”. Pero las series vienen a exigir una profundización en el concepto de función.

El rigor en el Análisis

- Así Fourier en *“The analytical theory of Heat”* escribe: En general la función $f(x)$ representa una sucesión de valores u ordenadas cada una de la cual es arbitraria. ... No suponemos que dichas ordenadas estén sujetas a una ley común”. De hecho sólo usó funciones con un número finito de discontinuidades, pero ya era un gran avance.
- Al perder el concepto de función la “algebraicidad” se tenía que replantear las cuestiones de continuidad, derivabilidad, integrabilidad, desarrollos en series y otras cuestiones relativas a las convergencias y límites.
- Hubo incluso que replantear el concepto de Número Real, que aún no estaba formalizado.

El rigor en el Análisis

- Finalmente Dirichlet, Bolzano y Cauchy fueron los que formalizaron los conceptos que hoy usamos .



Dirichlet 1805-1859



Bolzano 1781-1848



Cauchy 1789-1857

Funciones complejas

- Los descubrimientos más importantes de Cauchy están en el campo de las funciones de variable compleja.
- Euler había trabajado en casos concretos y d'Alembert había usado las hoy llamadas ecuaciones de Cauchy-Riemann en el contexto de sus investigaciones sobre Hidrodinámica.
- Las ecuaciones son:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial x}$$
$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial S}{\partial y}$$

Funciones complejas

- Donde V y S son dos funciones reales de dos variables reales.
- Cauchy probó que la parte real e imaginaria de una función holomorfa cumplían las condiciones de Cauchy Riemann, y viceversa si $V(x,y)$ y $S(x,y)$ son diferenciables con continuidad.
- Los números complejos no fueron aceptados sin reservas y tampoco las funciones multiformes.
- La interpretación geométrica fue consolidada por Gauss en 1830. Asimismo Gauss dio varias demostraciones del Teorema Fundamental del Álgebra.

Funciones complejas

- En el Cours d'Analyse se expone la primera sistematización de la Teoría de los números complejos y sus funciones (1821). Pero aún los consideraba como pares de funciones reales.
- El salto conceptual fue entender $f(z)$ como una función de una variable compleja z . lo que le permitió plantear la derivación y la integración análogamente a una función real.

Funciones complejas

- Cauchy consideraba una función diferenciable $f = u + iv$ de variable compleja $z = x + iy$ y usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann formaba la integral doble

$$\iint_R \frac{\partial u}{\partial y} dy dx = \iint_R \frac{\partial v}{\partial x} dx dy$$

sobre un rectángulo R .

Funciones complejas

- Y como en \mathbb{R} podía haber una singularidad se inició la Teoría de Residuos en la serie de Laurent de la función $f(z)$.

Funciones complejas

- Uno de los resultados más importantes aparece en una memoria suelta, el Teorema Integral de Cauchy:

Si f es holomorfa en un dominio D simplemente conexo y C es un camino cerrado entonces

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

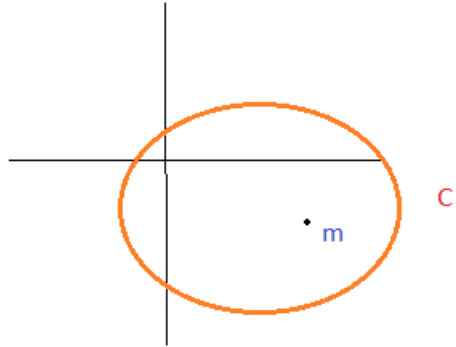
Funciones complejas

Se deducen del teorema por ejemplo:

- Las funciones holomorfas son infinitamente derivables y desarrollables en serie de potencias.
- Fórmula integral de Cauchy: *Si f es holomorfa en un dominio D simplemente conexo y C es un camino cerrado que contiene a un punto m , entonces*

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-m} dz = 2\pi i f(m)$$

Funciones complejas



$$\oint_C \frac{f(z)}{z-m} dz = 2\pi i f(m)$$

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

Funciones complejas

En 1827 desarrollo un método para comprobar la convergencia de una serie de Lagrange de Mecánica Celeste y que le lleva al desarrollo en serie de potencias de una función en el campo complejo con derivada continua y a establecer el radio de convergencia.

Cauchy tuvo una producción enorme en esta área, pero en el ansia de publicar pasó por alto teoremas como el de Liouville: “Una función acotada en todo el plano y holomorfa debe ser constante” o el de los puntos de acumulación del conjunto de ceros.

EDO y EDP

La metodología con la que trata los problemas de ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales tiene dos ideas básicas:

- La existencia de soluciones ha de ser probada y no es evidente ni aun cuando se exprese de forma algorítmica.
- La unicidad de la solución se debe de lograr mediante las condiciones iniciales o de contorno.
- Así surge el PROBLEMA DE CAUCHY en EDP que viene de sus investigaciones en ondas en líquidos.
- Una de las motivaciones del famoso Calcul des limites fue el estudio sistemático de las ecuaciones diferenciales y en derivadas parciales.

EDO y EDP

$$\begin{array}{ll} u(x) = f_0(x) & \text{para todo } x \in S; \\ \frac{\partial^k u(x)}{\partial n^k} = f_k(x) & \text{para } k = 1, \dots, m-1 \text{ y todo } x \in S, \end{array}$$

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = g(t)$$

Los estudios de las ecuaciones diferenciales le llevaron a tratar cuestiones algebraicas .

También amplió los estudios sobre la transformada de Fourier y fue el primero en establecer EL TEOREMA DE INVERSIÓN DE LA TRASFORMADA DE FOURIER.

EDO y EDP

- En 1821 consideró las ecuaciones

$$F\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial t}\right)w = 0$$
$$F(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, s) = 0$$

- Y el método de la transformación de Fourier le permitió obtener la solución general mediante superposición de soluciones exponenciales.

Álgebra

- Sistematizó el uso de los determinantes con el teorema del producto, la matriz inversa y los sub-determinantes.
- Utilizó el Jacobiano de dimensión 3.
- En una memoria estableció los complejos como polinomios en x módulo x^2+1
- Demostró los teoremas de clasificación de formas cuadráticas provenientes de los estudios de las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden.
- Contribuyó a varios resultados en teoría de números n-gonales e incluso intentó probar el teorema de Fermat.

Mecánica

- Contribuyó a la Mecánica de los cuerpos rígidos como el elipsoide de inercia y los movimientos infinitesimales helicoidales.
- "La presente investigaciones han ido sugeridas por un trabajo de M. Navier del 14 de agosto de 1820. Para establecer la ecuación del equilibrio de un plano elástico, el autor había considerado do clases de fuerzas, las primeras producidas por dilatación o contracción, la otras por flexión del plano. Además, en sus investigaciones él suponía ambas perpendiculares a la líneas o caras sobre las que actúan. Vino a mi mente que ambas clases podían reducirse a una, que llamaremos tensión o presión, de la misma naturaleza que la presión hidrodinámica ejercida por un fluido sobre la superficie de un sólido.

- La nueva presión no tendría por qué ser perpendicular a las caras ni tener la misma dirección en cada punto ...
Además. la presión o tensión ejercida sobre un plano arbitrario se descompone en magnitud y dirección en la ejercida sobre tres planos perpendiculares . Yo adopté este punto de vista cuando Fresnel me habló de él en torno a su trabajo sobre la Luz, el cual ha sido presentado parcialmente a la Academia, y me dijo que había obtenido un teorema análogo al mío ... "
- Raramente una teoría matemática ha sido explicada en tan pocas palabras y sin utilización de símbolos.

Conclusiones

- El genio de Cauchy se manifestó tanto en la variedad de temas como en la innovación con que los trataba.
- A pesar de ser el fundador del Rigor pasó por alto detalles debido a que unos trabajos le sugerían otros llegando a publicar más de 700 artículos de distintas materias.
- Su forma de trabajar ha influido en los matemáticos posteriores tomando la metodología y exigencia como un estándar necesario para la aceptación de resultados.

- Fue inventor o ¿descubridor? de varias ramas de las Matemáticas sin que hubiera precedentes a muchos resultados que obtuvo, dejándolas en un grado de madurez casi impensable en desarrollos muy novedosos.
- Su formación técnica le llevó a tratar con temas abstractos de aplicación a problemas concretos. Por ejemplo, en Física se le considera el inventor de la teoría de la Elasticidad.

- Las Matemáticas tienen una deuda con grandes pensadores que supieron atrapar una idea y elaborarla la mayor parte de las veces innovando sin desalentarse.

Muchas Gracias ...