¿Hay sitio para la Geometría Sintética en los Grados en Matemáticas del siglo XXI?

Antonio F. Costa
UNED
Presentado en eXIDO19 (2019)

1. Introducción. Dificultades y ventajas para que la Geometría sintética figure en los planes de estudio.

Con la reforma de los planes de estudio de los grados de matemáticas ocasionada por el espacio europeo de educación superior se abrió un debate sobre qué contenidos se deben incluir y cuáles no. En muchos casos las decisiones se tomaron por motivos prácticos más que académicos y científicos y por eso la geometría sintética, sin coordenadas, ha ido desapareciendo de los estudios de un graduado en matemáticas. Sin embargo está presente en mayor o menor grado desde los primeros niveles de educación y en niveles mucho más sofisticados de las matemáticas, por lo que sorprende que sea difícil encontrar un sitio para un estudio de la geometría elemental desde un punto de vista superior.

De forma esquemática se pueden enumerar, entre otros, los siguientes motivos a favor de su inclusión dentro del currículo de un matemático:

- Ejemplo de modelo matemático de la realidad
- Contenidos matemáticos necesarios para la docencia en otros niveles educativos
- Aprendizaje y ejercitación del razonamiento y método matemático
- Historia y motivación para otros contenidos
- Destrezas específicas (visión espacial, geométrica, ...)
- Existe en muchas universidades extranjeras

Como dificultades o razones contrarias podemos enumerar las siguientes:

- Dificultad para el alumnado y profesorado
- Currículos ya muy cargados

2. La geometría sintética en la UNED

En la UNED, por el momento el sitio para la Geometría Sintética se halla en la asignatura “Geometría Básica” del segundo cuatrimestre del primer curso.

Se trata de una asignatura de 6 créditos con los siguientes contenidos:

- Espacios métricos,
- Axiomática de la geometría euclidiana plana,
- Isometrías,
- Teoremas de Tales y Pitágoras,
- Semejanzas,
- Circunferencias,
- Geometría Hiperbólica,
- Polígonos y Construcciones con regla y compás,
- Geometría espacial,
- Isometrías del espacio
- Poliedros.

Las competencias que se adquieren o mejoran con esta asignatura son:

CED1 Comprensión de los conceptos básicos y familiaridad con los elementos fundamentales para el estudio de las Matemáticas superiores

CED2 Destreza en el razonamiento cuantitativo, basado en los conocimientos adquiridos

CEP2 Habilidad para formular problemas de optimización, que permitan la toma de decisiones, así como la construcción de modelos matemáticos a partir de situaciones reales

CEP4 Resolución de problemas

CEA1 Destreza en el razonamiento y capacidad para utilizar sus distintos tipos, fundamentalmente por deducción, inducción y analogía

CEA2 Capacidad para tratar problemas matemáticos desde diferentes planteamientos y su formulación correcta en lenguaje matemático, de manera que faciliten su análisis y resolución. Se incluye en esta competencia la representación gráfica y la aproximación geométrica

CEA3 Habilidad para crear y desarrollar argumentos lógicos, con clara identificación de las hipótesis y las conclusiones

CEA4 Habilidad para detectar inconsistencias de razonamiento ya sea de forma teórica o práctica mediante la búsqueda de contraejemplos

CEA6 Habilidad para extraer información cualitativa a partir de información cuantitativa

CEA7 Habilidad para presentar el razonamiento matemático y sus conclusiones de manera clara y precisa, de forma apropiada a la audiencia a la que se dirige, tanto en la forma oral como escrita

CE1 Razonamiento crítico, capacidad de evaluar trabajos propios y ajenos.

3. Una experiencia

Dado que en la Jornadas Exido19 se pretende que se presenten situaciones reales, a continuación se expone un ejemplo de disfrute con esta asignatura en el curso 18/19.

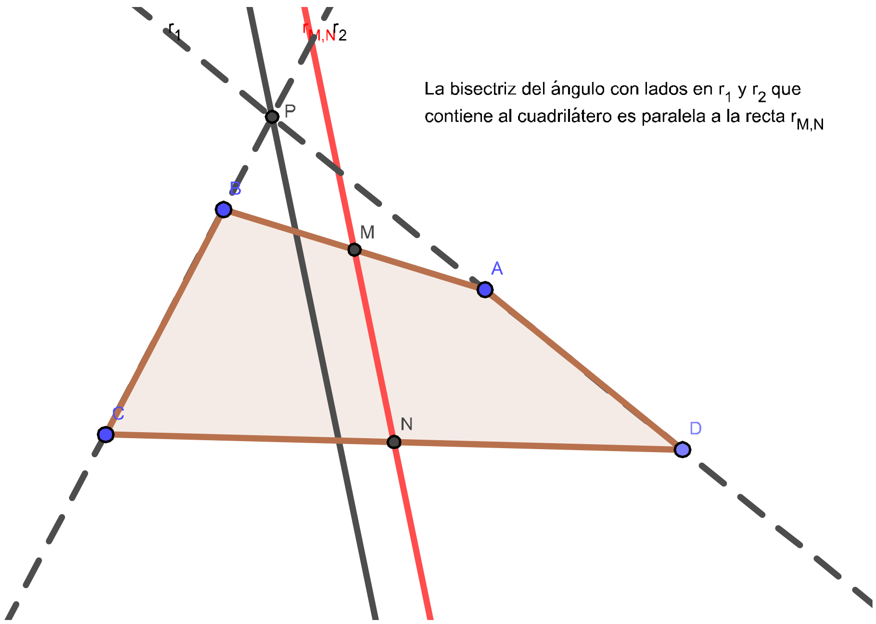

Figura 1: Enunciado

En la prueba de evaluación continua (PEC) se propuso el siguiente ejercicio:

En la figura 1 se da un cuadrilátero isósceles $ABCD$, con $AD = BC$. El punto P es el punto de corte de las rectas que contienen a los lados congruentes AD y BC, que suponemos que no son paralelas. M es el punto medio del lado AB y N el punto medio del lado CD.

Demostrar que la recta r_{MN}, que pasa por M y N, es paralela a la bisectriz b del ángulo con vértice en P que muestra la figura 1.

El ejercicio está tomado del libro "Exercices de Geometrie" (1909), escrito por el hermano Gabriel Marie. Es un libro con más de 1300 páginas escrito bajo los auspicios del Instituto de los Hermanos de las Escuelas Cristianas (La Salle) y que fue ampliamente utilizado en Francia y Bélgica. Es un libro con numerosísimos ejercicios y con una inmensa cantidad de información bibliográfica e histórica. El autor firmaba con las iniciales F.G.M y fue el Superior General de su orden en 1897.

Los estudiantes de la UNED consiguieron cuatro métodos distintos de resolución, incluyendo el que se ofrecía como indicación en el enunciado de la PEC.

- Como ejemplo doy en primer lugar una de las soluciones sin usar coordenadas (para obtener esta solución se daban indicaciones en el enunciado de la prueba):

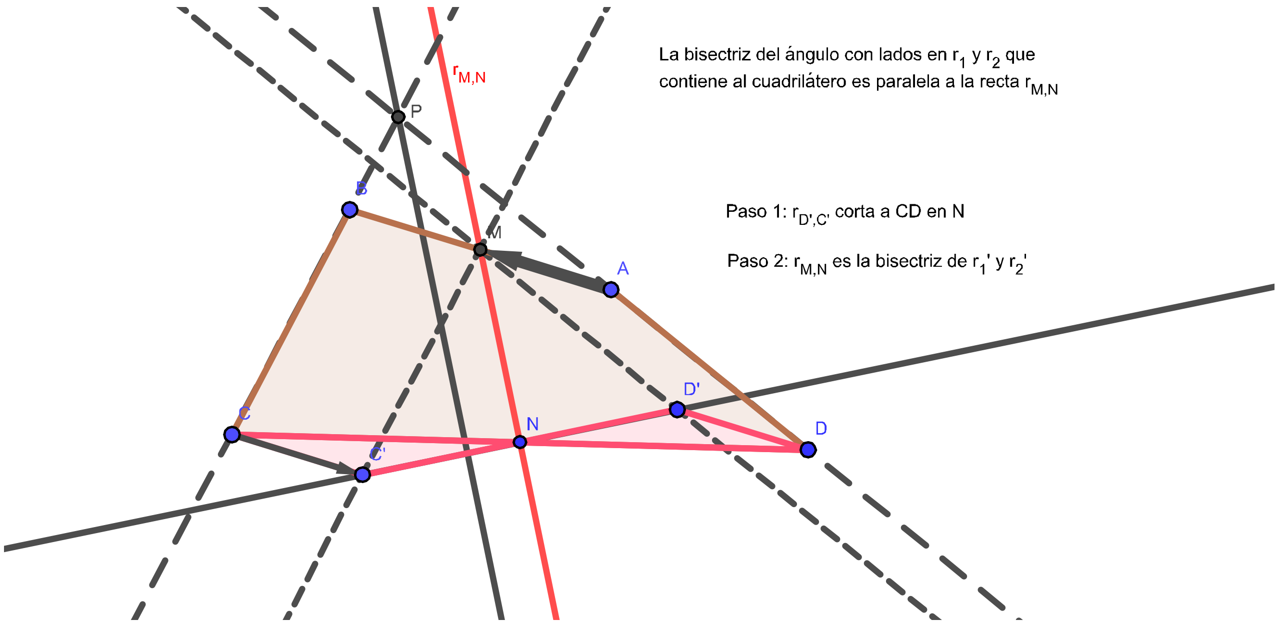

Figura 2: Primera solución

Sea ω el vector con origen en A y final en M. Llamamos D' a la imagen de D por la traslación de vector ω y C' a la imagen de C por la traslación de vector $-\omega$.

El primer paso es probar que N es el punto medio entre C y D' (los triángulos NCC' y NDD' son congruentes). Ahora se observa que el triángulo $MC'D'$ es isósceles y entonces la recta r_{MN} es la bisectriz del ángulo con vértice M y lados en las rectas $r_{MC'}$ y $r_{MD'}$. Como $r_{MC'}$ es paralela a la recta que contiene a BC ($r_{MC'}$ es la imagen de r_{AB} por la traslación de vector ω) y $r_{MD'}$ es paralela a la recta que contiene a AD, entonces se llega a que la bisectriz b es paralela a r_{MN}.

- La solución del hermano Gabriel Marie: Se trazan paralelas a r_{AD} que pasan por B y por C, y paralelas a a r_{BC} que pasan por A y por D. Se forma un rombo, como muestra la figura y se comprueba que una de las diagonales es paralela a r_{MN}.

- No me resisto a dar mi solución original: Dado que los segmentos AD y BC son congruentes, existe una isometría que transforma el punto A en B y el D en C. Además podemos construir una isometría inversa i con $i(A) = B$ y $i(D) = C$: basta componer la reflexión σ_b con eje la bisectriz b con una traslación τ_u paralela a la recta r_{CD}. La isometría resultante es una reflexión o una reflexión con deslizamiento. El eje de esta isometría inversa es paralela a la

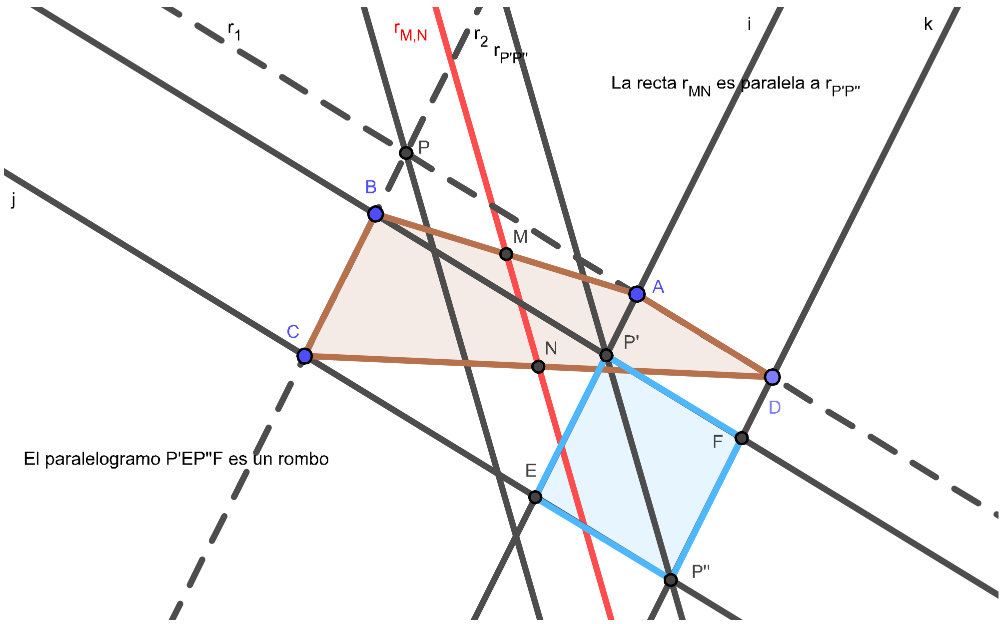

Figura 3: Solución Gabriel Marie

bisectriz b, pues $\tau_u = \tau_{v+w} = \tau_v \circ \tau_w$, donde $v \in \overrightarrow{b}$ (dirección de la recta b) y $w \in \overrightarrow{b}^{\perp}$ (dirección ortogonal a b) y entonces:

$$i = \tau_u \circ \sigma_b = \tau_v \circ \tau_w \circ \sigma_b = \tau_v \circ \sigma_{b'}$$

donde b' es el eje de la isometría inversa i y b' es paralela a b. Como el eje de una isometría inversa i es la recta que contiene a los puntos medios de $X, i(X)$, donde X es todo punto del plano, tenemos que $r_{MN} = b' \| b$.

- La solución analítica (usando coordenadas) es automática y se hace casi sin pensar:

Tomamos un sistema de referencia con centro en P y primer vector de la base con final en B. Entonces las coordenadas de los vértices del cuadrilátero son:

$B = \overrightarrow{PB} = (1, 0)$, $A = \overrightarrow{PA} = (a\cos(\theta), a\sin(\theta))$, $C = \overrightarrow{PC} = (1 + c, 0)$, $D = \overrightarrow{PD} = ((a + c)\cos(\theta), (a + c)\sin(\theta))$

Los puntos medios M y N tienen por coordenadas:

$M = \frac{1}{2}(a\cos(\theta) + 1, a\sin(\theta))$ y $N = \frac{1}{2}((a + c)\cos(\theta) + 1 + c, (a + c)\sin(\theta))$

Entonces el vector $\overrightarrow{MN}$ es: $\frac{1}{2}(c(\cos(\theta) + 1), c\sin(\theta))$

Para saber si el vector $\overrightarrow{MN}$ está en la dirección de la bisectriz b hemos se ver si el coseno del ángulo α que forma $\overrightarrow{MN}$ con $\overrightarrow{PA}$ coincide con el coseno del ángulo β que forma $\overrightarrow{MN}$ con $\overrightarrow{PB}$:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{MN}\right\| \left\|\overrightarrow{PA}\right\|} \left\langle \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PA} \right\rangle =$$

$$\frac{1}{a\left\|\overrightarrow{MN}\right\|} \left\langle \frac{1}{2}(c(\cos(\theta)+1), c\sin(\theta)), (a\cos(\theta), a\sin(\theta)) \right\rangle = \frac{c}{2\left\|\overrightarrow{MN}\right\|}(\cos(\theta)+1)$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{MN}\right\| \left\|\overrightarrow{PB}\right\|} \left\langle \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PB} \right\rangle =$$

$$\frac{1}{\left\|\overrightarrow{MN}\right\|} \left\langle \frac{1}{2}(c(\cos(\theta)+1), c\sin(\theta)), (1,0) \right\rangle = \frac{c}{2\left\|\overrightarrow{MN}\right\|}(\cos(\theta)+1).$$

La comparación entre soluciones originó un debate muy interesante sobre las ventajas e inconvenientes de cada método, lo que hace valorar tanto la aproximación sintética como la analítica.

Es destacable que muchos de los argumentos a favor o en contra hacen llamada a razones estéticas y en mi opinión esto es un hecho importante en la formación de un matemático, aunque no aparezca en las listas asépticas de competencias.

4. Bibliografía

Es imposible ofrecer una bibliografía completa en este campo. A continuación aparece una selección muy personal del autor:

P. Buser, A. F. Costa, Geometría Básica, Sanz y Torres, Madrid 2011.

C. H. Clemens and M. A. Clemens, Geometry for the Classroom: Exercises and Solutions, Springer, New York 1991.

H. S. M. Coxeter and S. L. Greitzer, Geometry revisited, New Mathematical Library, Mathematical Society of America, 1967. Hay una traducción al español de DSL Euler Editores, Madrid 1993.

N. Efimov, Geometría Superior, MIR, Moscú 1984.

Euclides, Euclid's Elements (translator and editor T.L. Heath), Dover, New York, 1956.

H. Eves, Survey of Geometry in 2 vols, Allyn and Bacon, Boston, 1972.

Frère Gabriel-Marie, Exercices de Géométrie, Editions Jacques Gabay, Sceaux, Reprint 1991.

J. Hadamard, Leçons de géométrie élementaire, Editions Jacques Gabay, Sceaux, Reprint 1988.

R. Hartshorne, Geometry: Euclid and Beyond, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York 2005.

D. Hilbert, Fundamentos de la Geometría, CSIC, Madrid, Reprint 1996.

D. Hilbert and S. Cohn-Vossen, Geometry and imagination, Chelsea, New York, 1990.

J. M. Lee, Axiomatic Geometry, Pure and Applied Undergraduate Texts, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2013.

E. E.Moise, Elementary geometry from an advanced standpoint, Addison-Wesley, Reading, 1990.

A. Pogorelov, Geometry, Mir, Moscú, 1987.

P. Puig Adam, Curso de geometría métrica, tomo 1, Euler Ed., Madrid 1986.

J. R. Silvester, Geometry, ancient and modern, Oxford University Press, Oxford, 2001.

S. Stahl, Geometry, from Euclid to knots, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2003.

J. Stillwell, The four pillars of geometry, Springer, New York 2005

P. Ventura Araújo, Curso de geometría, Gradiva, Lisboa 1998.