

# Un curso de Cálculo con



**Palencia-González, F.J. y García-Llamas, M.C.**  
Dpto. de Teoría Económica y Economía Matemática  
Grupo de Innovación Docente: SALT-CG

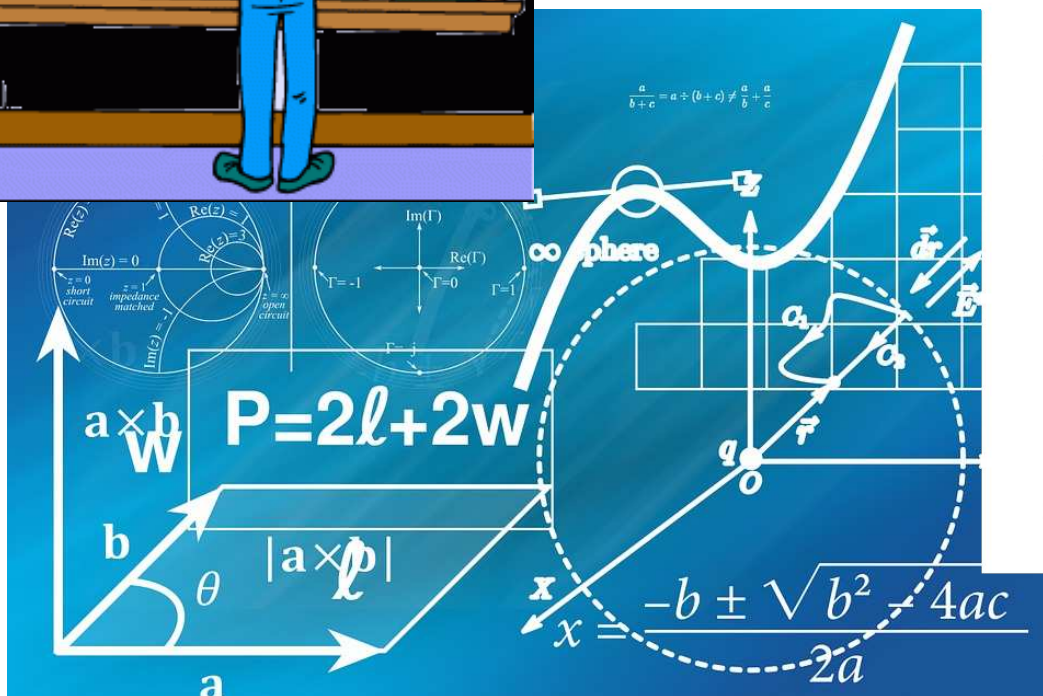
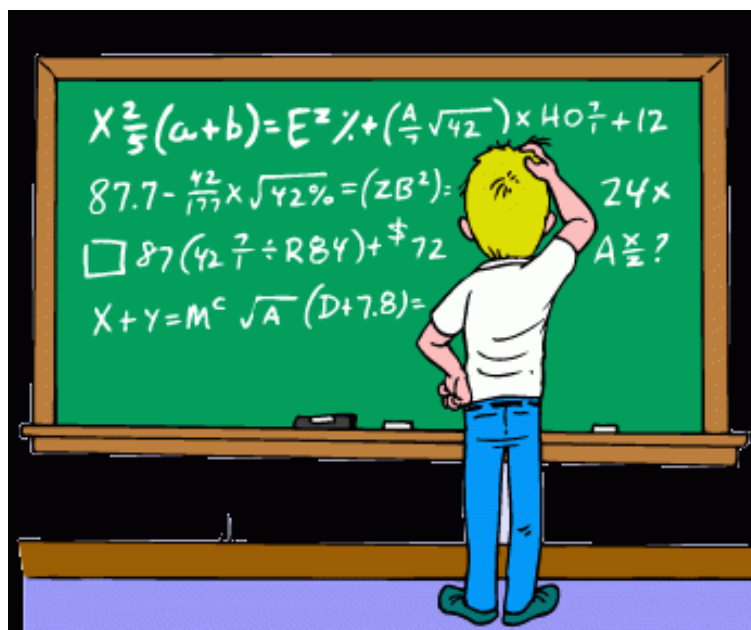
**UNED**



## Los alumnos de la UNED

- Características generales
  - Compatibilizar estudios con actividades laborales
  - Cargas familiares
  - Años sin estudiar
  - Segundas carreras: Ingenierías vs Derecho
- Particularidades de Económicas, ADE y Turismo
  - Vagos conocimientos en Matemáticas
  - Muchos años sin estudiarlas
  - No las han visto en los últimos cursos realizados
  - Rechazo social a la materia: “ansiedad matemática”

## ¿Qué se estudia en estas asignaturas?



		Matemáticas para la Economía: Cálculo	011
65011026	Febrero - 2017 Original	GRADO EN ECONOMÍA	65
		Duración: 120 min.	
		EXAMEN: Tipo A Desarrollo	1º Cuatrimestre NO
Material: Calculadora no programable			Hoja 1 de 1

## Cuestiones:

1. a) Condición necesaria de convergencia de series. (1 punto)

- b) Hallar el polinomio de Taylor de grado 2 en un entorno de  $x = 1$  para la función:

$$f(x) = x^2 e^x + \ln(x) \quad (1 \text{ punto})$$

2. a) Enunciar el teorema de Euler para funciones homogéneas y aplicarlo en caso de homogeneidad de la siguiente función:

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \quad (1 \text{ punto})$$

- b) Calcular la siguiente integral:

$$\iint_{\Delta} x^2 y (x + y) dx dy$$

Dónde  $\Delta$  es el recinto tal que  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 2$ . (1 punto)

## Problemas:

1. Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x^2 - 1)}$$

- a) Determinar las asíntotas.  
b) Determinar los intervalos de crecimiento y los extremos relativos.  
c) Estudiar puntos de inflexión, la concavidad y convexidad. (3 puntos)

2. Hallar los extremos relativos de la función

$$u = x + y + z, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0$$

Condicionados a

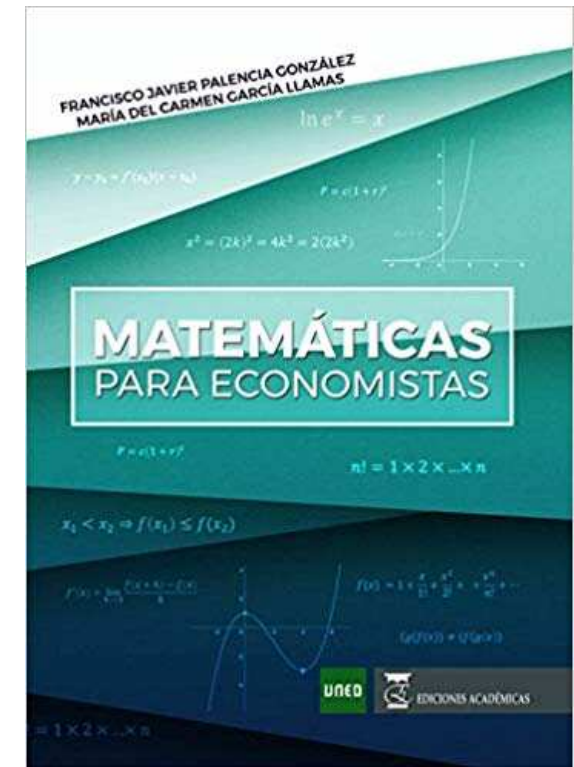
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

1\_MpE: Cálculo

(3 puntos)

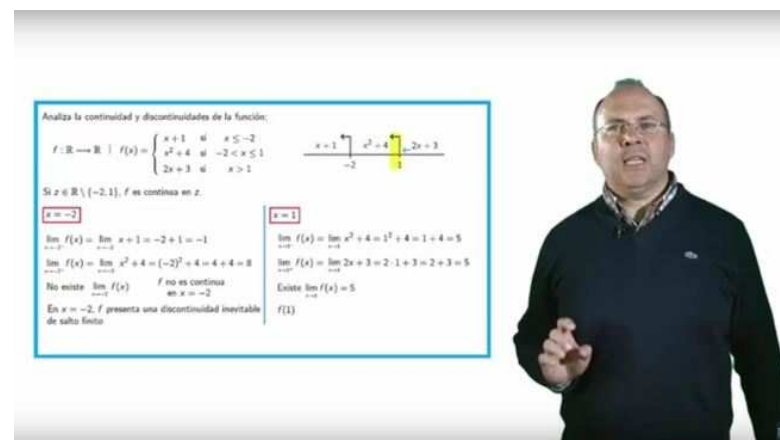
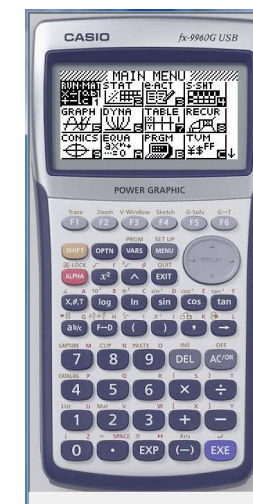
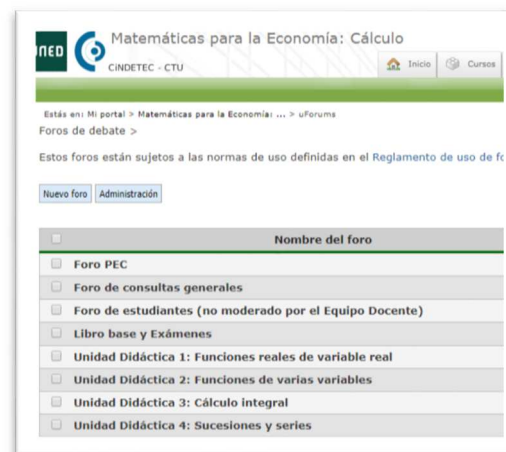
## Temario

- 1.- Conceptos básicos
- 2.- Funciones
- 3.- Límites y continuidad
- 4.- Derivación
- 5.- Aplicaciones de la derivada
- 6.- La integral
- 7.- Funciones de varias variables
- 8.- Optimización de funciones, extremos condicionados e integrales múltiples
- 9.- Sucesiones y series



## Soluciones

- Explicación de la teoría:
  - Tutorías presenciales
  - Campus Virtual
  - Libros y apuntes
- Resolución de problemas:
  - El profesor en casa
  - Calculadora científica
  - Un auto corrector



## Herramientas informáticas

- Software libre

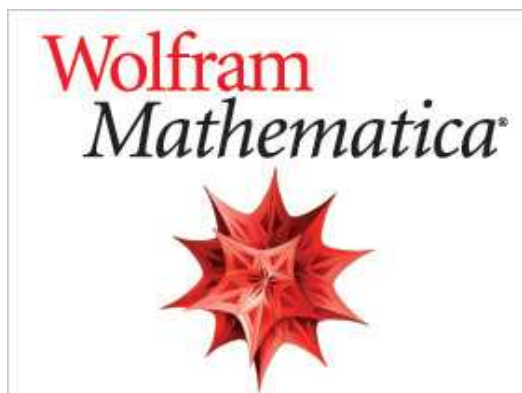
GeoGebra



Octave



- Software comercial





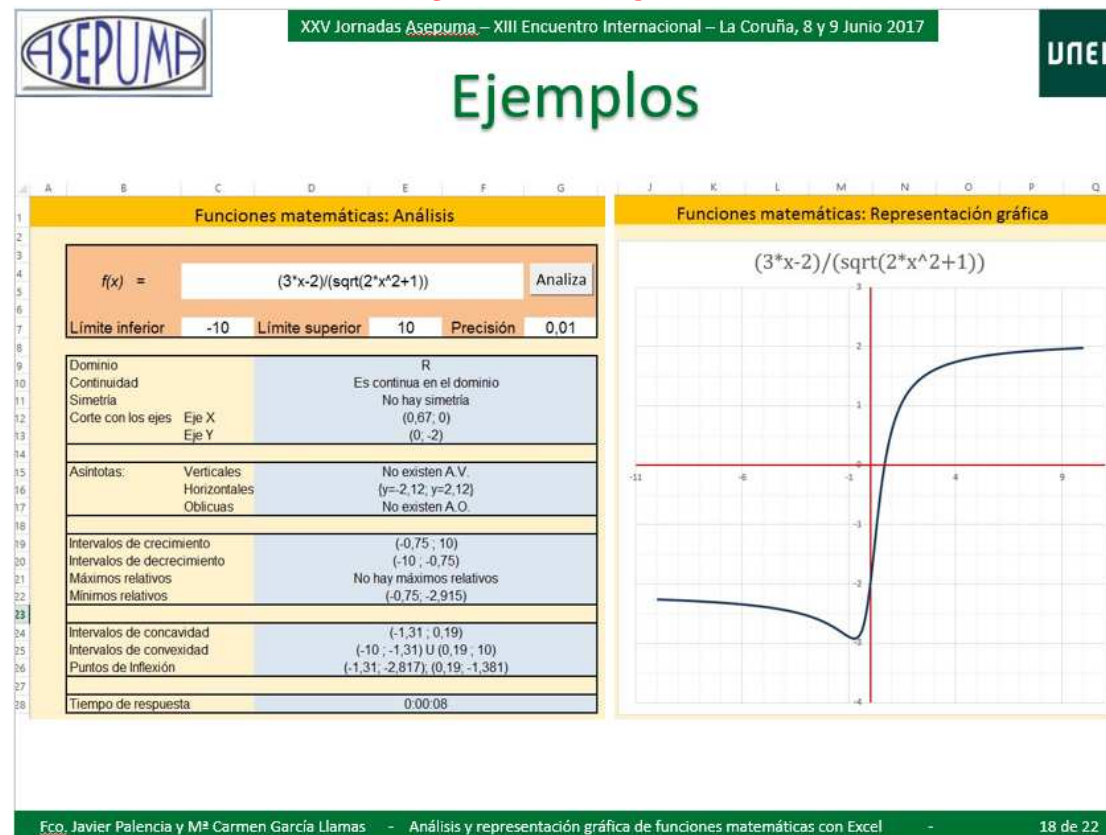
## Microsoft Excel

- Serie de artículos de utilización de la hoja de cálculo para la resolución de problemas matemáticos
  - Resolución de ecuaciones diferenciales
  - Resolución de integrales definidas
  - Resolución de ecuaciones no lineales
  - Resolución de sistemas de ecuaciones lineales
  - Clasificación y representación de cónicas

## Microsoft Excel

- Análisis y representación gráfica de funciones matemáticas con Excel.

**Premio ASEPUMA Mejor Propuesta Docente '17**





## Temario y Miniguías Wolfram Alpha

1.- Conceptos básicos	Conceptos básicos
2.- Funciones	Estudio de Funciones
3.- Límites y continuidad	Cálculo de límites y continuidad
4.- Derivación	Cálculo de derivadas
	Polinomio de Taylor
5.- Aplicaciones de la derivada	Estudio y representación gráfica de funciones
6.- La integral	Cálculo de integrales
7.- Funciones de varias variables	Funciones de varias variables
8.- Optimización de funciones, extremos condicionados e integrales múltiples	Determinantes funcionales y extremos
9.- Sucesiones y series	Sucesiones y series

## ¿Qué es una miniguía?

- Documento compuesto de unas 15 diapositivas
- Muy visual, acompañado de imágenes
- Sencilla y atractiva, con lenguaje directo
- Fácil de entender y de probar
- Contenidos
  - Concepto a estudiar, ¿dónde encontrarlo?
  - ¿Cómo escribir expresiones?
  - Sintaxis de los comandos
  - Ejemplos explicativos
  - Hoja de ejercicios

## Miniguía - Introducción

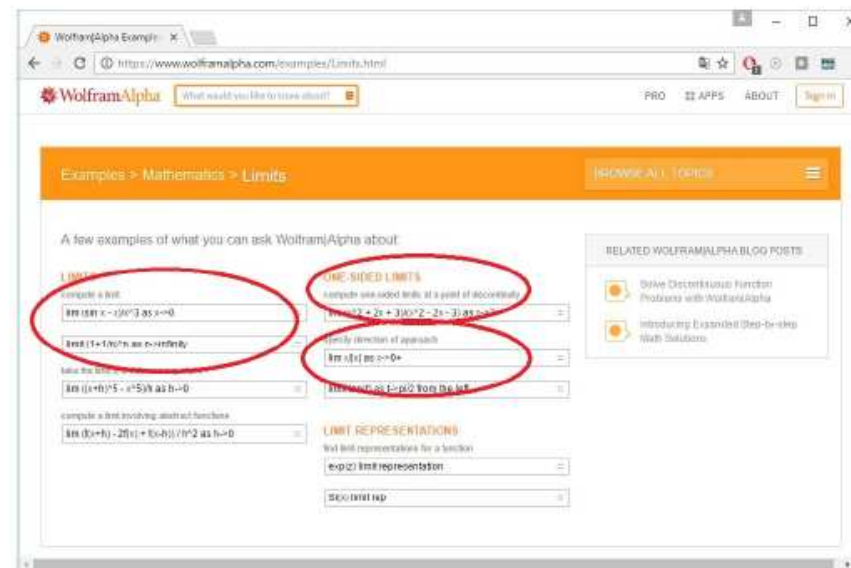
- Conceptos a estudiar, y como llegar a ellos

UNED

Cálculo de límites con Wolfram | Alpha

### Límites

- De los diversos tipos que se pueden calcular nos interesan los límites en un punto, y los límites laterales.



## Miniguía - Expresiones

- Se explica cómo y dónde introducir las expresiones

UNED

Funciones de varias variables con Wolfram | Alpha

### Escribir expresiones

- Se ha de tener cuidado con el uso de los paréntesis a la hora de introducir la función con la que queramos realizar operaciones. Los símbolos que pueden utilizarse son:

"+"	suma	"*"	multiplicación	"^"	potencia
"-"	resta	"/"	división	"sqrt"	raíz cuadrada
- El valor al que tiende la variable puede ser un número o infinito ("infinity").



## Miniguía - Sintaxis

- Se introduce la sintaxis de los comandos



Cálculo de derivadas con Wolfram | Alpha

### Derivada segunda

- Para calcular la segunda derivada de una función podemos hacerlo de dos formas:
- Una forma es introduciendo la variable sobre la que queremos derivar dos veces, “ $d^2/dx^2$ ”, seguida de la función de la que queremos obtener la derivada :

 $d^2/dx^2$  funcion

- Otra forma es mediante las palabras reservadas “second derivative of”, seguida de la función que queremos derivar dos veces:

second derivative of ( $x^4 \sin x$ )

## Miniguía - Ejemplos

- Se ilustra el comando con uno o varios ejemplos

UNED

Funciones de varias variables con Wolfram | Alpha

### Jacobiano

- Para calcular el valor del determinante Jacobiano, introducimos el determinante como hemos visto anteriormente y los valores de los elementos son las expresiones de las funciones a derivar.

$$\det \left\{ \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right\}, \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right\}, \dots, \left\{ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, \frac{\partial f_n}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right\} \right\}$$

- Así por ejemplo calculamos el Jacobiano de  $f_1(x, y) = e^x y^2$ ,  $f_2(x, y) = e^y x^2$ :

The screenshot shows the Wolfram Alpha interface. The input bar contains the command: `det({{d/dx(e^x y^2), d/dy(e^x y^2)}, {d/dx(e^y x^2), d/dy(e^y x^2)}})`. Below the input bar, the "Input interpretation" section shows the determinant of the Jacobian matrix:  $\begin{vmatrix} \frac{\partial(e^x y^2)}{\partial x} & \frac{\partial(e^x y^2)}{\partial y} \\ \frac{\partial(e^y x^2)}{\partial x} & \frac{\partial(e^y x^2)}{\partial y} \end{vmatrix}$ . The "Result" section shows the final answer:  $x^2 y^2 e^{x+y} - 4 x y e^{x+y}$ . There are also links for "Open code" and "Step-by-step solution".



## Miniguía - Ejercicios

- Se plantean varios ejercicios a realizar

### Ejemplos

1.- Hallar la integral indefinida de las siguientes funciones

a)  $f(x) = (x^2 - 1)$       b)  $f(x) = \frac{1}{x-1}$   
c)  $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(x^3)$       d)  $f(x) = e^{5x} + \operatorname{sen}(x)$

2.- Hallar las siguientes integrales definidas

a)  $f(x) = \cos^2 x, 0 \leq x \leq \pi$       b)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}, 0 \leq x \leq 4$

3.- Hallar las siguientes integrales impropias

a)  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, 0 \leq x \leq \infty$       b)  $f(x) = \frac{e^x}{\ln(x)}, 1 \leq x \leq 2$

4.- Hallar las siguientes integrales múltiples

a)  $f(x, y) = x^2 y(x + y), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$   
b)  $f(x, y) = \frac{x^2 y(x+y)}{x^2 y^2}, 1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 3$

## Miniguía - Soluciones

- Se muestran las soluciones a los ejercicios

### Ejemplos

1.- Hallar la integral indefinida de las siguientes funciones

- a)  $f(x) = (x^2 - 1)$  `int (x^2-1) dx`      b)  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  `int (1 / (x-1)) dx`  
c)  $f(x) = x^2 \sin(x^3)$  `int (x^2)sin (x^3) dx`      d)  $f(x) = e^{5x} + \sin(x)$  `int e^(5x) +sin(x) dx`

2.- Hallar las siguientes integrales definidas

- a)  $f(x) = \cos^2 x, 0 \leq x \leq \pi$  `int (cos(x))^2, x=0..pi`      b)  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}, 0 \leq x \leq 4$   
`int x/sqrt(x^2+9) dx, x=0..4`

3.- Hallar las siguientes integrales impropias

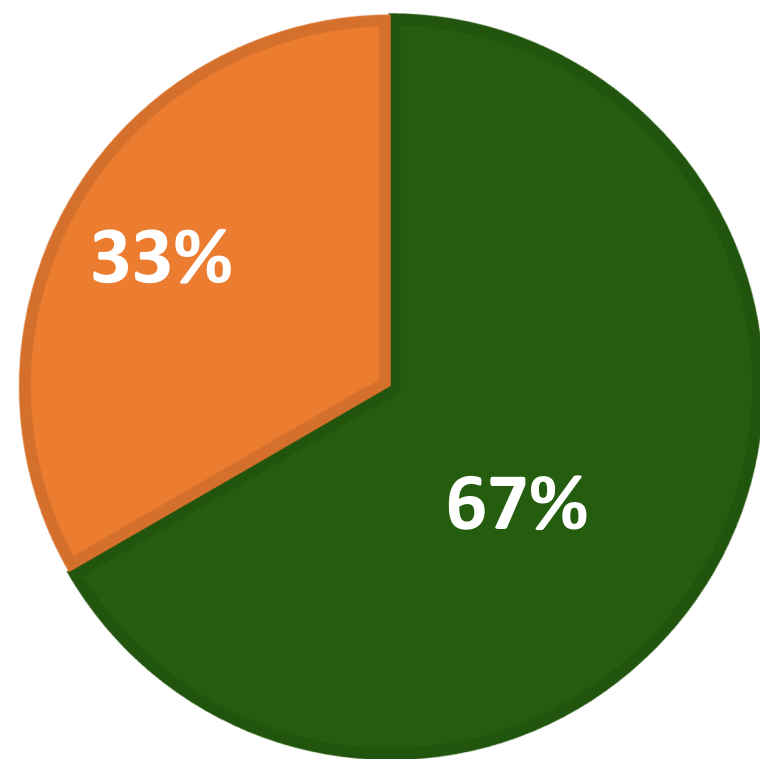
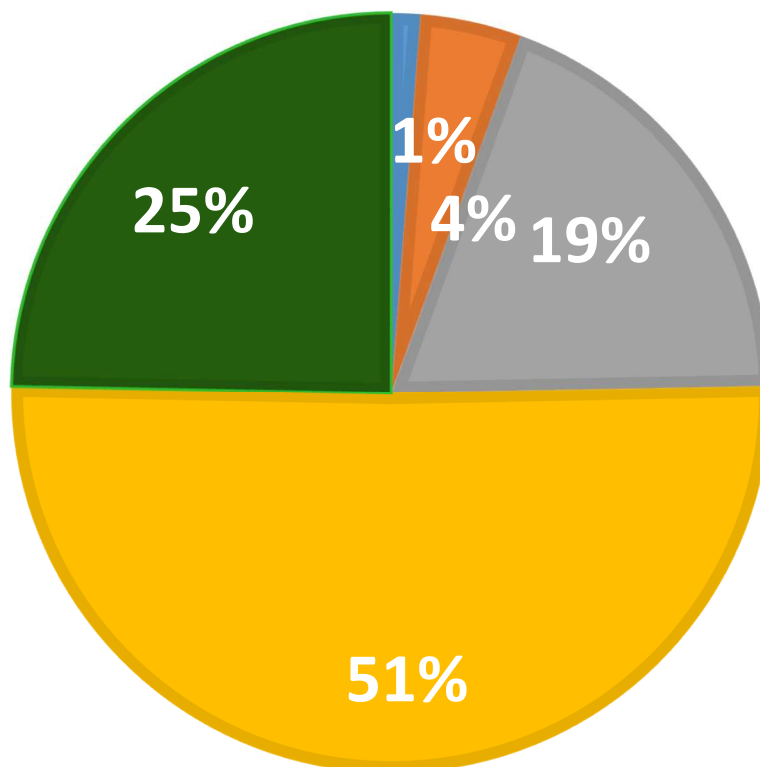
- c)  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, 0 \leq x \leq \infty$  `int 1/(1+x^2) dx, x=0..infinity`      d)  $f(x) = \frac{e^x}{\ln(x)}, 1 \leq x \leq 2$   
`int e^x/ln(x), x=1..2`

4.- Hallar las siguientes integrales múltiples

- a)  $f(x, y) = x^2 y(x + y), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$   
`int x^2 y(x+y) dx dy, x=0..1, y=0..2`  
b)  $f(x, y) = \frac{x^2 y(x+y)}{x^2 y^2}, 1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 3$   
`int x^2 y(x+y)/(x^2 y^2) dx dy, x=1..2, y=2..3`

## Miniguía – ¿Se usan?

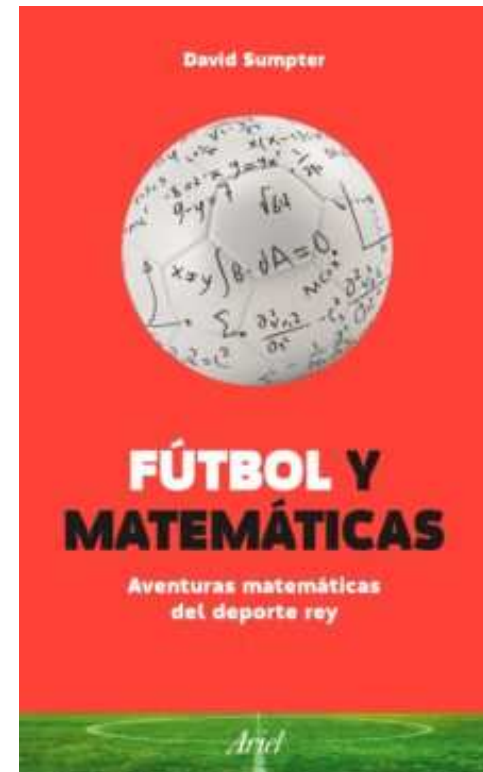
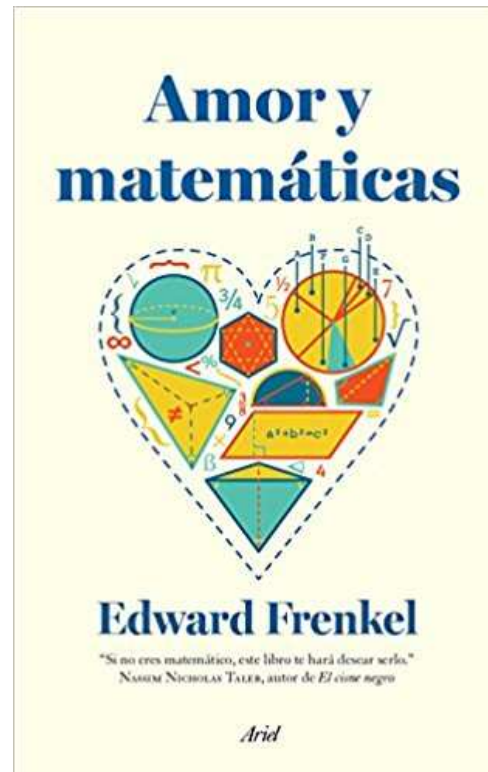
- Un 76% consideran útiles las miniguías (Utilidad)
- Un 67% utilizan la herramienta a la hora de preparar el examen final (Uso actual).



## Bibliografía

- Resolución de ecuaciones diferenciales con Excel. *Rect@. Mon nº 4*. 2013. pp 57-82.
- Resolución de integrales definidas con Excel. *Anales de Asepuma*. Vol 22. 2014.
- Resolución de ecuaciones no lineales con Excel. *Anales de Asepuma*. Vol 23. 2015.
- Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con Excel. *Anales de Asepuma*. Vol 23. 2015.
- Clasificación y representación de cónicas con Excel. *Anales de Asepuma*. Vol 24. 2016.
- Análisis y representación gráfica de funciones matemáticas con Excel. *Anales Asepuma*. Vol 25. 2017.
- Uso de herramientas informáticas como apoyo a la docencia en Matemáticas. Ensayos sobre investigación en innovación y experiencias docentes en economía, empresa y turismo. 2018. Editorial UNED.
- Las TIC en la enseñanza a distancia de Matemáticas. *Anales de Asepuma*. Vol 26. 2018.

## Recomendaciones



## Un curso de Cálculo con



*Gracias por su atención*