

Un curso de Cálculo con



Palencia-González, F.J. y García-Llamas, M.C.
Dpto. de Teoría Económica y Economía Matemática
Grupo de Innovación Docente: SALT-CG

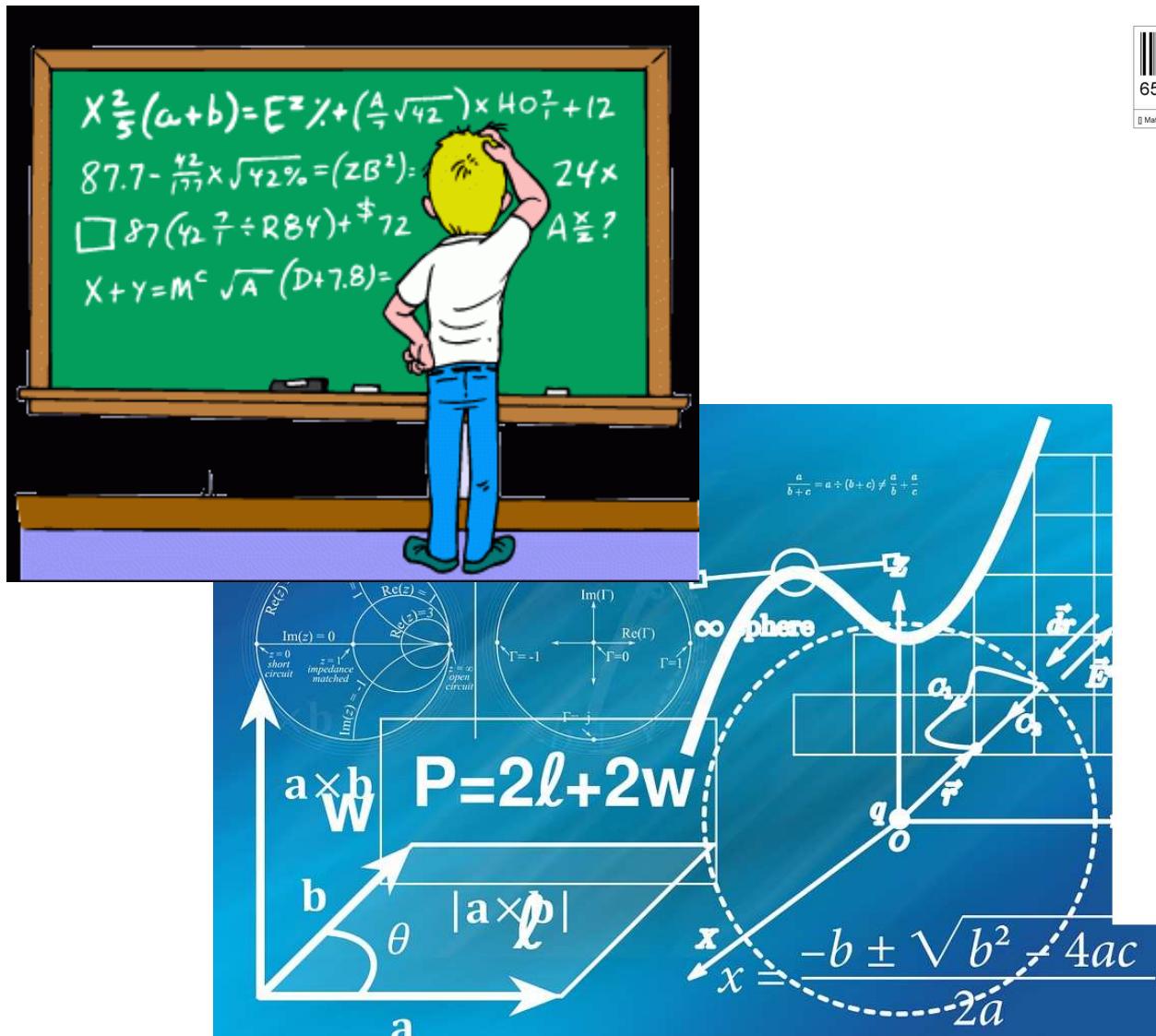
UNED



Los alumnos de la UNED

- Características generales
 - Compatibilizar estudios con actividades laborales
 - Cargas familiares
 - Años sin estudiar
 - Segundas carreras: Ingenierías vs Derecho
- Particularidades de Económicas, ADE y Turismo
 - Vagos conocimientos en Matemáticas
 - Muchos años sin estudiarlas
 - No las han visto en los últimos cursos realizados
 - Rechazo social a la materia: “ansiedad matemática”

¿Qué se estudia en estas asignaturas?



Matemáticas para la Economía: Cálculo		011
GRADO EN ECONOMÍA		65
Febrero - 2017	Duración: 120 min.	EXAMEN: Tipo A
Original	Desarrollo	1º Cuatrimestre
		NO
		Hoja 1 de 1

Cuestiones:

1. a) Condición necesaria de convergencia de series.

(1 punto)

b) Hallar el polinomio de Taylor de grado 2 en un entorno de $x = 1$ para la función:

$$f(x) = x^2 e^x + \ln(x)$$

(1 punto)

2. a) Enunciar el teorema de Euler para funciones homogéneas y aplicarlo en caso de homogeneidad de la siguiente función:

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

(1 punto)

b) Calcular la siguiente integral:

$$\iint_{\Delta} x^2 y (x+y) dx dy$$

Dónde Δ es el recinto tal que $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$.

(1 punto)

Problemas:

1. Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x^2 - 1)}$$

- a) Determinar las asíntotas.
- b) Determinar los intervalos de crecimiento y los extremos relativos.
- c) Estudiar puntos de inflexión, la concavidad y convexidad.

(3 puntos)

2. Hallar los extremos relativos de la función

$$u = x + y + z, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0$$

Condicionados a

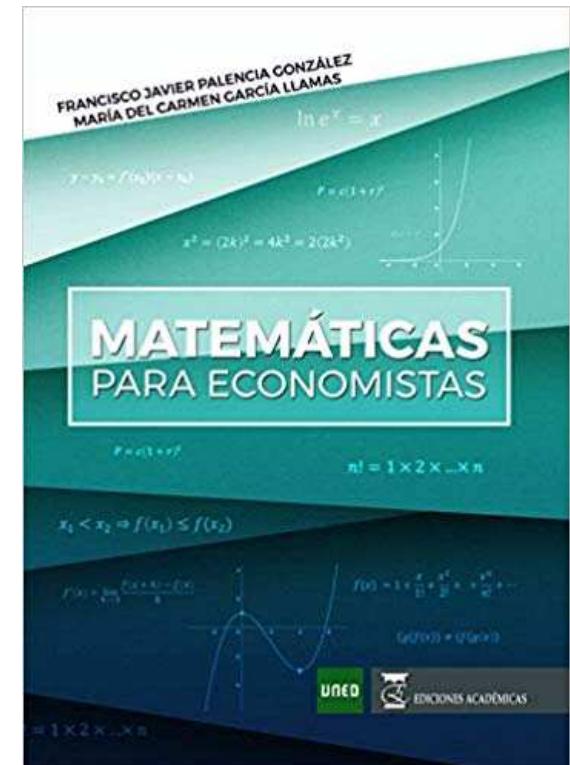
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

(3 puntos)

I_MpE: Cálculo

Temario

- 1.- Conceptos básicos
- 2.- Funciones
- 3.- Límites y continuidad
- 4.- Derivación
- 5.- Aplicaciones de la derivada
- 6.- La integral
- 7.- Funciones de varias variables
- 8.- Optimización de funciones, extremos condicionados e integrales múltiples
- 9.- Sucesiones y series



Soluciones

- Explicación de la teoría:
 - Tutorías presenciales
 - Campus Virtual
 - Libros y apuntes

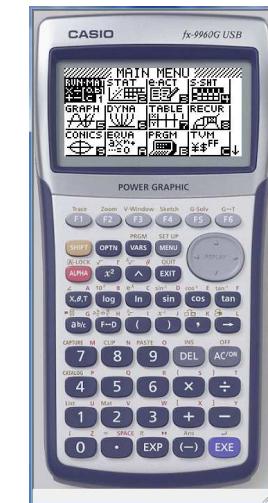
Matemáticas para la Economía: Cálculo

Foros de debate >

Nuevo foro Administración

Nombre del foro

- Foro PEC
- Foro de consultas generales
- Foro de estudiantes (no moderado por el Equipo Docente)
- Libro base y Exámenes
- Unidad Didáctica 1: Funciones reales de variable real
- Unidad Didáctica 2: Funciones de varias variables
- Unidad Didáctica 3: Cálculo integral
- Unidad Didáctica 4: Sucesiones y series



- Resolución de problemas:
 - El profesor en casa
 - Calculadora científica
 - Un auto corrector

Analiza la continuidad y discontinuidades de la función:

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2+4 & \text{si } -2 < x \leq 1 \\ 2x+3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$, f es continua en x .

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} x+1 = -2+1 = -1$

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} x^2+4 = (-2)^2+4 = 4+4 = 8$

No existe $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ f no es continua en $x = -2$

En $x = -2$, f presenta una discontinuidad inevitable de salto finito

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x+3 = 2 \cdot 1 + 3 = 2+3 = 5$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2+4 = 1^2+4 = 1+4 = 5$

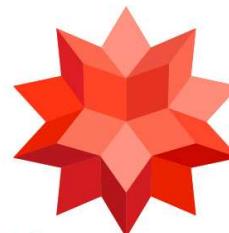
Existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$

$f(1) = 5$

Herramientas informáticas

- Software libre

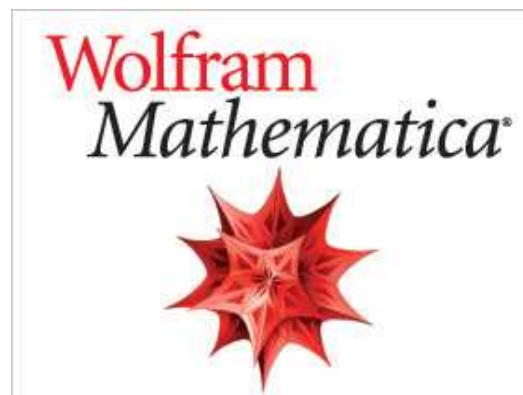
GeoGebra



WolframAlpha



- Software comercial



Microsoft Excel

- Serie de artículos de utilización de la hoja de cálculo para la resolución de problemas matemáticos
 - Resolución de ecuaciones diferenciales
 - Resolución de integrales definidas
 - Resolución de ecuaciones no lineales
 - Resolución de sistemas de ecuaciones lineales
 - Clasificación y representación de cónicas

Microsoft Excel

- Análisis y representación gráfica de funciones matemáticas con Excel.

Premio ASEPUMA Mejor Propuesta Docente '17

XXV Jornadas Asepuma – XIII Encuentro Internacional – La Coruña, 8 y 9 Junio 2017

Ejemplos

UNED

Funciones matemáticas: Análisis					Funciones matemáticas: Representación gráfica					
$f(x) = \frac{(3x-2)}{\sqrt{2x^2+1}}$					$(3x-2)/(\sqrt{2x^2+1})$					
Límite inferior	-10	Límite superior	10	Precisión	0,01					
Dominio	R				Es continua en el dominio					
Continuidad					No hay simetría					
Simetría					(0,67; 0)					
Corte con los ejes	Eje X					(0; -2)				
Eje Y										
Asintotas:	Verticales	No existen A.V.								
	Horizontales	(y=-2,12; y=2,12)								
	Oblicuas	No existen A.O.								
Intervalos de crecimiento	(-0,75; 10)									
Intervalos de decrecimiento	(-10; -0,75)									
Máximos relativos	No hay máximos relativos									
Mínimos relativos	(-0,75; -2,915)									
Intervalos de concavidad	(-1,31; 0,19)									
Intervalos de convexidad	(-10; -1,31) U (0,19; 10)									
Puntos de Inflexión	(-1,31; -2,817); (0,19; -1,381)									
Tiempo de respuesta	0:00:08									

Fco. Javier Palencia y M^a Carmen García Llamas - Análisis y representación gráfica de funciones matemáticas con Excel - 18 de 22

Temario y Miniguías Wolfram Alpha

1.- Conceptos básicos	Conceptos básicos
2.- Funciones	Estudio de Funciones
3.- Límites y continuidad	Cálculo de límites y continuidad
4.- Derivación	Cálculo de derivadas
5.- Aplicaciones de la derivada	Polinomio de Taylor Estudio y representación gráfica de funciones
6.- La integral	Cálculo de integrales
7.- Funciones de varias variables	Funciones de varias variables
8.- Optimización de funciones, extremos condicionados e integrales múltiples	Determinantes funcionales y extremos
9.- Sucesiones y series	Sucesiones y series

¿Qué es una miniguía?

- Documento compuesto de unas 15 diapositivas
- Muy visual, acompañado de imágenes
- Sencilla y atractiva, con lenguaje directo
- Fácil de entender y de probar
- Contenidos
 - Concepto a estudiar, ¿dónde encontrarlo?
 - ¿Cómo escribir expresiones?
 - Sintaxis de los comandos
 - Ejemplos explicativos
 - Hoja de ejercicios

Miniguía - Introducción

- Conceptos a estudiar, y como llegar a ellos

The screenshot shows the Wolfram|Alpha search interface. At the top, there's a green bar with the text "Cálculo de límites con Wolfram | Alpha". Below it, the word "Límites" is prominently displayed in orange. The main content area is titled "Examples > Mathematics > Limits". It lists several examples of what you can ask about limits, such as "Compute a limit", "Compute one-sided limits at a point of discontinuity", and "Compute a limit involving abstract functions". Two specific examples are circled in red: "Compute a limit" and "Compute one-sided limits at a point of discontinuity". The bottom of the page includes navigation links for "Fco. Javier Palencia y M^a Carmen García Llamas", "Matemáticas para la Economía: Cálculo", and "5 de 15".

Miniguía - Expresiones

- Se explica cómo y dónde introducir las expresiones

Funciones de varias variables con Wolfram | Alpha

Escribir expresiones

- Se ha de tener cuidado con el uso de los paréntesis a la hora de introducir la función con la que queramos realizar operaciones. Los símbolos que pueden utilizarse son:

“+”, suma	“*”, multiplicación	“^”, potencia
“-”, resta	“/”, división	“sqrt”, raíz cuadrada
- El valor al que tiende la variable puede ser un número o infinito (“infinity”).



Miniguía - Sintaxis

- Se introduce la sintaxis de los comandos

Cálculo de derivadas con Wolfram | Alpha

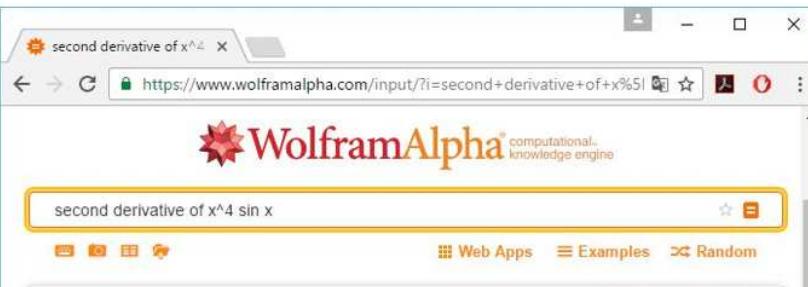
Derivada segunda

- Para calcular la segunda derivada de una función podemos hacerlo de dos formas:
- Una forma es introduciendo la variable sobre la que queremos derivar dos veces, " d^2/dx^2 ", seguida de la función de la que queremos obtener la derivada :

$d^2/dx^2 \text{ } \underline{\text{funcion}}$

- Otra forma es mediante las palabras reservadas "second derivative of", seguida de la función que queremos derivar dos veces:

second derivative of $(x^4 \sin x)$



Miniguía - Ejemplos

- Se ilustra el comando con uno o varios ejemplos

Funciones de varias variables con Wolfram | Alpha

Jacobiano

- Para calcular el valor del determinante Jacobiano, introducimos el determinante como hemos visto anteriormente y los valores de los elementos son las expresiones de las funciones a derivar.

$$\det \left\{ \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right\}, \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right\}, \dots, \left\{ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, \frac{\partial f_n}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right\} \right\}$$

- Así por ejemplo calculamos el Jacobiano de $f_1(x, y) = e^x y^2, f_2(x, y) = e^y x^2$:

The screenshot shows the Wolfram|Alpha interface. The input field contains the command `det({{d/dx(e^x y^2),d/dy(e^x y^2)},{d/dx(e^y x^2),d/dy(e^y x^2)}})`. Below the input, the "Input interpretation" section shows the Jacobian matrix:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial(e^x y^2)}{\partial x} & \frac{\partial(e^x y^2)}{\partial y} \\ \frac{\partial(e^y x^2)}{\partial x} & \frac{\partial(e^y x^2)}{\partial y} \end{vmatrix}$$

The "Result" section displays the calculated determinant: $x^2 y^2 e^{x+y} - 4 x y e^{x+y}$.

Miniguía - Ejercicios

- Se plantean varios ejercicios a realizar



Cálculo de Integrales con Wolfram | Alpha

Ejemplos

1.- Hallar la integral indefinida de las siguientes funciones

a) $f(x) = (x^2 - 1)$ b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$
c) $f(x) = x^2 \operatorname{sen}(x^3)$ d) $f(x) = e^{5x} + \operatorname{sen}(x)$

2.- Hallar las siguientes integrales definidas

a) $f(x) = \cos^2 x, 0 \leq x \leq pi$ b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}, 0 \leq x \leq 4$

3.- Hallar las siguientes integrales impropias

a) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, 0 \leq x \leq \infty$ b) $f(x) = \frac{e^x}{\ln(x)}, 1 \leq x \leq 2$

4.- Hallar las siguientes integrales múltiples

a) $f(x, y) = x^2 y(x + y), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$
b) $f(x, y) = \frac{x^2 y(x+y)}{x^2 y^2}, 1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 3$

Miniguía - Soluciones

- Se muestran las soluciones a los ejercicios



Cálculo de Integrales con Wolfram | Alpha

Ejemplos

1.- Hallar la integral indefinida de las siguientes funciones

- a) $f(x) = (x^2 - 1)$ $\int (x^2-1) dx$ b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ $\int (1 / (x-1)) dx$
 c) $f(x) = x^2 \sin(x^3)$ $\int (x^2)\sin (x^3) dx$ d) $f(x) = e^{5x} + \sin(x) \int e^{(5x)} +\sin(x) dx$

2.- Hallar las siguientes integrales definidas

- a) $f(x) = \cos^2 x, 0 \leq x \leq \pi$ b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}, 0 \leq x \leq 4$
 $\int (\cos(x))^2, x=0..\pi$ $\int x/\sqrt{x^2+9} dx, x=0..4$

3.- Hallar las siguientes integrales impropias

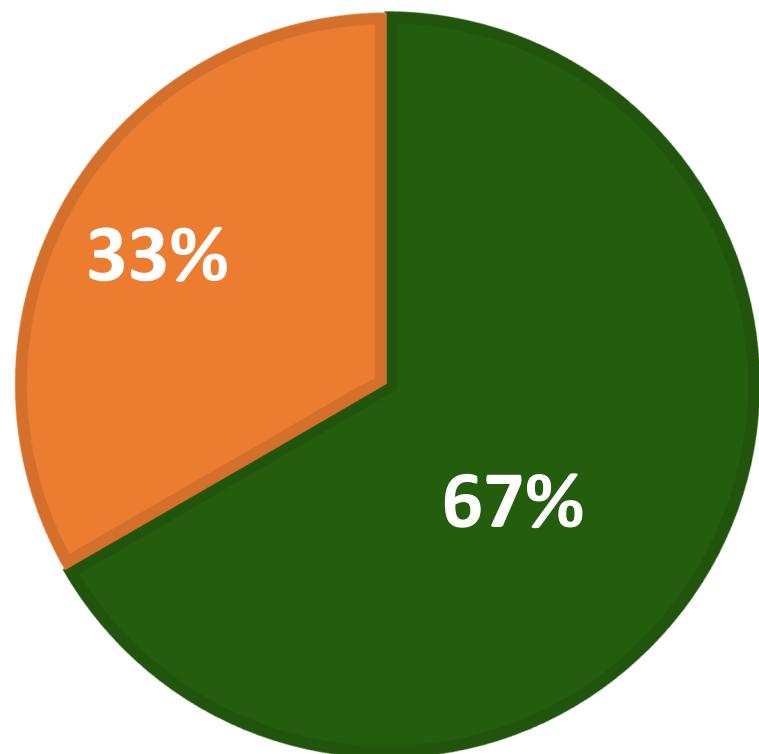
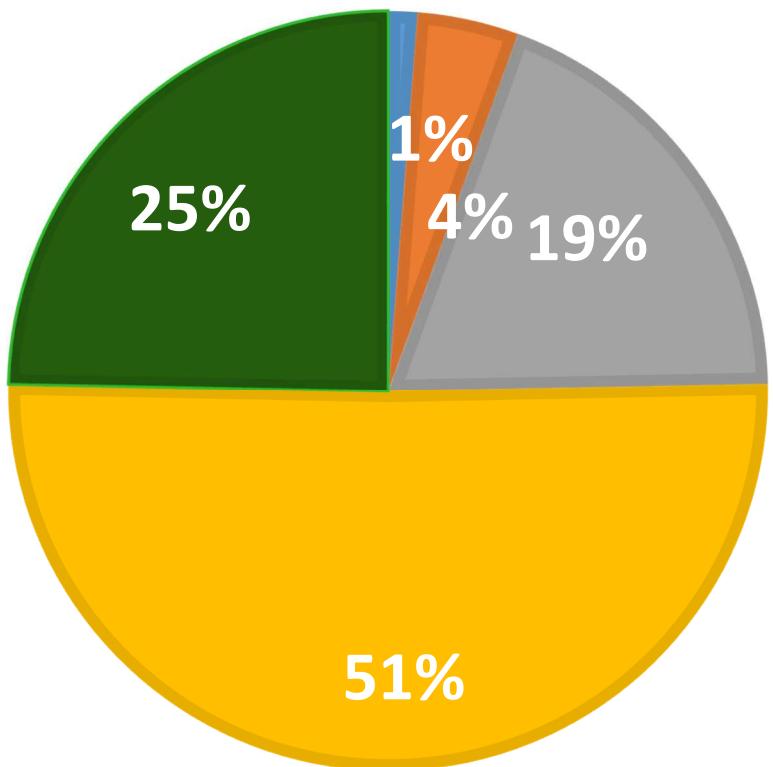
- c) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, 0 \leq x \leq \infty$ d) $f(x) = \frac{e^x}{\ln(x)}, 1 \leq x \leq 2$
 $\int 1/(1+x^2) dx, x=0..infinity$ $\int e^x/\ln(x), x=1..2$

4.- Hallar las siguientes integrales múltiples

- a) $f(x, y) = x^2 y(x + y), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$
 $\int x^2y(x+y) dx dy, x=0..1, y=0..2$
 b) $f(x, y) = \frac{x^2 y(x+y)}{x^2 y^2}, 1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 3$
 $\int x^2y(x+y)/(x^2y^2) dx dy, x=1..2, y=2..3$

Miniguía – ¿Se usan?

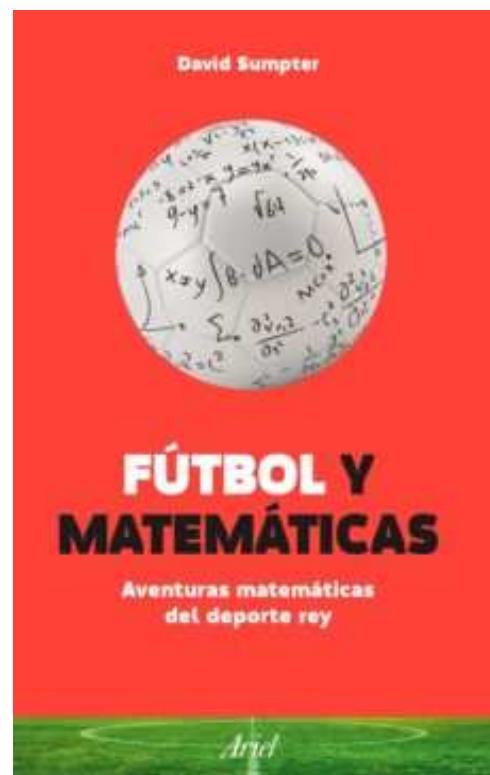
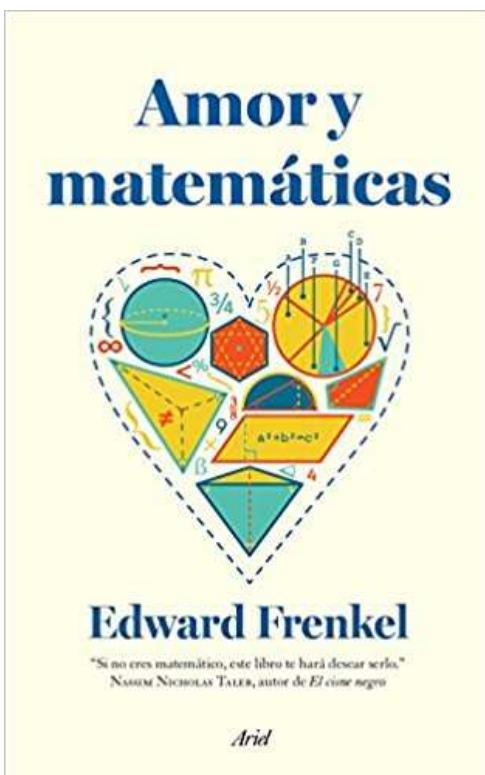
- Un 76% consideran útiles las miniguías (Utilidad)
- Un 67% utilizan la herramienta a la hora de preparar el examen final (Uso actual).



Bibliografía

- Resolución de ecuaciones diferenciales con Excel. *Rect@. Mon nº 4.* 2013. pp 57-82.
- Resolución de integrales definidas con Excel. *Anales de Asepuma.* Vol 22. 2014.
- Resolución de ecuaciones no lineales con Excel. *Anales de Asepuma.* Vol 23. 2015.
- Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con Excel. *Anales de Asepuma.* Vol 23. 2015.
- Clasificación y representación de cónicas con Excel. *Anales de Asepuma.* Vol 24. 2016.
- Análisis y representación gráfica de funciones matemáticas con Excel. *Anales Asepuma.* Vol 25. 2017.
- Uso de herramientas informáticas como apoyo a la docencia en Matemáticas. Ensayos sobre investigación en innovación y experiencias docentes en economía, empresa y turismo. 2018. Editorial UNED.
- Las TIC en la enseñanza a distancia de Matemáticas. *Anales de Asepuma.* Vol 26. 2018.

Recomendaciones



Un curso de Cálculo con



Gracias por su atención