

Un curso de Cálculo con Wolfram Alpha

Francisco Javier Palencia-González ⁽¹⁾, M^a Carmen García Llamas⁽²⁾
Departamento de Teoría Económica y Economía Matemática, UNED, P^o
Senda del Rey, 11. 28040 Madrid,
(1) jpalencia@cee.uned.es
(2) mgarcia@cee.uned.es

Presentado en eXIDO19 (2019)



RESUMEN

El objetivo de esta experiencia docente es proveer a los alumnos de herramientas informáticas que les permitan avanzar en el estudio de las asignaturas de contenido matemático por sí mismos, pudiendo detectar los errores cometidos a la hora de resolver problemas, mejorando paulatinamente en la resolución de los mismos, cuestión básica en el caso de los estudiantes de nuestra universidad, por ser los mismos estudiantes a distancia.

El trabajo muestra como se ha utilizado el sitio web de Wolfram Alpha, www.wolframalpha.com, como herramienta de apoyo a la hora de estudiar y preparar la asignatura Matemáticas para la Economía: Cálculo, perteneciente al primer curso del Grado de Economía y la asignatura Fundamentos de Cálculo del primer curso del Grado de Turismo.

Para que los estudiantes se familiarizaran y utilizaran el sitio web se han diseñado y escrito varias miniguías en formato digital, una por cada uno de los temas del curso, y se han publicado en el campus virtual.

Se ha controlado el uso de la herramienta y su posible eficiencia mediante una serie de cuestionarios asociados a cada una de las miniguías, así como un cuestionario introductorio y uno final.

Palabras clave: Cálculo, Wolfram Alpha, software.

1. Introducción

Los alumnos de la UNED presentan algunas diferencias relevantes respecto del resto de alumnos de las universidades españolas, en general son alumnos que tienen que compatibilizar los estudios con actividades laborales y que suelen tener cargas familiares. Tal y como se recoge en Palencia-González y García-Llamas (2018b) el porcentaje de estudiantes que tienen una ocupación laboral a tiempo fijo o parcial ascendía hasta un 63,76%, y un 34,38% de los estudiantes declaraban tener cargas familiares, pareja, hijos y/o ascendientes, lo que redonda en un menor tiempo de dedicación al estudio.

Asimismo, una característica importante a tener en cuenta es que el alumnado de la UNED en numerosos casos es un alumnado que ha estado ciertas temporadas alejados de los estudios y que tras ese período de tiempo ha decidido volver a estudiar, lo que implica no tener frescos los hábitos de estudio, o que les cueste mayor esfuerzo coger el ritmo de trabajo.

Si nos fijamos en los grados de Economía, ADE y Turismo, nos encontramos con algunas otras particularidades por parte de los estudiantes, y es que en su mayoría presentan vagos conocimientos de matemáticas, pues puede darse el caso de que llevan muchos años sin cursar materias relacionadas con las matemáticas o incluso las han dejado de estudiar en los últimos cursos realizados. Como es conocido puede darse el caso de que un estudiante se matricule en un grado de Ciencias Sociales, por ejemplo, en el grado de Economía, sin haber cursado matemáticas en el último o incluso en los dos últimos cursos realizados. También puede darse el caso de estudiantes que quieran estudiar una segunda titulación y que procedan de titulaciones humanísticas y/o jurídicas y que por tanto igualmente no han cursado asignaturas de contenido matemático durante muchísimos años.

El objetivo principal de la puesta en marcha de esta experiencia docente es proveer a los alumnos de herramientas informáticas que les permitan avanzar

en el estudio de las asignaturas de contenido matemático por sí mismos, y en particular en la asignatura Matemáticas para la Economía: Cálculo, del grado de Economía de la UNED, es decir, en una asignatura de Cálculo clásica.

2. La asignatura

La asignatura Matemáticas para la Economía: Cálculo forma parte del primer curso de grado de Economía, es una asignatura de formación básica de 6 créditos ECTS y que se cursa en el primer cuatrimestre.

La asignatura tiene el temario clásico correspondiente a un primer curso de cálculo de cualquier titulación de grado, es decir estudio de funciones de variable real, límites de funciones, derivadas, derivadas sucesivas, cálculo de integrales, funciones de varias variables, optimización de funciones de varias variables, sucesiones y series numéricas.

Viendo el temario, es fácil comprobar que éste tiene un componente gradual en su carga, lo que requiere de un estudio continuo e incremental. Para cada tema los alumnos necesitan conocer, comprender y saber aplicar ciertos conceptos antes de iniciar el estudio de éste.

Por ejemplo para realizar el análisis y representación gráfica de una función de una variable, que aparece en el tema 5, es necesario entre otros, estudiar la concavidad de la función, para lo que a su vez es necesario realizar derivadas sucesivas, lo que obviamente implica conocer cómo realizar la derivada de una función, tema 4, y también es necesario estudiar las asíntotas, lo que implica a su vez saber calcular límites, tema 3, así como conocer los conceptos de función creciente, tema 2. En resumen, en todo momento el aprendizaje se basa en la continua aplicación de conceptos previamente estudiados y la evolución de los mismos.

Por la propia metodología de la enseñanza a distancia utilizada en la UNED, los alumnos cuentan para hacer frente a cada asignatura con los materiales impresos de la misma, lo que se traduce en este caso en el manual de la asignatura.

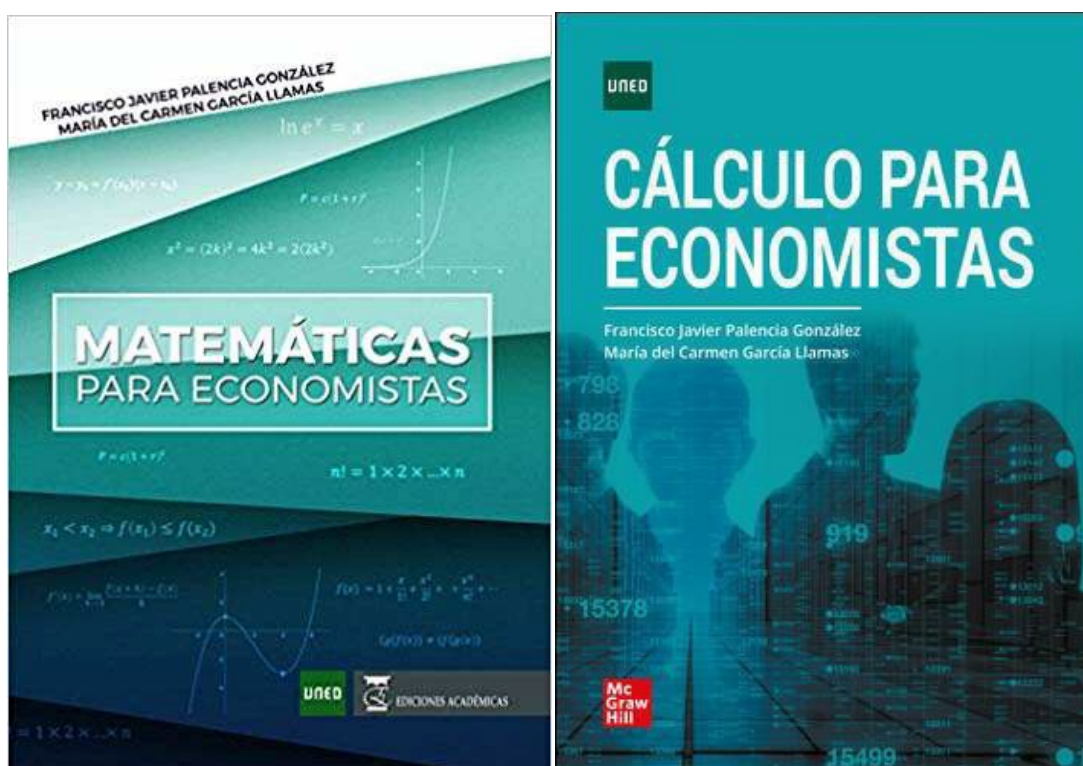


Figura 1. Portada del manual de la asignatura. Cursos 2018-2019 y 2019-2020

Igualmente, los alumnos tienen la opción de asistir a las tutorías presenciales que se imparten semanalmente en los Centros Asociados a la UNED y que se encuentran repartidos por toda la geografía nacional.

Y finalmente, también cuentan los estudiantes con el curso virtual de la asignatura donde pueden encontrar materiales, ejercicios, exámenes resueltos y donde pueden, asimismo, interactuar con el resto de la comunidad educativa, profesores de la sede central, profesores tutores y otros compañeros de estudios, con los que pueden relacionarse a través de los distintos foros habilitados al efecto.

The screenshot shows the virtual campus interface for the course 'Matemáticas para la Economía: Cálculo' at UNED. The interface is organized into several sections:

- Navigation Menu (Left):** Includes 'Mi curso', 'Administración', 'Mi calendario', and 'Grados'. Under 'Administración', there are options like 'Administrar miembros', 'Documentos públicos', and 'Nuevo bloque de P+F'.
- Main Content Area:** Features navigation icons for 'Foros de debate', 'Cuestionario', 'Acceso Sistema Cuestionarios', 'Guía de Estudio', and 'Webconferencia'.
- 0.- Introducción:** A section with a lightbulb icon, containing introductory text and links to 'Indicaciones Básicas' and 'Guía de Estudio Completa'.
- 1.- Bibliografía básica:** A section with a lightbulb icon, listing the book 'Cálculo para Economistas' by Fco. Javier Palencia González and M. Carmen García Llamas, published by McGraw-Hill in 2019. It includes the ISBN and links to 'Ir a la librería', 'Fe de Erratas', and 'Fé de erratas (05-02-2020)'.
- 2.- Cuestionarios:** A section with a lightbulb icon, explaining the purpose of thematic quizzes and providing instructions for participation.

Figura 2. Campus virtual de la asignatura

Sin embargo, todos estos recursos, en muchos casos no están completamente disponibles a todos los estudiantes, así por ejemplo es posible que aunque quieran los alumnos no puedan acceder a las tutorías presenciales, bien por sus limitaciones horarias, que hacen incompatibles sus obligaciones laborales y/o familiares con los horarios de las tutorías presenciales, bien por sus limitaciones geográficas, el centro asociado está a una considerable distancia de su residencia, de su lugar de trabajo, etc...

Y en otros casos, aunque estén disponibles no son suficientes para que los alumnos puedan continuar y seguir a buen ritmo el aprendizaje continuo y necesario de la asignatura. Los alumnos necesitan de alguna manera una especie de profesor en casa que les solucione sus dudas en tiempo real, o un autocorrector de forma que ellos mismo puedan comprobar en todo momento si el trabajo realizado es correcto, o en qué momento han cometido un error, aparecen aquí las herramientas informáticas.

3. Las miniguías de Wolfram|Alpha

El equipo docente de la asignatura para paliar las dificultades anteriormente expuestas ha impulsado experiencias docentes basada en el uso de herramientas informáticas para el estudio de las distintas asignaturas de contenido matemático, así en el curso 2013/2014 se inició una experiencia con el software Excel de Microsoft, que si bien es un software comercial, es un software disponible para toda la comunidad universitaria por el tipo de licencia con que cuenta la UNED.

Se realizaron una serie de artículos que permitían la resolución de diferentes problemas matemáticos con este software: “Resolución de ecuaciones diferenciales con Excel”, Palencia-González (2013); “Resolución de integrales definidas con Excel”, Palencia-González et al. (2014); “Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con Excel”, Palencia-González y García-Llamas (2015); “Resolución de ecuaciones no lineales con Excel”, Palencia-González (2015); “Clasificación y representación de cónicas con Excel”, Palencia-González y García-Llamas (2016); y finalmente, “Análisis y representación gráfica de funciones matemáticas con Excel”, Palencia-González y García-Llamas (2017), premio Asepuma 2017 a la mejor propuesta docente.

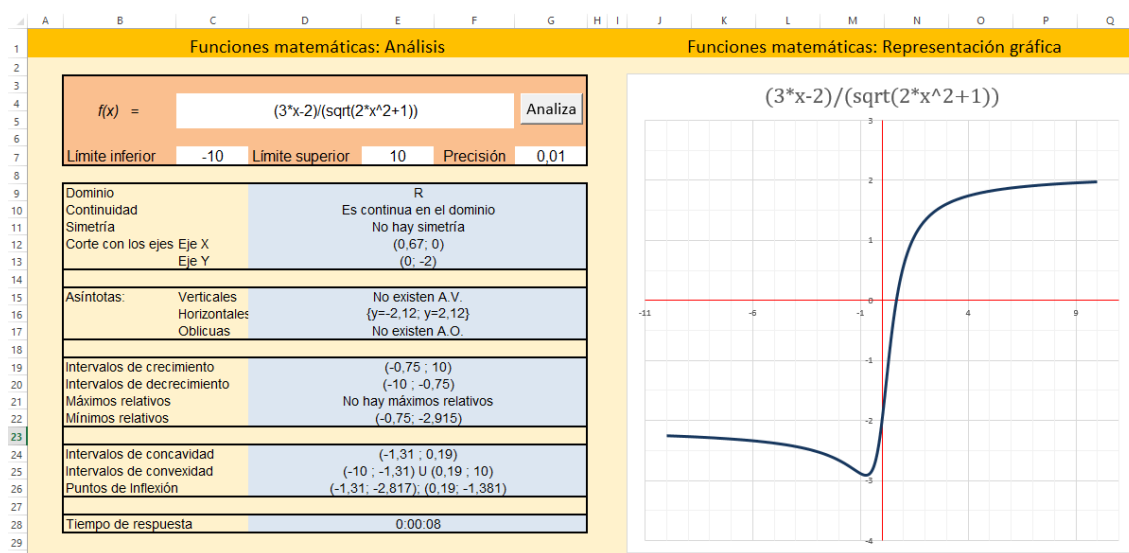


Figura 3. Análisis y representación gráfica de funciones matemáticas con Excel

A partir del curso 2016/2017 se planteó la necesidad de iniciar otra experiencia docente más centrada en la asignatura y en sus contenidos. En este caso se eligió la plataforma web Wolfram|Alpha, www.wolframalpha.com, que con su amplio conjunto de funcionalidades permitían cubrir todo el temario de la asignatura.

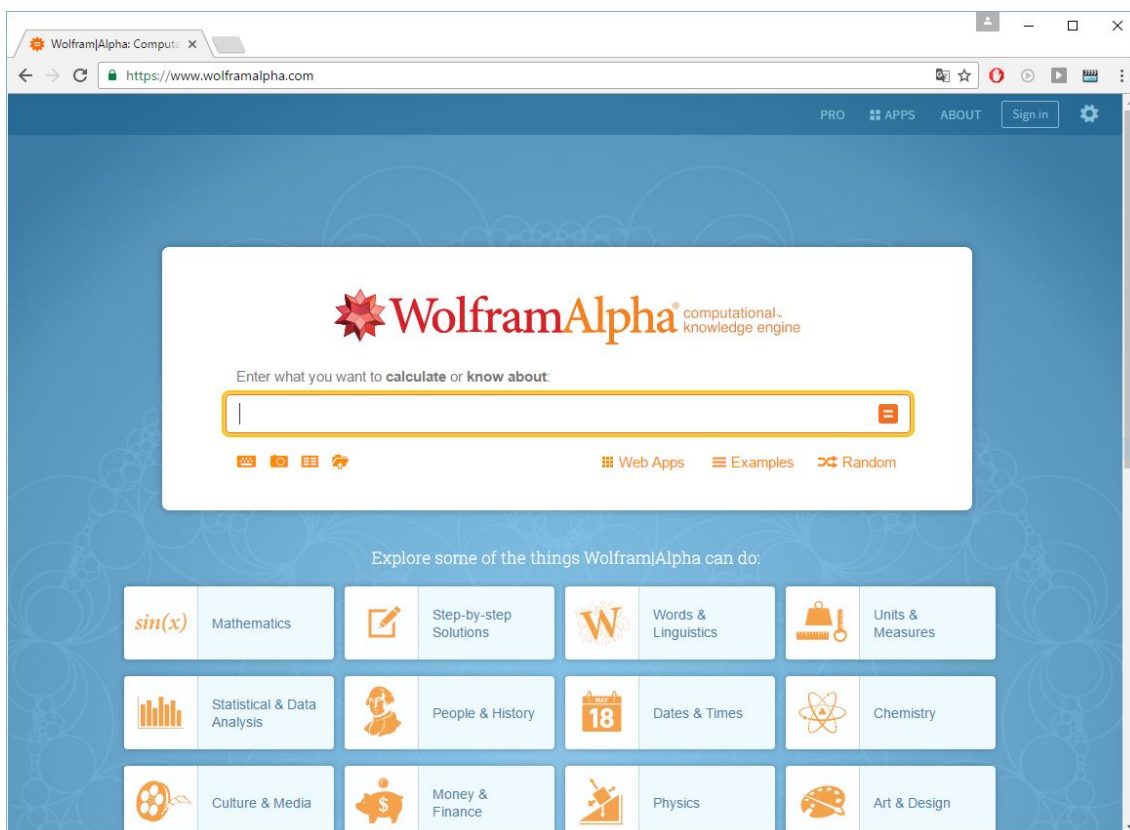


Figura 4. Página de inicio de www.wolframalpha.com en 2016.

Para que los estudiantes pudieran comenzar a utilizar con rapidez la web, se comenzaron a diseñar y escribir unas denominadas miniguías docentes que se correspondían con los distintos conceptos estudiados en la asignatura.

Se denomina miniguía a un documento que contiene 15 diapositivas, con un formato muy visual en el que predominan las imágenes, escrito en un lenguaje sencillo y directo, que resulte muy atractiva de leer, ser fácil de comprender y de probar.

En cada miniguía, que es autocontenida, en el sentido que se lee y comprende por sí misma, se presentan uno o varios conceptos del tema que se está estudiando.

Los conceptos son presentados para ser puestos en práctica mediante ejemplos y ejercicios, no hay explicación teórica del mismo, que se deja para los materiales impresos o las tutorías.

Todas las miniguías están estructuradas de igual forma, permitiendo una rápida familiarización del estudiante con ellas, en las primeras diapositivas se introduce el uso de la web, garantizando al estudiante que pueda utilizar cada miniguía de forma independiente, es decir, no es necesario visitar la primera miniguía, luego la segunda, etc.

UNED Estudio de funciones con Wolfram | Alpha

Introducción

- En WolframAlpha las acciones se ejecutan mediante comandos que se introducen en la caja existente debajo del logo de la web, marcado con una elipse roja en la imagen.
- Una vez introducido el comando se pulsa el botón igual que hay a la derecha, marcado con un círculo verde en la imagen y se obtendrá el resultado

Fco. Javier Palencia y Mª Carmen García Llamas - Matemáticas para la Economía: Cálculo - 4 de 15

Figura 5. Como introducir comandos en www.wolframalpha.com

Asimismo se indica dónde se han de introducir los comandos y cómo se han de escribir las expresiones matemáticas, operadores, paréntesis, y determinadas funciones matemáticas como logaritmo o seno, etc..., todo ello para que el alumno sepa que ha de hacer en cada momento.



Escribir expresiones

- Hay que tener cuidado a la hora de introducir expresiones matemáticas en la caja de comandos. En particular se ha de tener cuidado con el uso de los paréntesis a la hora de introducir la función que queremos estudiar.
- Los operadores matemáticos que pueden utilizarse son:
“+”, suma “*”, multiplicación “^”, potencia
“-”, resta “/”, división
- Algunas de las funciones matemáticas más utilizadas se escriben en Wolfram Alpha de la siguiente manera:
“e” ó “exp”, exponencial “ln” ó “log”, logaritmo neperiano
“sin” ó “sen”, seno “cos”, coseno
“tan”, tangente “sqrt”, raíz cuadrada

Figura 6. Escribir expresiones en www.wolframalpha.com

A continuación, se muestra paso a paso cómo llegar al lugar exacto del sitio web donde se pueden encontrar las funcionalidades relacionadas con el concepto que se quiere estudiar.

Límites

- De los diversos tipos que se pueden calcular nos interesan los límites en un punto, y los límites laterales.

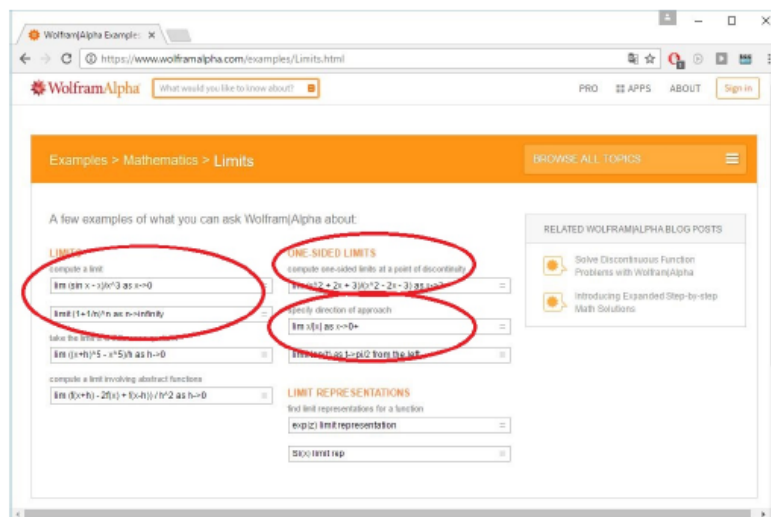


Figura 7. Navegación para encontrar las funcionalidades de límites.

Una vez presentado el sitio web, y como introducir comandos se muestra la sintaxis de los comandos de una forma sencilla, distinguiendo por colores la parte literal, que hay que escribirla en la caja de comandos tal cual está, y la parte variable, hay que introducir la función o expresión que en cada momento se quiera calcular en la caja de comandos.

En la web www.wolframalpha.com es posible que para ciertos conceptos existan varias formas de calcular los mismos, entonces en estos casos en las distintas diapositivas se mencionan los distintos comandos existentes, así como su correspondiente sintaxis. En todos los casos se ilustra el comando explicado con uno o varios ejemplos.

Derivada segunda

- Para calcular la segunda derivada de una función podemos hacerlo de dos formas:
- Una forma es introduciendo la variable sobre la que queremos derivar dos veces, “d²/dx²”, seguida de la función de la que queremos obtener la derivada :

$$d^2/dx^2 \text{ funcion}$$

- Otra forma es mediante las palabras reservadas “second derivative of”, seguida de la función que queremos derivar dos veces:

$$\text{second derivative of } (x^4 \sin x)$$



Figura 8. Sintaxis de comandos para la derivada segunda.

Jacobiano

- Para calcular el valor del determinante Jacobiano, introducimos el determinante como hemos visto anteriormente y los valores de los elementos son las expresiones de las funciones a derivar.

$$\det \left\{ \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right\}, \left\{ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \right\}, \dots, \left\{ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, \frac{\partial f_n}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right\} \right\}$$

- Así por ejemplo calculamos el Jacobiano de $f_1(x, y) = e^x y^2$, $f_2(x, y) = e^y x^2$:



Figura 9. Sintaxis y ejemplo de uso del Jacobiano.

Finalmente, cada miniguía cuenta con una hoja de ejercicios para practicar, y una hoja donde se muestran los mismos ejercicios resueltos, desde el punto de vistas de la sintaxis, todo ello con el objetivo de que el estudiante intente resolverlos y pueda comprobar el resultado obtenido en el ordenador, y si no ha sido capaz de hallar la solución pueda comprobar cómo se debería haber hecho en la misma miniguía.

UNED Cálculo de Integrales con Wolfram | Alpha

Ejemplos

1.- Hallar la integral indefinida de las siguientes funciones

a) $f(x) = (x^2 - 1)$ `int (x^2-1) dx` b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ `int (1 / (x-1)) dx`
c) $f(x) = x^2 \text{sen}(x^3)$ `int (x^2)sin (x^3) dx` d) $f(x) = e^{5x} + \text{sen}(x)$ `int e^(5x) +sin(x) dx`

2.- Hallar las siguientes integrales definidas

a) $f(x) = \cos^2 x, 0 \leq x \leq \pi$ `int (cos(x))^2, x=0..pi` b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}, 0 \leq x \leq 4$
`int x/sqrt(x^2+9) dx, x=0..4`

3.- Hallar las siguientes integrales impropias

c) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, 0 \leq x \leq \infty$ `int 1/(1+x^2) dx, x=0..infinity` d) $f(x) = \frac{e^x}{\ln(x)}, 1 \leq x \leq 2$
`int e^x/ln(x), x=1..2`

4.- Hallar las siguientes integrales múltiples

a) $f(x, y) = x^2 y(x + y), 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$
`int x^2y(x+y) dx dy, x=0..1, y=0..2`

b) $f(x, y) = \frac{x^2 y(x+y)}{x^2 y^2}, 1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 3$
`int x^2y(x+y)/(x^2y^2) dx dy, x=1..2, y=2..3`

Fco. Javier Palencia y Mª Carmen García Llamas - Matemáticas para la Economía: Cálculo - 15 de 15

Figura 10. Diapositiva con los ejercicios propuestos resueltos.

En el curso 2016-2017 se pusieron a disposición de los alumnos las cuatro primeras miniguías que cubrían los conceptos de límites, derivadas, polinomio de Taylor y estudio y representación gráfica. Y en el curso 2017-2018 se pusieron a disposición de los alumnos las cuatro siguientes miniguías que cubrían los conceptos de integrales, funciones de varias variables, optimización de funciones en varias variables y sucesiones y series.

Es finalmente en el curso 2018-2019 cuando se añaden dos miniguías más de carácter introductorio: Conceptos básicos y Funciones matemáticas, de manera que todos los temas de la asignatura son tratados por una o varias miniguías, se tiene por tanto el curso de Cálculo cubierto con miniguías de Wolfram|Alpha.

Tema	Miniguía
1.- Conceptos básicos	Conceptos básicos con Wolfram Alpha
2.- Funciones	Estudio de funciones con Wolfram Alpha
3.- Límites y continuidad	Cálculo de límites y continuidad con Wolfram Alpha
4.- Derivación	Cálculo de derivadas con Wolfram Alpha
5.- Aplicaciones de la derivada	Polinomio de Taylor con Wolfram Alpha
	Estudio y representación gráfica de funciones con Wolfram Alpha
6.- La integral	Cálculo de integrales con Wolfram Alpha
7.- Funciones de varias variables	Funciones de varias variables con Wolfram Alpha
8.- Optimización de funciones, integrales múltiples	Determinantes funcionales y extremos con Wolfram Alpha
9.- Sucesiones y series	Sucesiones y series con Wolfram Alpha

Tabla 1. Relación entre los temas y las miniguías.

4. Uso y utilidad de las miniguías

Para valorar la percepción que tenían los estudiantes de la iniciativa docente, respecto de su utilidad, su uso, su amigabilidad, etc. se han diseñado una serie de cuestionarios, 10 en total, a contestar de forma voluntaria por los alumnos.

Para incentivar la participación de los estudiantes en esta iniciativa docente, se ha concedido un punto en la evaluación final, a aquellos que contestaran la serie completa de cuestionarios, es decir, a los que contestan los 10 cuestionarios.

El primer cuestionario es introductorio a la asignatura y pregunta por la situación laboral del alumno, cargas familiares, comodidad con las nuevas tecnologías, etc. Los cuestionarios 2 a 9, preguntan por la miniguía a la que corresponden, su utilidad, su facilidad de uso, etc.

Y en el cuestionario 10 se pide una valoración final de la asignatura y en particular se realizan las dos preguntas siguientes respecto a las miniguías: Considera útil para el aprendizaje la utilización de las miniguías temáticas publicadas. (Utilidad) y ¿A la hora de preparar la prueba presencial ha usado la herramienta WolframAlpha? (Uso). Las respuestas obtenidas a estas preguntas en el curso 2017/2018 y 2018/2019 se recogen en la Tabla 2.

Los resultados indican que más de un 79% considera útil la herramienta y las miniguías (Utilidad) y un 67% ha utilizado la herramienta a la hora de preparar el examen final (Uso actual).

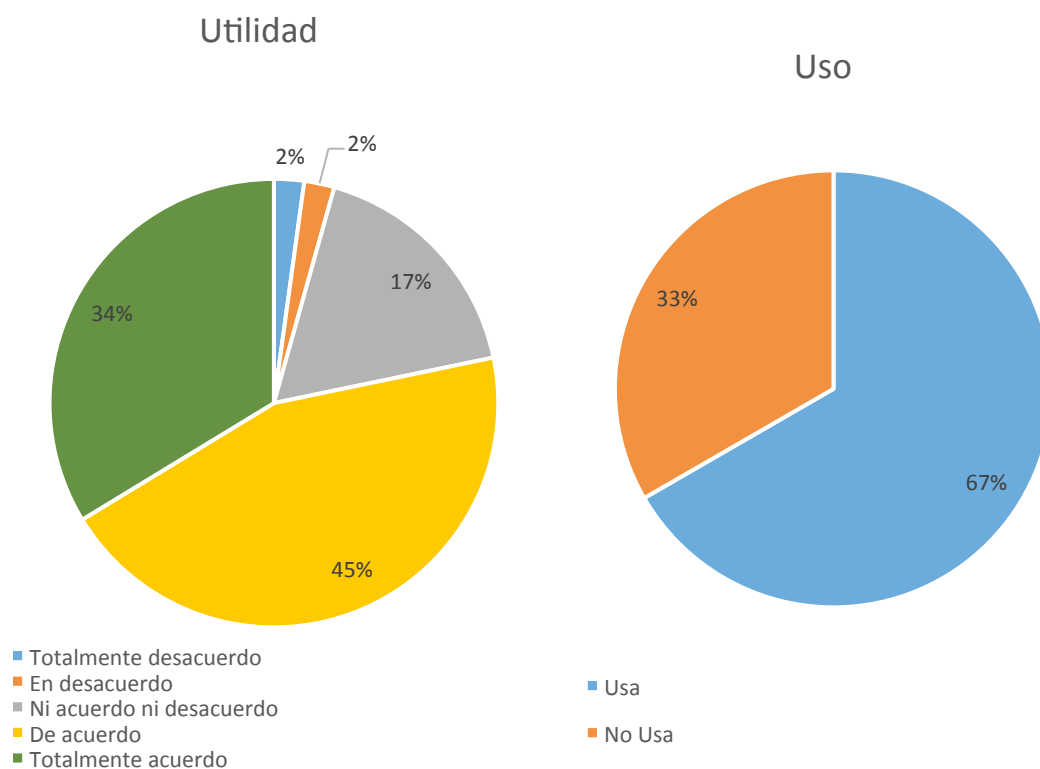


Gráfico 1. Resultados de la utilidad y uso de las miniguías.

5. Referencias bibliográficas

- Palencia-González, F. J. (2013). Resolución de ecuaciones diferenciales con Excel, Revista Recta@- Monográfico nº 4, 57-82.
- Palencia-González, F. J. (2015). Resolución de ecuaciones no lineales con Excel, Revista Anales de Asepuma, 23.
- Palencia-González F. J., y García-Llamas M.C. (2014). Resolución de integrales definidas con Excel, Revista Anales de Asepuma, 22.
- Palencia-González F. J. y García-Llamas M.C. (2015). Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con Excel, Revista Anales de Asepuma, 23.
- Palencia-González F. J. y García-Llamas M.C. (2016). Clasificación y representación de cónicas con Excel, Revista Anales de Asepuma, 24.
- Palencia González F. J. y García Llamas M.C. (2017). Análisis y representación gráfica de funciones con Excel. Revista Anales de Asepuma, 25.
- Palencia-González F. J. y García-Llamas M.C. (2018a). Uso de herramientas informáticas como apoyo a la docencia en Matemáticas. Editorial UNED
- Palencia-González F. J. y García-Llamas M.C. (2018b). Las TIC en la enseñanza a distancia de Matemáticas. Revista Anales de Asepuma, 26.
- Palencia-González F. J., Rodríguez Ruiz J. y García Llamas M.C. (2014). Resolución de integrales definidas con Excel. Revista Anales de Asepuma, 22.