Presentado en eXIDO17 (2017)

La rosa real: Una introducción a los números reales

EXIDO 2017
Úbeda

Miguel Delgado Pineda

- *¿Contar o medir?*

- ***Este es dilema de los números reales.***

- *Con los números naturales: ¿Cuenta el Estudiante?*
  - Sin duda, hay un Buen Orden.
- *Con los números enteros: ¿Sigue contando el estudiante?*
  - Igualmente, hay un Orden Total.
- *Con los números racionales: ¿Se cuenta?.*
  - También, pues la forma de fracción de enteros lo favorece.
  - Hay Orden Total; un orden dividido.
  - *Se define una distancia.*

$$d\left(\frac{a}{b},\frac{c}{d}\right)=\left|\frac{ad-bc}{bd}\right|$$

Q

Q

- *Todo intervalo racional puede ser biseccionado.*

- ***Nuestra herramienta: La bisección.***

- *Biccesión sucesiva de la unidad racional 1.*

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$$

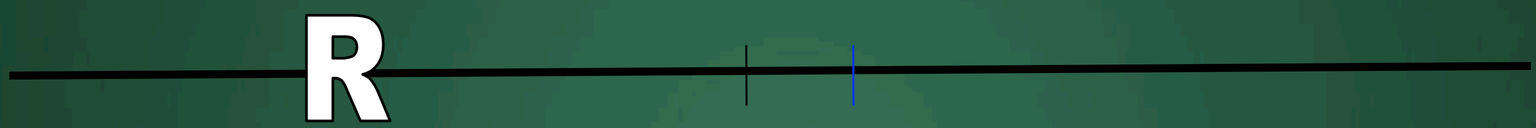
- *Notación decimal.*

$$1, 0.5, 0.25, 0.125, \cdots$$

- *Notación decimal binaria.*

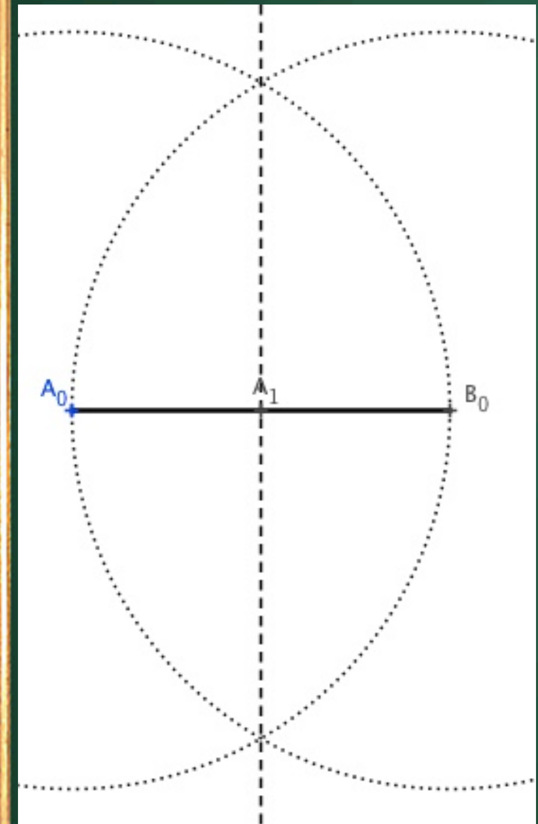
$$1, 0.1, 0.01, 0.001, \cdots, 0.0\cdots01, \cdots$$

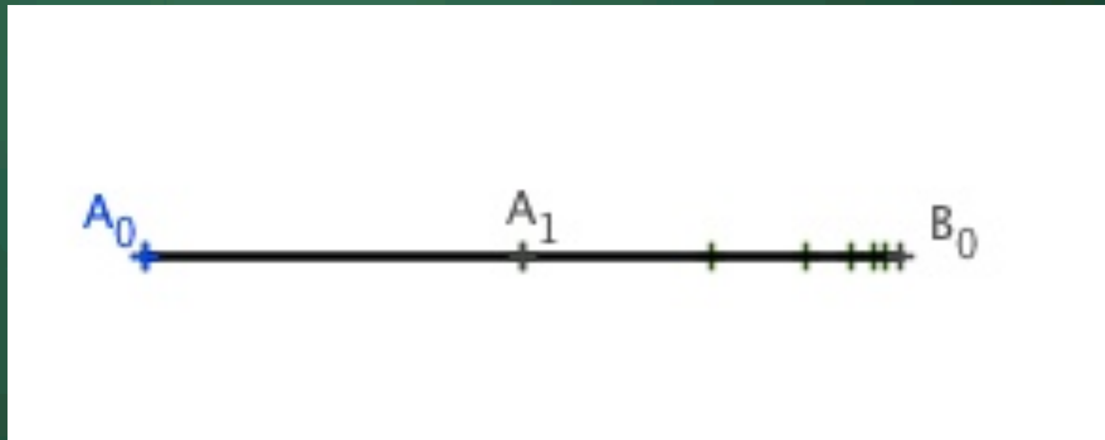
- ***¿Es fácil asociar un número real con la medida de un segmento rectilíneo?***



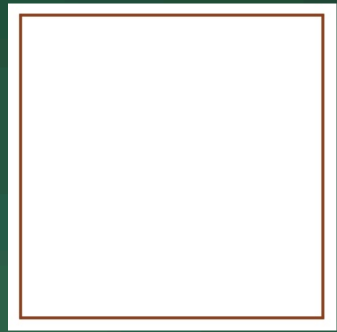
- *¿Se adecua el modelo de cortaduras a la medida de segmentos?*
- *y ¿el modelo de las clases de equivalencia de sucesiones de números racionales?*
- ***¿Cómo hacer que un estudiante sea un observador aventajado de números reales y que opere con ellos?***

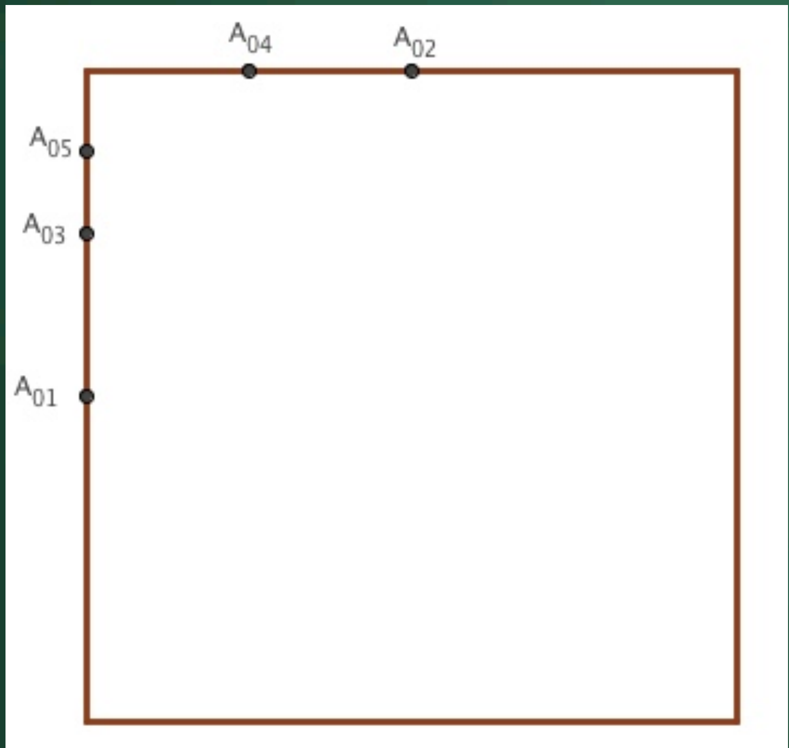
- ***¿Es biseccionable un segmento rectilíneo?***
  - *Determinación del punto medio.*

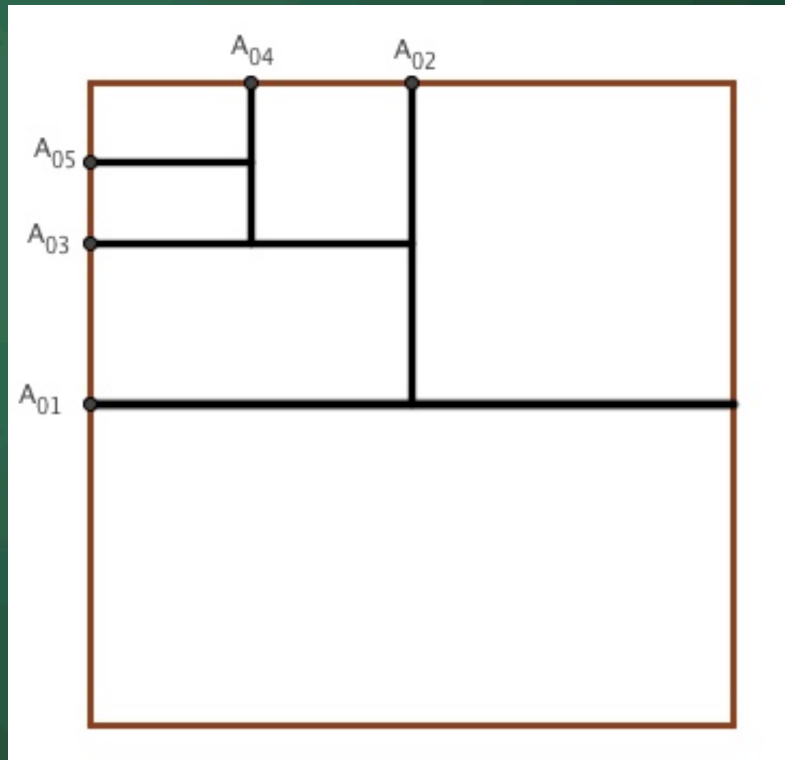




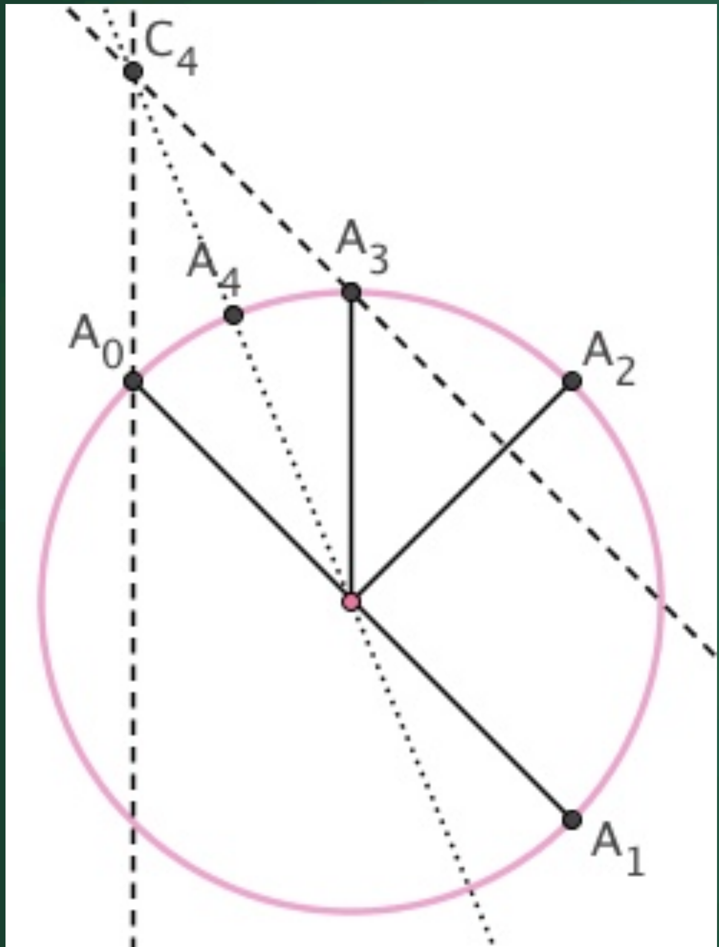
- ***y ¿un rectángulo?***
  - *Mediante sucesivos puntos medios.*

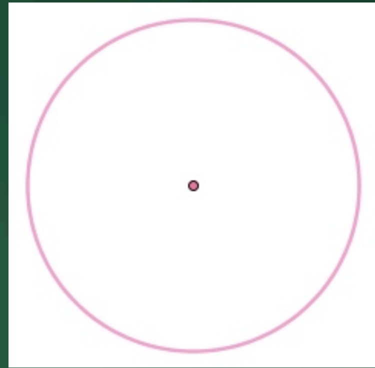


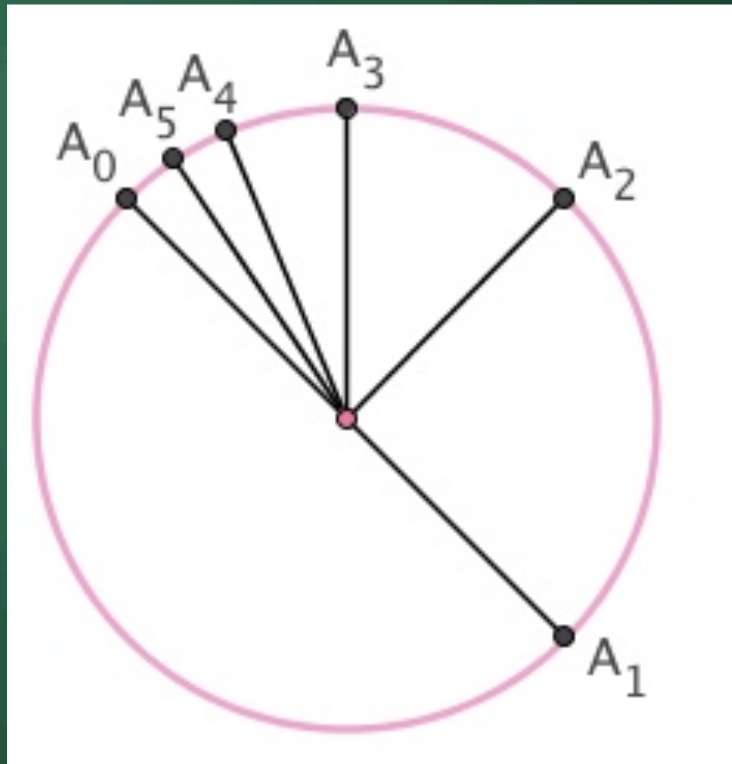




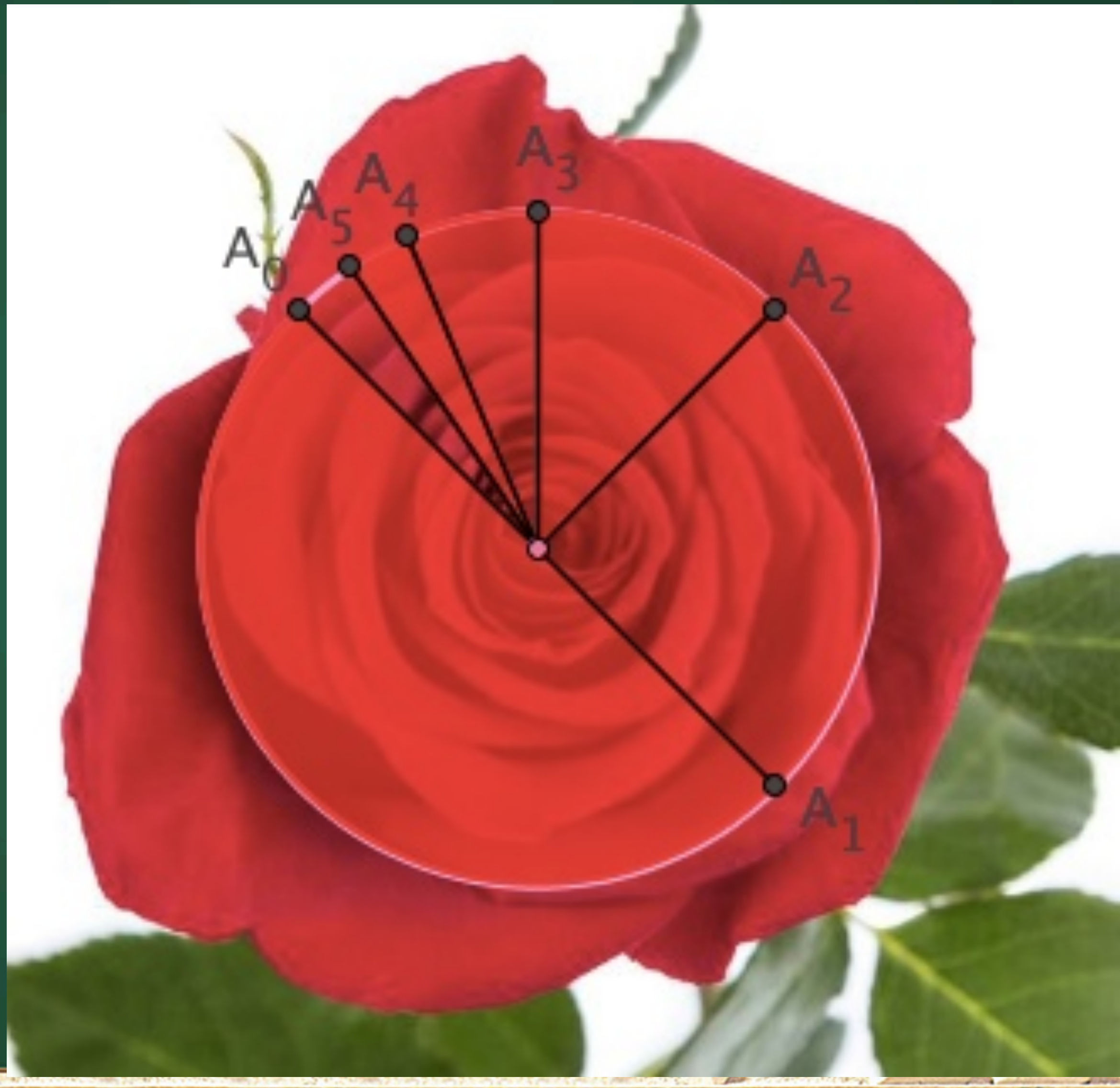
- ***¿Es biseccionable un sector circular?***

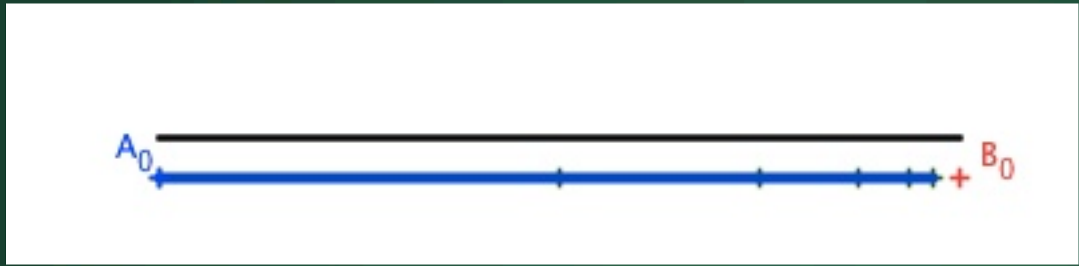


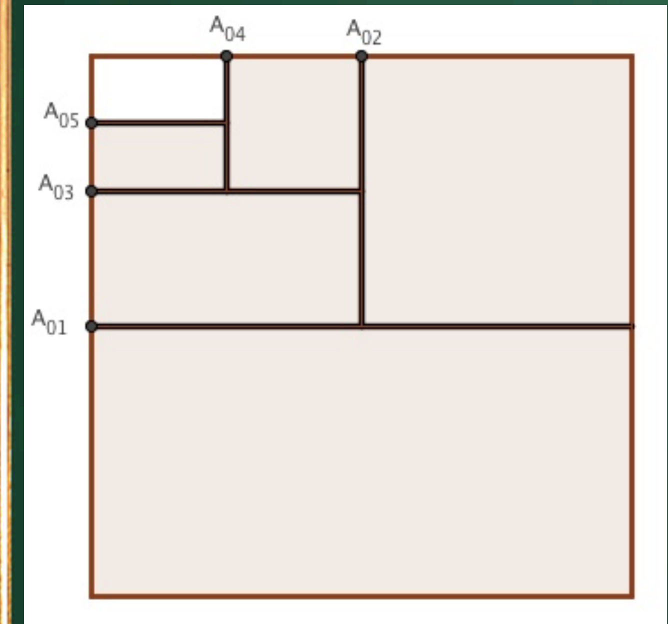


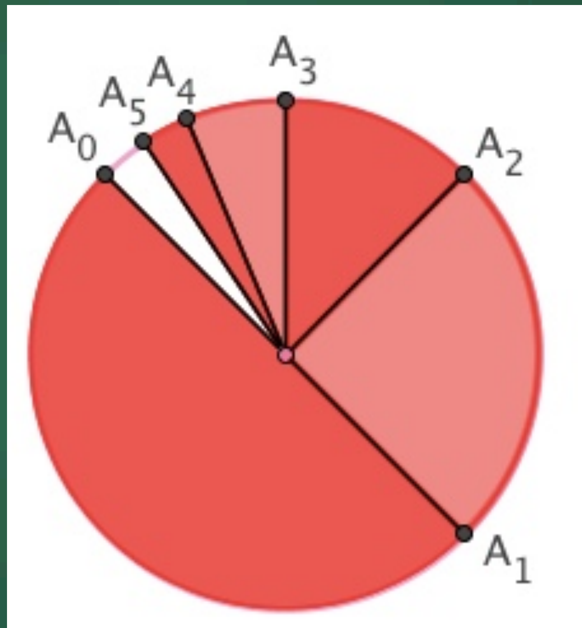


- *La rosa real*









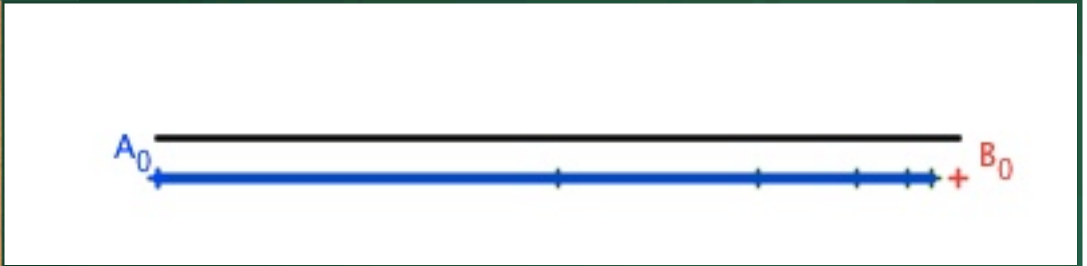
- *Las medidas **(en binario)** de cada una de las piezas de la bisección sucesiva de cada figura son:*
  - ***0.1***
  - ***0.01***
  - ***0.001***
  - ***0.0001***
  - ***0.00001***

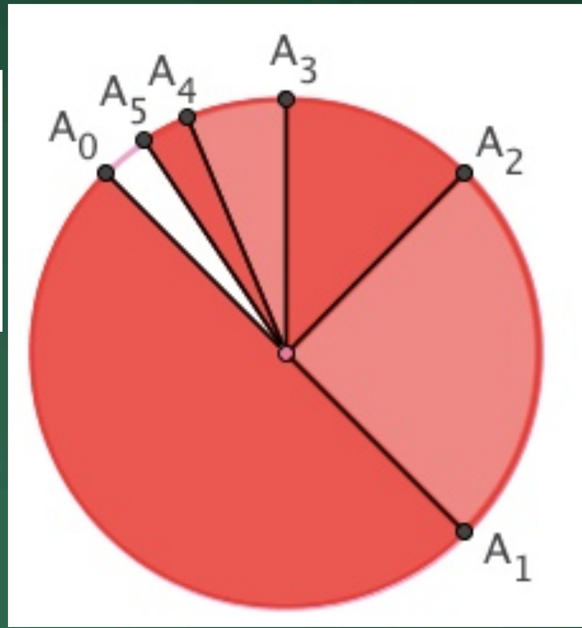
La **magnitud** de la zona resaltada es la **suma** de las **magnitudes** de las piezas.

0.11111

- **NO** *se pueden obtener todas las magnitudes como suma de las de las piezas de bisección sucesiva.*
    - *Un tercio no se puede obtener como suma de piezas .*
- *Debemos admitir escrituras decimales binarias “infinitas”.*
    - 1/3 *se escribe como* 0.0101010101010101…
    - 1/9 *se escribe como* 0.000111000111000111…
    - 5/9 *se escribe como* 0. 1000111000111000111…
    - 7/10 *se escribe como* 0.1011001100110011…
- **Asumimos la “suma infinita” de piezas.**

$$\sum_{n=1} \alpha_n 0.0\cdots{}^{(n-1)}\cdots 01, \quad \alpha_n \in \{0,1\}.$$





- *Asumida la notación decimal infinita:*
  - *Topamos con la paradoja de Aquiles y la tortuga.*
  - *Damos sentido a la intuición.*
    - *Pues,* **1** *se escribe como* **0.111111111…**

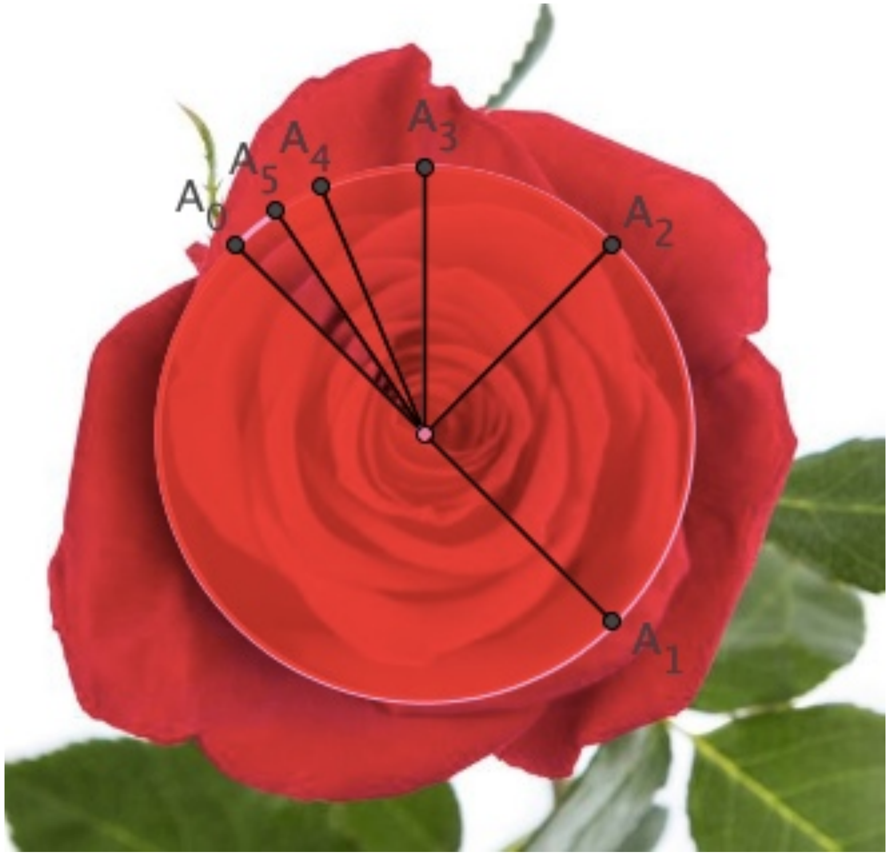
La medida es:

$$\sum_{n=1} \alpha_n 0.0\cdots \stackrel{(n-1)}{} \cdots 01, \quad \alpha_n \in \{0,1\}.$$

- **1** *se escribe como* **0.111111111…**

- El **número racional** tiene una expresión decimal infinita con un número de dígitos cero o uniformemente distribuidos en la expresión decimal binaria.
  - 0.010010010010010… es un número racional.
- Además: 1/8 es:
  - *En forma decimal finita:* 0.001
  - En la forma decimal no finita: 0.0001111111111…

- El **número irracional** emerge con una expresión decimal infinita donde los infinitos dígitos 0 no están uniformemente distribuidos en la expresión decimal binaria.
  - 0.101001000100001000001… es un número irracional.
  - 0.010100101000101000101…
- El **número real** tiene una expresión decimal infinita donde hay infinitos dígitos 1, salvo el 0.
- La colocación de los dígitos 0 es esencial para saber si ese número real es racional o irracional.
- Las expresiones decimales con periodos son números racionales.



Mat. Recreat.

Extraterrestres

Muchas

Gracias

UNED

Facultad de Ciencias

D. Matemáticas Fundamentales

π-Mat