



Estudio del impacto de la posición de los sensores en la estabilidad de un control activo de vibraciones con realimentación de aceleración

Study of the impact of sensor position on the stability of an active vibration control with acceleration feedback

Federico R. Masch¹, Rogelio L. Hecker^{1,2}

¹Facultad de Ingeniería, UNLPam, Argentina

²CONICET, Argentina

(Recibido 23 de septiembre de 2025, para publicación 16 de octubre de 2025)

Resumen – Este trabajo presenta una metodología para el control activo de vibraciones mediante realimentación proporcional de aceleración, que considera las posiciones de los acelerómetros como variables de diseño. La metodología emplea un filtro modal discreto para estimar las componentes de aceleración de los modos de vibración, lo que desacopla la sintonización del controlador de la dependencia de las posiciones de los sensores, simplificando el diseño y reduciendo la complejidad computacional. El posicionamiento de los acelerómetros se optimiza minimizando una medida sobre la matriz de ganancias del filtro modal (Ω). Este criterio busca reducir la interacción del ruido de los acelerómetros con la estructura flexible y atenuar el *observation spillover*, un factor clave que puede causar inestabilidad al interactuar con la dinámica no modelada. Las simulaciones numéricas en una viga flexible demuestran que esta metodología reduce el impacto del ruido y promueve la estabilidad del controlador.

Palabras clave – Posiciones de los sensores, control activo de vibraciones, realimentación de aceleración.

Abstract – This work presents a methodology for active vibration control using proportional acceleration feedback, which considers accelerometer positions as design variables. The methodology employs a discrete modal filter to estimate the acceleration components of the vibration modes. This filter decouples the controller tuning from its dependence on sensor positions, thereby simplifying the design and reducing computational complexity. Accelerometer placement is optimized by minimizing a measure on the modal filter gain matrix (Ω). This criterion aims to reduce the interaction of accelerometer noise with the flexible structure's dynamics and to attenuate observation spillover, a key factor that can cause instability when interacting with unmodeled dynamics. Numerical simulations on a flexible beam demonstrate that this methodology reduces the impact of noise and promotes controller stability.

Keywords – Sensor positions, Active vibration control, Acceleration feedback.

1. INTRODUCCIÓN

Una estructura mecánica flexible sometida a fuerzas de perturbación experimenta el fenómeno de vibraciones mecánicas. Este produce desplazamientos no deseados que pueden degradar su desempeño y hasta comprometer su integridad mecánica [1]. Algunos ejemplos en los cuales este fenómeno es considerado como no deseado son: estructuras mecánicas con fines espaciales [2], [3] y [4]; generadores eólicos [5]; radiotelescopios terrestres [6], barras de pulverización [7], [8] y [9] y la generación de ruido por vibraciones estructurales [10] y [11].

Una de las alternativas para dominar el fenómeno de vibraciones mecánicas es el control activo de vibraciones. El control activo modifica la respuesta de la estructura flexible ante fuerzas de perturbación, mediante fuerzas de control gobernadas por un controlador en base a información del estado de la dinámica de la estructura obtenida mediante sensores instalados sobre la misma.

Se han propuesto diversas estrategias de realimentación en el área del control activo de vibraciones. Sin embargo, su viabilidad de realización e implementación se encuentran determinadas, entre otras circunstancias, por el tipo de sensores. En este sentido, uno de los sensores más utilizados es el acelerómetro, el cual en base a los últimos desarrollos de la tecnología MEMS, se ha convertido en un sensor de bajo costo, pequeñas dimensiones y peso reducido.

Diversos son los trabajos que han utilizado acelerómetros en la implementación de un control activo de vibraciones. Por ejemplo, [12] implementó un controlador diseñado con metodologías H2/LQG basado en la realimentación de aceleración y demostró su efectividad para suprimir las vibraciones en estructuras edilicias sujetas a sismos. [13] propuso un controlador con una dinámica de segundo orden el cual utiliza una realimentación de aceleración. [14] propuso una realimentación de aceleración el cual utiliza una configuración de actuador y sensor colocados en una misma posición sobre la estructura flexible. Todos estos trabajos tienen en común el hecho de que proponen un controlador con una dinámica de compensación.

El diseño de un control activo de vibraciones resulta un problema de ingeniería desafiante debido a que las vibraciones mecánicas son un fenómeno físico de carácter distribuido. Esta característica antepone una toma de decisión entre la dimensión del modelo matemático utilizado para describir la dinámica de la estructura flexible y su capacidad para describir la interacción del controlador con la estructura flexible. Esta situación de compromiso pone de manifiesto que los controladores diseñados en base a modelos reducidos pueden experimentar una fuerte degradación en su desempeño y hasta una posible pérdida de estabilidad, [15], en su interacción con la estructura flexible.

Otro aspecto a tener en cuenta en la etapa de diseño del control activo de vibraciones son las posiciones de los actuadores y sensores. Por un lado, se han propuesto metodologías de selección de posiciones de actuadores y/o sensores, las cuales requieren información sobre la dinámica de la estructura flexible que ha quedado excluida del modelo utilizado en la etapa de diseño del controlador [16-19]. Por otro lado, se ha propuesto una metodología de selección de posición de sensores cuyo objetivo es atenuar la interacción de la componente de ruido de los sensores con la dinámica de la estructura flexible durante el control activo de vibraciones [20]. Esta propuesta metodológica, en contraste con las anteriores mencionadas, no requiere información de la dinámica no contemplada en el modelo utilizado en el diseño del controlador. En este caso, la selección de posición de los sensores se realiza en base a una medida de calificación relacionada a la magnitud de las ganancias del filtro modal, el cual es introducido para estimar las componentes de aceleración modal. Este filtro es crucial porque desacopla la sintonización del controlador de su dependencia directa con las posiciones de los acelerómetros, lo que simplifica la complejidad computacional en la etapa de diseño del controlador [20]. Cabe mencionar, que este filtro modal deriva de un diseño propuesto para minimizar el efecto del ruido de los sensores sobre las salidas de dicho filtro [21], sin considerar aún la etapa de control de vibraciones.

Este trabajo se presenta como una versión extensa del trabajo presentado en [20], donde ahora se profundiza en el análisis de estabilidad y desempeño del sistema controlado, considerando el impacto de la dinámica no contemplada en la etapa de diseño del controlador, situación que fue ignorada en el trabajo original. Para que el artículo sea autocontenido, se vuelve a presentar la problemática emergente al introducir las posiciones de los sensores en el diseño del control activo de vibraciones. También se repite la presentación del filtro modal discreto y el consecuente desacople entre el problema de sintonización del controlador y el problema de las posiciones de los sensores. Seguidamente, se analiza el impacto de la componente de ruido de los acelerómetros en el desempeño del controlador y la estabilidad de éste en función de las posiciones de los sensores, siendo este último aspecto la principal contribución de este trabajo. Más específicamente, el criterio de selección de posición de los sensores propuesto atenúa el fenómeno de *observation spillover* —la presencia de componentes de aceleración de la dinámica no controlada en las señales de los sensores—, lo cual es fundamental para promover y preservar la estabilidad del controlador en su interacción con la estructura flexible.

2. DESARROLLO

2.1. Modelo matemático del sistema y estrategia de control propuesta

En este trabajo, se describe la dinámica del cuerpo o estructura flexible mediante un conjunto de n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden [22]:

$$M\ddot{x}(t) + C\dot{x}(t) + Kx(t) = B_u f_u(t) + B_p f_p(t) \quad (1)$$

donde el vector $x(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el descriptor temporal del i -ésimo coordenada de desplazamiento, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de inercia, $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz que modela el proceso de disipación proporcional, la matriz $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ describe la rigidez de la estructura flexible y las matrices $B_u \in \mathbb{R}^{n \times n_u}$, $B_p \in \mathbb{R}^{n \times n_p}$ modelan la interacción de las fuerzas de control y perturbación ordenadas en los vectores $f_u(t)$ y $f_p(t)$ respectivamente.

Al abordar el diseño de un control activo de vibraciones, la cantidad de ecuaciones diferenciales que describen la dinámica completa de la estructura flexible puede ser elevada. Esto impone un compromiso entre la complejidad de diseño del controlador y la potencia de la metodología de diseño para describir y predecir la dinámica resultante. En estos casos, se divide el conjunto de ecuaciones presentado en la Ecuación (1) en dos grupos: dinámica controlada y dinámica no controlada, por lo tanto, el modelo matemático presentado en dicha ecuación queda particionado y representado en una notación matricial de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} M_c & M_a \\ M_a^T & M_{nc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_c(t) \\ \ddot{x}_{nc}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_c & C_a \\ C_a^T & C_{nc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_c(t) \\ \dot{x}_{nc}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_c & K_a \\ K_a^T & K_{nc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c(t) \\ x_{nc}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{cu} \\ B_{ncu} \end{bmatrix} f_u(t) + \begin{bmatrix} B_{cp} \\ B_{ncp} \end{bmatrix} f_p(t) \quad (2)$$

donde las matrices con subíndice “c” describen la dinámica controlada, el subíndice “nc” señala las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica no controlada y el subíndice “a” identifica los acoplamientos entre ambas dinámicas.

Usualmente, la dinámica controlada es utilizada en la etapa de diseño del controlador ignorando su acoplamiento con la dinámica no controlada. Es común que este modelo describa la dinámica de los modos de vibración de baja frecuencia. Estos aportan las componentes mayoritarias en la descripción del desplazamiento de la estructura flexible. En una notación matricial el modelo de la dinámica controlada desacoplada queda descrita de la siguiente manera:

$$M_c \ddot{x}_c(t) + C_c \dot{x}_c(t) + K_c x_c(t) = B_{cu} f_u(t) + B_{cp} f_p(t) \quad (3)$$

Por otro lado, la implementación de este control activo de vibraciones asume la instalación de $n_s \geq n_c$ acelerómetros sobre la estructura flexible. El diseño de este control asume un conjunto de $n_p \geq n_s$ posiciones candidatas para estos n_s acelerómetros estableciendo así un conjunto S con $C_{n_s}(n_p)$ configuraciones posibles de posiciones para estos acelerómetros. También se asumirá que cada uno de los acelerómetros presenta una componente de ruido aditiva en su señal de salida, una masa despreciable y una ausencia de dinámica.

La señal de salida de estos acelerómetros, considerando tanto la dinámica controlada como la no controlada, ver modelo en la Ecuación (2), quedan modeladas a partir de la siguiente expresión:

$$y(k, t) = [P_c(k) \quad P_{nc}(k)] \begin{bmatrix} \ddot{x}_c(t) \\ \ddot{x}_{nc}(t) \end{bmatrix} + r(t) \quad (4)$$

donde $r(t) \in \mathbb{R}^{n_s \times 1}$ representa las componentes de ruido de los n_s acelerómetros. Las matrices $P_c(k) \in \mathbb{R}^{n_s \times n_c}$ y $P_{nc}(k) \in \mathbb{R}^{n_s \times n_{nc}}$ son las matrices de interacción de los acelerómetros con la estructura flexible. La variable k denota la k -ésima configuración posible de posiciones de los acelerómetros definidas en S .

La estrategia de control activo de vibraciones a partir de la realimentación proporcional de aceleración propone que las fuerzas de control sean una combinación lineal ponderada de las señales de los acelerómetros. En notación matricial esta estrategia es descrita de la siguiente manera:

$$f_u(k, t) = -K_s y(k, t) \quad (5)$$

donde la matriz $K_s \in \mathbb{R}^{n_u \times n_s}$ es la matriz de ganancias del controlador.

En la etapa de diseño, se considera que las señales de los acelerómetros $y(k, t)$ presentadas en la Ecuación (4), son conformadas únicamente por las componentes de aceleración de la dinámica controlada y el ruido de los sensores. El término de la dinámica no controlada en la ecuación (4) es ignorado, ya que la información de esta dinámica se presupone desconocida o con alta incertidumbre. La realimentación en base a la ley de control presentada en la Ecuación (5), modifica la dinámica controlada de la estructura flexible de la ecuación (3), quedando esta descrita de la siguiente manera:

$$[M_c + B_{cu}K_sP_c(k)]\ddot{x}_c(t) + C_c\dot{x}_c(t) + K_cx_c(t) = B_{cp}f_p(t) - B_{cu}K_sr(t) \quad (6)$$

donde es posible observar que la realimentación ponderada de aceleración modifica la matriz de inercia de la dinámica controlada. Esta modificación no solo está sujeta a la matriz de ganancias K_s , sino que también está sujeta a la disposición de las fuerzas de control mediante la matriz B_{cu} , y a las posiciones de los acelerómetros a partir de la matriz $P_c(k)$.

El primer aspecto emergente al considerar las posiciones de los acelerómetros es que su introducción incrementa el volumen de cómputo en la etapa de diseño del controlador de manera sustancial. Por ejemplo, disponiendo de cuatro acelerómetros y veinte posiciones candidatas para estos, la cantidad de configuraciones posibles de posición asciende a $C_4(20) = \frac{20!}{4!16!} = 4845$. En este contexto, definido el desempeño esperado del controlador, será necesario determinar la matriz de ganancias K_s del controlador para cada una de las 4845 configuraciones. Por lo tanto, a continuación, se propone una metodología para desacoplar el problema del posicionamiento de los sensores del problema de sintonización del controlador.

2.2. Metodología propuesta

La metodología presentada en [20], propone abordar esta problemática asumiendo que la matriz de ganancias del controlador K_s , Ecuación (5), es el producto de dos matrices:

$$K_s = K_{sf}\Omega. \quad (7)$$

Como se verá más adelante, la matriz $K_{sf} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_c}$ es la encargada de establecer la dinámica de lazo cerrado siendo esta invariante ante las posiciones de los acelerómetros. Mientras que la matriz $\Omega \in \mathbb{R}^{n_c \times n_s}$ es la responsable de establecer una estimación del vector aceleración de la dinámica controlada $\hat{\ddot{x}}_c(t)$, a partir de las señales de los acelerómetros mediante la conformación de un filtro modal discreto:

$$\hat{\ddot{x}}_c(k, t) = \Omega(k)y(k, t) \quad (8)$$

Al introducir el modelo de la señal de los acelerómetros presentada en la Ecuación (4), pero ignorando las componentes de aceleración de la dinámica no controlada, en la Ecuación (9), la estimación representada de la siguiente manera:

$$\hat{\ddot{x}}_c(k, t) = \Omega(k)P_c(k)\ddot{x}_c(t) + \Omega(k)r(t) \quad (9)$$

donde la matriz de ganancias $\Omega(k)$, se determina a partir de información de la dinámica controlada de la siguiente manera:

$$\Omega(k) = [P_c^T(k)P_c(k)]^{-1}P_c^T(k) \quad (10)$$

en base a la metodología propuesta en [21]. Con esta definición, el producto $\Omega(k)P_c(k) = I_c$ resulta una matriz identidad, lo cual promueve una estimación perfecta. Esto significa, obtener la separación de las componentes de aceleración de cada descriptor temporal de la dinámica controlada y disponer de éstas en las respectivas señales de salida del filtro, Ecuación (9). Para que esto suceda sobre cada una de las configuraciones de posición, la cantidad de acelerómetros deben ser al menos igual a la cantidad de componentes de aceleración que se desean aislar, $n_s \geq n_c$, [21]. Por otro lado, se puede observar que la estimación de aceleraciones propuesta en la Ecuación (10), tiene una componente residual. Esta componente no deseada es la combinación lineal ponderada de las componentes de ruido de los n_s acelerómetros descrita por el sumando $\Omega(k)r(t)$ y que será un nuevo agente de perturbación de la estructura flexible.

En base a la factorización de la matriz de ganancias del controlador K_s propuesta en la Ecuación (8) y la determinación de la matriz $\Omega(k)$ a partir de la Ecuación (11), la ley de control presentada en la Ecuación (5), y constituida en base a la dinámica controlada definida en la Ecuación (3), queda definida de la siguiente manera:

$$f_u(t) = -K_{sf}\hat{x}_c(t) \quad (11)$$

y la dinámica controlada tras la realimentación propuesta resulta:

$$[M_c + B_{cu} K_{sf}] \ddot{x}_c(t) + C_c \dot{x}_c(t) + K_c x_c(t) = -B_{cu} K_{sf} \Omega(k) r(t) + B_{cp} f_p(t) \quad (12)$$

donde puede observarse nuevamente que la realimentación modifica la inercia de la dinámica, pero en este caso esta modificación es independiente de las posiciones de los acelerómetros. Esto resulta tras la factorización de la matriz de ganancias del controlador propuesta en la Ecuación (8) donde la condición $\Omega(k)P_c(k) = I_c$ tras la introducción de un filtro modal para estimar las aceleraciones. Como resultado de esta factorización el volumen de cómputo en la etapa de diseño del controlador se reduce sustancialmente tras desacoplar el problema de selección de posición de los sensores del problema de sintonización de la dinámica a lazo cerrado.

2.3. Problemática de la componente de ruido y su interacción con la dinámica de la estructura flexible

Tras establecer la realimentación, la componente de ruido de los acelerómetros excita la dinámica de la estructura flexible, pudiendo degradar el desempeño del controlador. Esto puede observarse en la Ecuación (12). El término $B_{cu} K_{sf} \Omega(k) r(t)$ es el precursor de esta excitación no deseada y su magnitud depende de varios factores: la posición de las fuerzas de control B_{cu} , la matriz de ganancia del controlador K_{sf} y la posición de los acelerómetros a través de la matriz $\Omega(k)$. Esta matriz de ganancias $\Omega(k)$ se computa a partir de la magnitud de la forma de los modos de vibración en las posiciones de los acelerómetros, ver Ecuación (10). Entonces, adoptar el criterio de seleccionar las posiciones de los acelerómetros que promuevan que la matriz $\Omega(k) \rightarrow 0$, resulta en una de las posibles decisiones de diseño para reducir la degradación del desempeño del control activo producto de las componentes de ruido presentes en los acelerómetros.

2.4. Problemática de la estabilidad del controlador en su interacción con la dinámica de la estructura flexible

En la etapa de diseño del control activo de vibraciones, la estabilidad del controlador es evaluada en base a un modelo (dinámica controlada) que describe parcialmente la dinámica de la estructura flexible. Esto implica por lo tanto que no existen certezas con respecto a la estabilidad real de este controlador en su interacción con la estructura flexible. Para determinar las causas que promueven esta pérdida de estabilidad, se puede tomar el modelo dinámico presentado en la Ecuación (2), considerar la Ecuación (4) que describe las señales de los acelerómetros en base a dicho modelo e introducir la realimentación de aceleración descrita en la Ecuación (5), para obtener una descripción de la dinámica de la estructura flexible cuando el control de vibraciones se encuentra activo. Esta dinámica a lazo cerrado queda descrita de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M_c + B_{cu} K_{sf} & M_a + B_{cu} K_{sf} \Omega(k) P_{nc}(k) \\ M_a^T + B_{ncu} K_{sf} & M_{nc} + B_{ncu} K_{sf} \Omega(k) P_{nc}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_c(t) \\ \ddot{x}_{nc}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_c & C_a \\ C_a^T & C_{nc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_c(t) \\ \dot{x}_{nc}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_c & K_a \\ K_a^T & K_{nc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c(t) \\ x_{nc}(t) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} B_{cu} \\ B_{ncu} \end{bmatrix} f_u(t) + \begin{bmatrix} B_{cp} \\ B_{ncp} \end{bmatrix} f_p(t) - \begin{bmatrix} B_{cu} \\ B_{ncu} \end{bmatrix} K_{sf} \Omega(k) r(t) \end{aligned} \quad (13)$$

Como puede observarse, la realimentación de aceleración modifica tanto la matriz de inercia de la dinámica controlada, $M_c + B_{cu} K_{sf}$, como la matriz de inercia de la dinámica no controlada $M_{nc} + B_{ncu} K_{sf} \Omega(k) P_{nc}(k)$ y los acoplamientos inerciales entre ambas dinámicas $M_a + B_{cu} K_{sf} \Omega(k) P_{nc}(k)$ y $M_a^T + B_{ncu} K_{sf}$. La posible inestabilidad del controlador es causada por todas estas modificaciones en la dinámica de la estructura flexible. Esta problemática ya ha sido analizada por Balas [15], para el caso en donde las matrices de acoplamientos C_a y K_a son nulas. En dicho trabajo se identificaron dos fenómenos:

el *observation spillover* y el *control spillover* promotores de la pérdida de estabilidad. El *control spillover* es la excitación no deseada de la dinámica no controlada a través de las fuerzas de control $f_u(t)$. Este fenómeno introduce el término $B_{ncu}K_{sf}$ en el acoplamiento inercial de la matriz de inercia, ver la Ecuación (13). El fenómeno *observation spillover*, en cambio es la presencia de las componentes de aceleración de la dinámica no controlada en todas las señales de salida de los acelerómetros. Este fenómeno introduce el término $B_{cu}K_{sf}\Omega(k)P_{nc}(k)$ en el acoplamiento inercial entre dinámicas y en la matriz de inercia de la dinámica no controlada. Balas demostró que la eliminación del *observation spillover* en las señales de los acelerómetros garantiza la estabilidad del controlador en su interacción con la dinámica real de la estructura flexible [15]. La eliminación o en su defecto la atenuación de este fenómeno implica que el término $B_{cu}K_{sf}\Omega(k)P_{nc}(k) \rightarrow 0$. Para lograr esto, Balas sugiere la utilización de filtros aplicados sobre las señales de los acelerómetros y/o una adecuada selección de posición de los acelerómetros. En lo que respecta a la selección de posición de los acelerómetros, el criterio propuesto en la sección 2.4 consistente en seleccionar las posiciones de los acelerómetros que fomenten que la matriz $\Omega(k) \rightarrow 0$. También, es una decisión de diseño que promueve la atenuación del fenómeno *observation spillover* ya que el término $B_{cu}K_{sf}\Omega(k)P_{nc}(k) \rightarrow 0$ y por lo tanto, promueve la estabilidad del controlador.

2.5. Metodología de selección de posición de acelerómetros

Las dos problemáticas puestas a consideración en las secciones anteriores ponen de manifiesto el impacto de las posiciones de los acelerómetros en este tipo de control activo de vibraciones. En este trabajo se recurre al criterio propuesto por [21] para la selección de las posiciones de los acelerómetros. En dicho trabajo se estableció un criterio de selección de posiciones con la necesidad de atenuar las componentes de ruido de los sensores en las señales de salida del filtro modal. Este criterio se basa en la identificación de la k^* -iésima configuración de posición de los sensores cuya medida $f_c(k^*) = \|\Omega(k^*)\|_F$, denominada factor de calidad f_c , sobre la matriz de ganancias del filtro modal resulta la mínima sobre el conjunto finito de configuraciones posibles S , es decir:

$$\|\Omega(k^*)\|_F \leq \|\Omega(k)\|_F \quad \forall k \in S \quad (14)$$

donde S es el conjunto finito de configuraciones de posición de los acelerómetros. Este criterio selecciona las posiciones para los acelerómetros que promuevan que la matriz $\Omega(k^*) \rightarrow 0$ y por lo tanto promueve la atenuación en la interacción ruido-dinámica, es decir, $\begin{bmatrix} B_{cu} \\ B_{ncu} \end{bmatrix} K_{sf}\Omega(k)r(t) \rightarrow 0$, ver Ecuación (13) y la atenuación del *observation spillover*, es decir $B_{cu}K_{sf}\Omega(k)P_{nc}(k) \rightarrow 0$.

3. CASO DE ESTUDIO

Con el objetivo de ejemplificar la utilización de la metodología propuesta en este trabajo, se presenta el diseño de un control activo de vibraciones de una viga flexible esbelta mediante realimentación proporcional de aceleración. La evaluación de desempeño de este control activo se realizó en base a simulaciones numéricas.

3.1. Modelo dinámico de la viga flexible

En la Fig. 1 se presenta un diagrama esquemático correspondiente a la vista superior de una viga flexible de sección rectangular constante con un ancho de 5.1 mm y una altura de 51.4 mm . La longitud de la viga es de $L = 2000 \text{ mm}$, su densidad es $7850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ y un módulo de elasticidad de 200 GPa . Como puede observarse, uno de los extremos de esta viga se encuentra empotrado sobre una masa $m_m = 200 \text{ kg}$ que presenta una traslación en la dirección \widehat{e}_y , mientras que el otro extremo es libre. La viga, como también la masa, se encuentran sujetas a fuerzas externas. La fuerza $f_p(t)$, es una fuerza de perturbación que actúa sobre el extremo libre de la viga. La fuerza $f_u(t)$, es la fuerza de control por la cual el control activo interacciona con la viga flexible. La fuerza $f_e(t)$, es una fuerza de restitución elástica proporcional a la traslación de la masa m_m , es decir $f_e(t) = -k_p p(t)$, donde $k_p = 10 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ y la fuerza $f_v(t) = -k_v \dot{p}(t)$, donde $k_v =$

$3760 \frac{\text{Ns}}{\text{m}}$, es una fuerza de disipación. La magnitud $p(t)$ es el desplazamiento de la masa m_m con respecto al marco de referencia inercial XY (\hat{e}_X, \hat{e}_Y).

La magnitud $w(x, t)$, es el desplazamiento transversal de la viga con respecto al sistema de referencia no inercial xy (\hat{e}_x, \hat{e}_y) situado sobre la masa m_m .

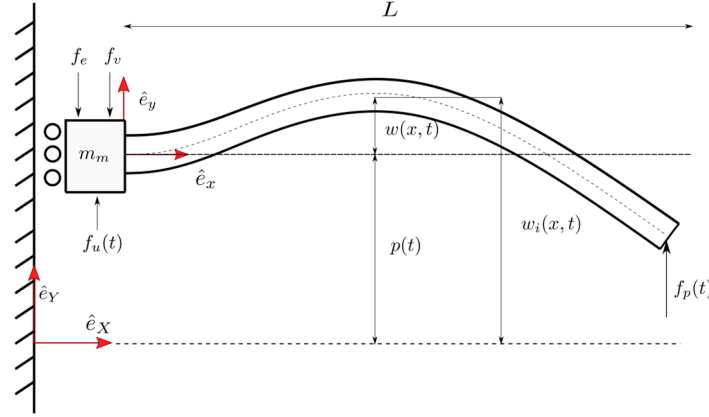


Fig. 1. Esquema de Viga flexible esbelta. Vista superior.

3.1.1 Modelo dinámica controlada

El modelo matemático que describe la dinámica de esta estructura flexible (viga + masa) para la etapa de diseño del controlador, es el modelo presentado en la Ecuación (3) donde las matrices M_c , C_c y K_c de dicho modelo quedan determinadas de la siguiente manera:

$$M_c = \begin{bmatrix} 2.20 & 1.58 & 0.88 \\ 1.58 & 1.00 & 0.00 \\ 0.88 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix}, C_c = \begin{bmatrix} 3738.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.07 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.41 \end{bmatrix}, K_c = \begin{bmatrix} 10.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 46.23 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1731.20 \end{bmatrix} \quad (15)$$

las matrices de interacción B_{cu} y B_{cp} :

$$B_{cu} = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}, B_{cp} = \begin{bmatrix} 1.00 \\ 0.97 \\ -0.98 \end{bmatrix} \quad (16)$$

y el vector $x_c(t)$:

$$x_c(t) = \begin{bmatrix} p(t) \\ q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}, \quad (17)$$

donde $p(t)$ es el desplazamiento del extremo empotrado de la viga y las variables $q_1(t)$ y $q_2(t)$, son las componentes modales de desplazamiento transversal relativo de la viga con respecto al sistema xy . Estas componentes modales corresponden al primer y segundo modo de vibración transversal de la viga respectivamente.

El desplazamiento transversal con respecto a XY (dirección \hat{e}_Y) del extremo libre de la viga se propone como señal de desempeño y la misma queda modelada de la siguiente manera:

$$z_L(t) = w(L, t) = p(t) + 0.97q_1(t) - 0.98q_2(t) \quad (18)$$

En este caso de estudio la realimentación de aceleración se establece a partir de $n_s = 3$ acelerómetros (ideales) instalados sobre la longitud de la viga flexible y destinados a determinar la aceleración transversal de la viga con respecto al sistema de referencia inercial XY . Las señales de dichos acelerómetros y sus respectivas componentes de ruido quedan descritas de la siguiente manera:

$$s(k, t) = P_c(k)\ddot{x}_c(t) + r(t), \quad (19)$$

donde la matriz:

$$P_c(k) = \begin{bmatrix} 1 & \phi_1(r_1) & \phi_2(r_1) \\ 1 & \phi_1(r_2) & \phi_1(r_2) \\ 1 & \phi_1(r_3) & \phi_1(r_3) \end{bmatrix}, \quad (20)$$

se conforma en parte con las magnitudes de la forma de los modos $\phi_i(x)$ en las posiciones candidatas sobre la longitud de la viga $r_i \in [0, L]$ $i = 1, 2, 3$. La variable k hace referencia a la k -ésima configuración posible para estos tres acelerómetros a partir de las posiciones candidatas. Por último, $r(t)$ reúne las componentes de ruido de cada uno de los tres acelerómetros.

3.1.2 Modelo dinámica controlada + dinámica no controlada

Para poder realizar una evaluación numérica de la estabilidad y desempeño del controlador en su interacción con la viga flexible se acopla una dinámica no controlada a la dinámica controlada. Esta dinámica no controlada está constituida por los tres modos de vibración consecutivos en frecuencia a los modos contemplados en la dinámica controlada. Ambas dinámicas acopladas quedan descritas por el modelo presentado en la Ecuación (2), donde los elementos correspondientes a la dinámica controlada ya fueron establecidos en la sección 3.1.1. En tanto a la dinámica no controlada, las matrices M_{nc} , C_{nc} y K_{nc} quedan definidas de la siguiente manera:

$$M_{nc} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 1.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix}, C_{nc} = \begin{bmatrix} 1.50 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 2.96 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 4.90 \end{bmatrix}, K_{nc} = \begin{bmatrix} 1.34E04 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 5.2E04 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 4.2E05 \end{bmatrix} \quad (21)$$

las matrices de interacción B_{ncu} y B_{ncp} :

$$B_{ncu} = \begin{bmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{bmatrix}, B_{ncp} = \begin{bmatrix} 0.97 \\ -0.98 \\ 0.99 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Las matrices de acoplamiento C_a y K_a son matrices nulas y la matriz de acoplamiento M_a queda definida de la siguiente manera:

$$M_a = \begin{bmatrix} 0.51 & 0.39 & 0.29 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix} \quad (23)$$

La señal desplazamiento transversal del extremo libre de la viga queda descrito de la siguiente manera:

$$z_L(t) = w(L, t) = p(t) + 0.97q_1(t) - 0.98q_2(t) + 0.97q_3(t) - 0.98q_4(t) + 0.99q_5(t) \quad (24)$$

donde las variables $q_3(t)$, $q_4(t)$ y $q_5(t)$ son las componentes modales de desplazamiento transversal relativo de la viga con respecto al sistema xy correspondientes al tercer, cuarto y quinto modo de vibración y y las señales de los acelerómetros de la siguiente manera:

$$s(k, t) = P_c(k)\ddot{x}_c(t) + P_{nc}(k)\ddot{x}_{nc}(t) + r(t), \quad (24)$$

donde

$$P_{nc}(k) = \begin{bmatrix} \phi_3(r_1) & \phi_4(r_1) & \phi_5(r_1) \\ \phi_3(r_1) & \phi_4(r_2) & \phi_5(r_2) \\ \phi_3(r_1) & \phi_4(r_3) & \phi_5(r_3) \end{bmatrix} \quad (25)$$

3.2. Posicionamiento de los acelerómetros

Se dispuso de un conjunto de $n_p = 41$ posiciones candidatas para los tres acelerómetros, repartidas de manera uniforme sobre la longitud de la viga. En función de estas posiciones candidatas y la cantidad de

acelerómetros disponibles, el conjunto S de configuraciones posibles se constituye por $C_3(41) = 10660$ configuraciones.

En lo que respecta al problema de selección de posición de los tres acelerómetros se procedió al diseño de un filtro modal para estimar las aceleraciones de la dinámica controlada de acuerdo con la metodología propuesta en [21]. En base al modelo de la dinámica controlada y las posiciones candidatas se procedió a determinar la matriz de ganancias del filtro Ω a partir de la Ecuación (10) y computar su respectivo *factor* $f_c(k)$, para cada una de las 10660 configuraciones que conforman el conjunto S . En la Fig. 2, se presenta el histograma de configuraciones por intervalos de factor $f_c(k)$.

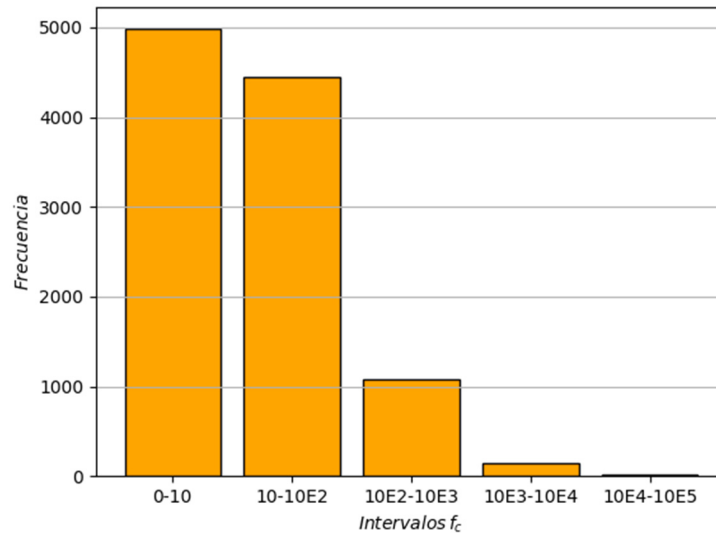


Fig. 2. Frecuencia de configuraciones por factor de calidad sobre el conjunto de configuraciones S .

La metodología establece un factor de calidad a cada una de las 10660 configuraciones posibles. En la Fig. 2, puede observarse que aproximadamente el 50% configuraciones tiene un factor de calidad menor a 10 y otro 40% de total de configuraciones con un factor de calidad comprendido entre 10 y 100. El 10% restante posee un factor mayor a 100. El menor factor identificado sobre el grupo S fue $f_c = 2.45$ y corresponde a la configuración de posición de los tres acelerómetros presentada como caso I en la Tabla 1.

3.3. Diseño del controlador

De acuerdo con la Ecuación (8), que modela la ley de control a partir de las señales de salida del filtro modal y en función de la señal de salida $s(t)$ definida en la Ecuación (19) que modela las componentes de aceleración de la dinámica controlada en este caso de estudio, la única fuerza de control $f_u(t)$, ver Ecuación (16), presente en este caso de estudio queda determinada de la siguiente manera:

$$f_u(t) = -K_{sf}\ddot{x}_c(t). \quad (26)$$

Por otro lado, a partir de la dinámica controlada presentada en las Ecuaciones (15), (16), (17), (18), (19) y (20), se procedió a computar la función transferencia $G_{zLf_p}(s)$ a lazo abierto y a lazo cerrado a partir de la realimentación emergente a partir de la Ecuación (26). La respuesta en frecuencia de dicha función transferencia a lazo abierta es presentada en la Fig. 3, y como se puede observar la respuesta del extremo libre respecto a la fuerza de perturbación es preponderante a una frecuencia de excitación cercana a 1 Hz. El pico que se observa a dicha frecuencia no es mas que el pico de resonancia asociado al primer modo de vibración transversal de la viga modelado en la dinámica controlada. Atendiendo a esta observación se decidió modificar la respuesta de este primer modo de vibración mediante la realimentación de su propia componente de aceleración $\ddot{q}_1(t)$. Esto implica que la matriz de ganancias de realimentación K_{sf} , ver Ecuación (26), quede estructurada y parametrizada por un único parámetro de ganancia α de la siguiente manera:

$$K_{sf} = \alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

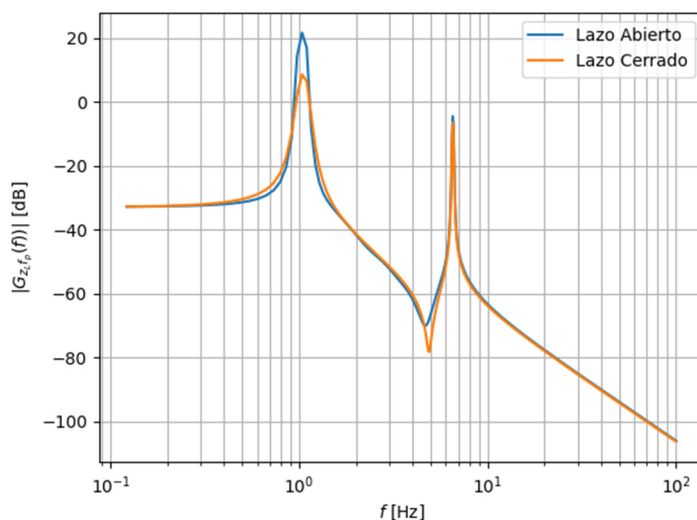


Fig. 3. Módulo de respuesta en frecuencia $|G_{z_L f_p}(f)|$ constituida a partir de la dinámica controlada lazo abierto (azul) y a lazo cerrado (naranja) por realimentación de aceleración modal del primer modo de vibración propuesta.

En base a la estructuración propuesta en la Ecuación (27) a la matriz K_{sf} , el controlador en su interacción con la dinámica controlada resulta estable cuando su parámetro α toma valores $0 \leq \alpha < 120$ kg. En la Fig. 3 se presenta la respuesta en frecuencia $G_{z_L f_p}(f)$, correspondiente a la dinámica controlada a lazo abierto y a lazo cerrado estable con el controlador sintonizado en $\alpha = 30$ kg. En dicha figura puede observarse que la magnitud del pico de resonancia presente a los 1.08 Hz se ve atenuado en 10 dB, producto de la realimentación establecida por el controlador, la cual se considera satisfactoria. El segundo modo de vibración presenta una leve atenuación. La introducción de un filtro modal para estimar $\ddot{x}_c(t)$ en la metodología hace que el desempeño y la estabilidad del *controlador - dinámica controlada* resulten ambos independientes de las posiciones que adopten los acelerómetros.

En tanto a la respuesta a lazo cerrado obtenida se considera es satisfactoria ya que el principal objetivo de este caso de estudio es evaluar el impacto de la dinámica no controlada y el impacto de la componente de ruido de los acelerómetros en el desempeño y la estabilidad del controlador en su interacción con la estructura flexible en función de la configuración de posición adoptada para los acelerómetros.

3.4. Estabilidad del controlador en su interacción con la viga

Con el objetivo de estudiar el impacto de la dinámica no contemplada en la estabilidad del controlador cuando este interactúa con la dinámica de estructura flexible, se procedió a determinar la estabilidad de este controlador en su interacción con el modelo presentado en la sección 3.1.2 estableciendo una realimentación estructurada de acuerdo con la Ecuación (27). La estabilidad del controlador se evaluó para valores de $0 \leq \alpha < 120$ kg y para cada una de las 10660 configuraciones de posición disponibles.

En la Fig. 4, se presenta el porcentaje de configuraciones con un f_c dentro de un intervalo, para las cuales el controlador resulta estable en función del parámetro α . Puede observarse en esta figura que el controlador resulta estable cuando la ganancia $\alpha \rightarrow 0$ y el factor $f_c \rightarrow 0$. Esta evaluación pone en evidencia que la atenuación del fenómeno *observation spillover* [15], promueve estabilidad del controlador en su interacción con la dinámica de la estructura flexible. En la sección 2.5 se propuso como mecanismo de atenuación seleccionar las posiciones de los acelerómetros de modo tal que la matriz de ganancias Ω del filtro modal sea lo más próxima a la matriz nula, es decir que su factor $f_c = \|\Omega\|_F \rightarrow 0$. Puede observarse en la Fig. 4 fijando el valor α , por ejemplo $\alpha = 10$ kg, las configuraciones con una $f_c = \|\Omega\|_F \rightarrow 0$ promueven la conservación de la estabilidad del controlador obtenida en la etapa de diseño. Por otro lado, las configuraciones con un factor $f_c \rightarrow 0$ presentan una menor degradación del intervalo de ganancia α para el cual el controlador resulta estable. Por ejemplo, al menos 5 (0.1% de 5000) de las configuraciones con un $f_c < 10$, podrían garantizar estabilidad cuando $\alpha = 80$ kg.

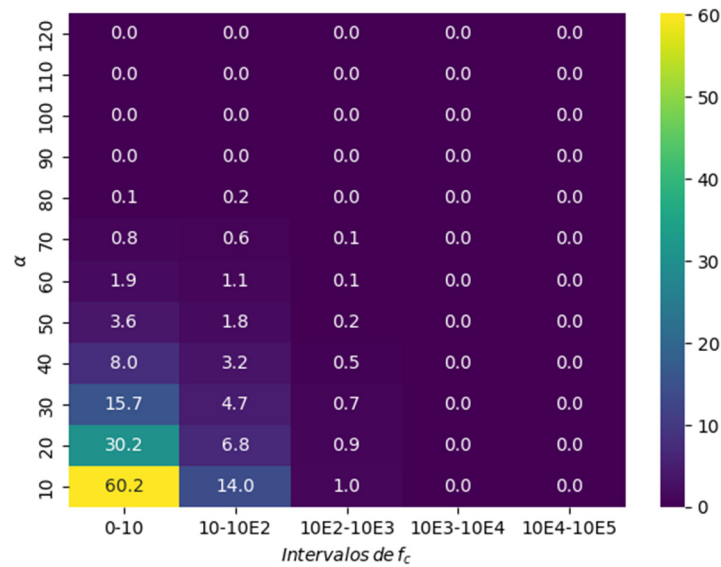


Fig. 4. Porcentaje de configuraciones de posición cuyo factor de calidad se encuentra en un determinado intervalo y resultan estables para el valor del parámetro de sintonización α del controlador.

3.5. Excitación de la dinámica de la estructura flexible producto de las componentes de ruido presente en los acelerómetros y su dependencia a las posiciones de dichos acelerómetros.

Para evaluar el impacto de las posiciones de los acelerómetros en la excitación de la dinámica producto de las componentes de ruido presentes en los mismos, se seleccionaron tres configuraciones con factor de calidad distintos. En la Tabla 1 se presenta las posiciones de los acelerómetros medidas respecto al extremo empotrado correspondientes a cada una de las configuraciones seleccionadas.

Tabla 1. Configuraciones de posición para los tres acelerómetros para las cuales el controlador resulta estable cuando su parámetro de sintonización $\alpha = 30 \text{ kg}$.

Conf.	f_c	Posiciones [m]		
		s_1	s_2	s_3
I	2.45	0.00	1.25	2.00
II	92.78	0.05	0.1	2.00
III	254.92	0.00	0.05	1.95

En la Fig. 5, Fig. 6 y Fig. 7 se presentan la respuesta en frecuencia del extremo libre de la viga Z_L con respecto a la componente de ruido de los acelerómetros. En ellas puede observarse que las configuraciones con un f_c elevado promueven el incremento de la excitación de la dinámica producto de las componentes de ruido de los acelerómetros. La configuración III con un $f_c = 254$ incrementa en promedio aproximadamente unos 40 dB las componentes de ruido de los acelerómetros s_1 , s_2 con respecto la configuración I con un $f_c = 2.44$. En tanto, esta última configuración con $f_c = 2.44$ presenta atenuación de las componentes de ruido de los tres acelerómetros garantizando una atenuación mínima de -10 dB.

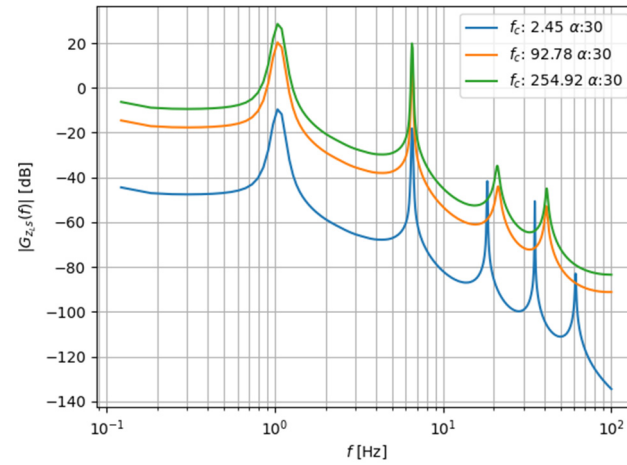


Fig. 6. Módulo de la respuesta en frecuencia a lazo cerrado del extremo libre de la viga con respecto a la componente de ruido de acelerómetro s_1 $|G_{zLs_1}(f)|$.

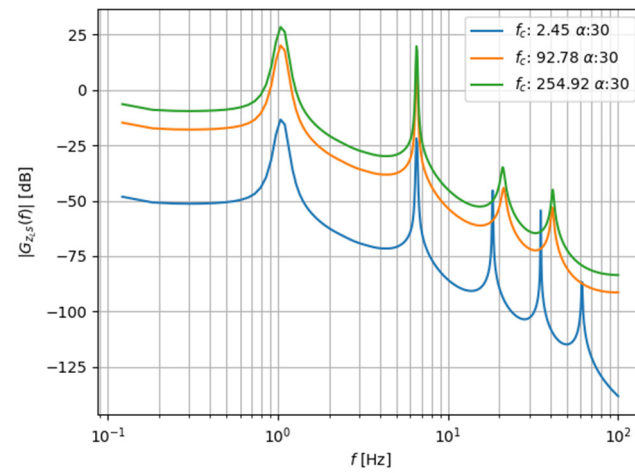


Fig. 7. Módulo de la respuesta en frecuencia a lazo cerrado del extremo libre de la viga con respecto a la componente de ruido de acelerómetro s_2 $|G_{zLs_2}(f)|$.

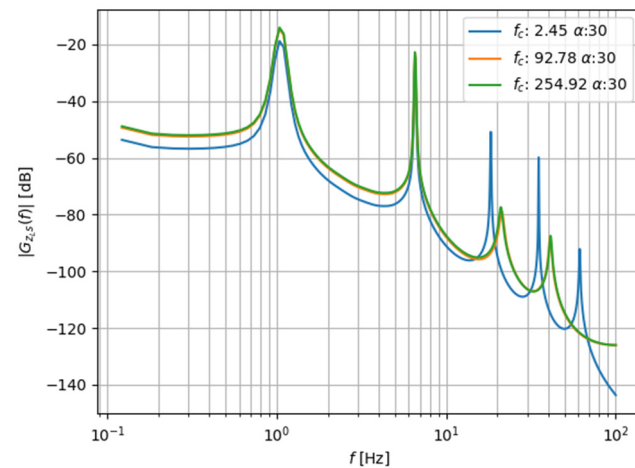


Fig. 8. Módulo de la respuesta en frecuencia a lazo cerrado del extremo libre de la viga con respecto a la componente de ruido de acelerómetro s_3 $|G_{zLs_3}(f)|$.

4. CONCLUSIONES

Este trabajo presenta una metodología de diseño de un control activo de vibraciones mediante realimentación proporcional de aceleración. La metodología hace uso un filtro modal discreto para estimar las componentes de aceleración de los modos de vibración, permitiendo así desacoplar la sintonización del controlador de su dependencia directa con las posiciones de los acelerómetros. Este desacople promueve una simplificación del proceso de diseño y una reducción de la complejidad computacional.

Basándose únicamente en la información del modelo dinámico utilizado en la etapa de diseño, la metodología califica cada una de las configuraciones posibles de las posiciones de los acelerómetros. Esta calificación se realiza mediante la minimización de factor f_c sobre la matriz de ganancias del filtro modal (Ω). Dicha calificación permite identificar el conjunto de configuraciones de posición que promueven dos objetivos críticos:

1. Mejorar el desempeño del controlador. Al seleccionar configuraciones donde el factor f_c es mínimo (es decir, $\Omega(k)$ se aproxima a cero), se reduce la interacción de las componentes de ruido inherentes a los acelerómetros con la dinámica de la estructura flexible, atenuando la excitación no deseada. Las simulaciones numéricas demostraron que las configuraciones con bajo f_c pueden lograr atenuaciones de hasta -10 dB en el impacto del ruido.

2. Preservar la estabilidad del controlador: La atenuación del fenómeno de *observation spillover* —la presencia de componentes de aceleración de la dinámica no controlada en las señales de los sensores— es esencial para la estabilidad. La minimización del factor f_c promueve que el término $\mathbf{B}_{cu}\mathbf{K}_{sf}\Omega(k)\mathbf{P}_{nc}(k)$ tienda a cero, lo cual, como demostró Balas [15], garantiza la estabilidad del controlador en su interacción con la dinámica real de la estructura flexible. Los resultados de la evaluación de estabilidad confirmaron que las configuraciones con un factor $f_c \rightarrow 0$ presentan una menor degradación del intervalo de ganancia para el cual el controlador permanece estable.

En resumen, la metodología propuesta califica las posibles posiciones de los acelerómetros, permitiendo identificar aquellas configuraciones que, al minimizar el factor de calidad f_c , promueven eficazmente la reducción del impacto del ruido en el desempeño del control activo y, crucialmente, promueven la estabilidad del controlador en su interacción con la estructura flexible, incluso en presencia de dinámicas no modeladas.

REFERENCIAS

- [1] A. Preumont, *Vibration Control of Active Structures: An Introduction. Solid Mechanics and Its Applications* 96. Springer Netherlands. ISBN 978-1-4020-0496-4, 978-0-306-48422-3 (2004)
- [2] I.M. da Fonseca, D.A. Rade, L.C. Goes, T. de Paula Sales, “Attitude and vibration control of a satellite containing flexible solar arrays by using reaction wheels, and piezoelectric transducers as sensors and actuators”. *Acta Astronautica*, **139**, 357-366 (2017)
- [3] D. Meng, X. Wang, W. Xu, B. Liang, “Space robots with flexible appendages: dynamic modeling, coupling measurement, and vibration suppression” *Journal of Sound and Vibration*, **396**, 30-50 (2017)
- [4] T. Sales, D. Rade, L. De Souza, “Passive vibration control of flexible spacecraft using shunted piezoelectric transducers”. *Aerospace Science and Technology*, **29**(1), 403-412 (2013)
- [5] M.H. Hansen, “Aeroelastic instability problems for wind turbines”. *Wind Energy*, **10**(6), 551-577 (2007)
- [6] F. Caputo, A. De Luca, A. Greco, S. Maietta, M. Bellucci, “FE simulation of a shm system for a large radio-telescope”. *International Review on Modelling and Simulations*, **11**, 5-14 (2018)
- [7] J.J. Langenakens, L. Clijmans, H. Ramon, J. De Baerdemaeker, “The effects of vertical sprayer boom movements on the uniformity of spray distribution”. *Journal of Agricultural Engineering Research*, **74**(3), 281-291 (1999)
- [8] D. Ooms, F. Lebeau, R. Ruter, M.-F. Destain, “Measurements of the horizontal sprayer boom movements by sensor data fusion”. *Computers and Electronics in Agriculture*, **33**(2), 139-162 (2002)
- [9] C. Sinfort, “Comparison between measurements and predictions of spray pattern from a moving boom sprayer”. *Aspects of Applied Biology* (United Kingdom) (1997)

- [10] J. Cheer, S.J. Elliott, "Multichannel control systems for the attenuation of interior road noise in vehicles". *Mechanical Systems and Signal Processing*, **60**, 753-769 (2015)
- [11] S. Elliott, "Active noise and vibration control in vehicles". *Vehicle Noise and Vibration Refinement*, 235-251. Elsevier (2010)
- [12] S. Dyke, B. Spencer Jr, P. Quast, D. Kaspari Jr, M. Sain, "Implementation of an active mass driver using acceleration feedback control". *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, **11**(5), 305-323 (1996)
- [13] J.N. Juang, M. Phan, "Robust controller designs for second order dynamic systems -a virtual passive approach". *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **15**(5), 1192-1198 (1992)
- [14] S.N. Mahmoodi, M.J. Craft, S.C. Southward, M. Ahmadian, "Active vibration control using optimized modified acceleration feedback with adaptive line enhancer for frequency tracking". *Journal of Sound and Vibration*, **330**(7), 1300-1311 (2011)
- [15] M. Balas, "Feedback control of flexible systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, **23**(4), 673-679, (1978)
- [16] D. Halim, S. R. Moheimani. "An optimization approach to optimal placement of collocated piezoelectric actuators and sensors on a thin plate". *Mechatronics*, **13**(1), 27-47 (2003)
- [17] I. Bruant, L. Proslier, "Optimal location of actuators and sensors in active vibration control". *Journal of intelligent material systems and structures*, **16**(3), 197-206, (2005)
- [18] I. Bruant, L. Gallimard, S. Nikoukar, "Optimal piezoelectric actuator and sensor location for active vibration control, using genetic algorithm". *Journal of Sound and Vibration*, **329**(10), 1615-1635 (2010)
- [19] Ambrosio, F. Resta, F. Ripamonti, "An H2 norm approach for the actuator and sensor placement in vibration control of a smart structure". *Smart Materials and Structures*, **21**(12), 125016 (2012)
- [20] F.R. Masch, R.L. Hecker, "Atenuación de la interacción ruido dinámica vía selección de posiciones de sensores en un control activo de vibraciones mediante realimentación de aceleración". XVI CIBIM, Concepción, Chile, (2024)
- [21] F.R. Masch, R.L. Hecker, F. Capraro, "Modal filter design reducing the impact of sensors noise on the filter outputs", *Mechanical Systems and Signal Processing*, **156**, (2021)
- [22] A. Preumont, *Vibration Control of Active Structures: An Introduction, Solid mechanics and its applications*, ISSN 0925-0042 (2002)