



## Determinación de la profundidad de rebaje óptima para reductoras planetarias

## Determination of the optimum depth of relief for planetary gear reducers

David Guerra, José I. Pedrero, Miguel Pleguezuelos, Miryam B. Sánchez

Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED)

Grupo de Investigación de Ingeniería Mecánica

Juan del Rosal 12, 28040 Madrid, España

*(Recibido 13 de febrero de 2025, para publicación 4 de marzo de 2025)*

**Resumen** – En engranajes de transmisión de potencia, las deformaciones de los dientes inducidas por la carga provocan un adelanto del inicio del contacto y un retardo en la finalización del mismo. Ello revela la existencia de un impacto de inicio de engrane y de un empuje de finalización. Ambos contactos se producen fuera de la línea de presión y, por tanto, entre puntos no conjugados de los perfiles, lo que influye negativamente en la suavidad y continuidad del engrane. Sin embargo, no son ambos igualmente nocivos, pues el impacto de inicio supone la presencia de un choque entre la base del diente conductor y la cabeza del diente conducido, que es origen de sobrecarga dinámica, ruido y vibraciones. Para evitar el impacto de inicio se puede introducir un rebaje de punta en la rueda conducida, lo que retrasa el inicio del contacto, tanto más cuanto más profundo sea el rebaje. La profundidad ideal es la que desplaza el punto de inicio de contacto efectivo al punto teórico, pues profundidades menores reducen, pero no eliminan del todo, el impacto de inicio, y profundidades mayores, aunque lo eliminan por completo, reducen el intervalo de contacto y, por tanto, el grado de recubrimiento. Lo anterior plantea un problema en el caso de engranajes planetarios debido a que la profundidad de rebaje ideal –también llamada profundidad ajustada– en el engrane planeta-corona no tiene por qué ser la misma que en el engrane planeta-sol. En el caso de una etapa multiplicadora, como las de los aerogeneradores, el par entra por el porta-planetas y el planeta es la rueda conductora en ambos engranes, con el anillo y con el sol, de manera que, como los rebajes se han de aplicar en las ruedas conducidas –el anillo y el sol–, se pueden practicar con la profundidad requerida en cada caso. En cambio, en etapas planetarias reductoras, muy frecuentes en vehículos eléctricos con motor en rueda, el rebaje se ha de aplicar al planeta, y la profundidad de rebaje se puede ajustar, a lo sumo, para uno de los engranes, pero no para los dos. En este trabajo se presenta un estudio de la influencia de la profundidad de rebaje del planeta en etapas reductoras de engranajes planetarios rectos, resultado del cual se establece una propuesta de profundidad de rebaje óptima, entendiendo por tal la que hace mínima la amplitud pico-pico del error de transmisión, y por lo tanto la sobrecarga dinámica inducida.

**Palabras clave** – Engranajes planetarios, error de transmisión, carga dinámica, rebaje de perfil.

**Abstract** – In geared power transmission, load-induced tooth deformations cause an earlier start of contact and a delayed end of contact. This shows the existence of a mesh-in impact and a mesh-out push. Both contacts occur outside the pressure line and therefore between non-conjugate points of the profiles, which negatively influences the smoothness and continuity of the meshing. However, they are not both equally harmful, because the mesh-in impact involves the presence of a shock between the root of the driving tooth and the tip of the driven tooth, which causes dynamic overload, noise and vibrations. To avoid the mesh-in impact, a tip relief can be applied in the driven gear teeth, which delays the start of contact, the deeper the relief the more so. The ideal depth is the one that shifts the effective inner point of contact to the theoretical location, since smaller depths reduce, but do not eliminate, the mesh-in impact, and greater depths, although they eliminate it completely, reduce the contact interval and, therefore, the contact ratio. This poses a problem in the case of planetary gears because the ideal depth of relief –also called adjusted depth– in the planet-ring gear does not have to be the same that as in the planet-sun gear. In the case of a multiplier stage, such as those in wind turbines, the input torque is applied to the planet carrier and the planet is the driving gear in both gears, planet-ring and planet-sun, so that, as the reliefs have to be applied in the driven wheels –the ring and the sun–, they can be made with the required depth in each case. On

the contrary, in planetary reducer stages, very frequent in electric vehicles with in-wheel motors, the relief has to be applied to the planet, and the depth of relief can be adjusted, at most, for one of the gears, but not for both. This work presents a study of the influence of the depth of relief of the planet in reducer stages of spur planetary gears, because of which a proposal for an optimal depth of relief is established, understood as the one that minimizes the peak-to-peak amplitude of transmission error, and therefore the induced dynamic load.

**Keywords** – Planetary gears, transmission error, dynamic load, profile relief.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los engranajes planetarios proporcionan altas densidades de potencia y compactos diseños gracias a la transmisión de la potencia a través de múltiples ramas [1], por lo general entre 3 y 6. Cada rama está formada por un engranaje de dentado exterior (el planeta) que engrana simultáneamente con otro exterior (el sol) y uno interior (el anillo). Los planetas están todos conectados por una estructura rígida, llamada portaplanetas [2]. Normalmente, los planetas están simétricamente distribuidos alrededor del sol (o de su eje de rotación) [3] a fin de equilibrar los esfuerzos sobre el eje, lo que disminuye la sensibilidad a los errores de fabricación [2].

Cuando se fija el anillo, y se deja girar al portaplanetas, se obtienen relaciones de transmisión altas, lo que, unido a las altas densidades de potencia, se traduce en elevados pares de entrada, que se transmiten a través de las distintas ramas. Sin embargo, el par no se distribuye uniformemente entre los distintos planetas, debido a errores de fabricación y montaje, holguras, etc., así como a la distinta posición relativa de engrane de cada planeta, en el caso de configuraciones asíncronas [4].

Muchas han sido las investigaciones realizadas sobre la distribución de carga en engranajes planetarios hasta el día de hoy [5-15], en las que se han tomado en consideración distintos tipos de errores de fabricación y montaje, y estudiado su relación con el comportamiento dinámico de la transmisión. Más recientemente, el interés de los investigadores se ha orientado más hacia el estudio de la dinámica de las etapas planetarias, desde la estimación la variación de la rigidez de engrane con el tiempo [16], la influencia del desfase entre planetas [17], de errores de fabricación [18], de errores de montaje [19], de la configuración geométrica [20, 21] o de errores en el posicionamiento de los ejes [22].

En la mayor parte de estos trabajos [5-6, 9-10, 17-21], la realización de todos estos cálculos se ha llevado a cabo mediante la utilización de técnicas computacionales basadas en el Método de los Elementos Finitos. Pero todas estas técnicas requieren un considerable esfuerzo de preparación y un elevado coste computacional, lo que acarrea problemas no pequeños cuando se han de realizar estudios repetitivos con distintas configuraciones geométricas y, por supuesto, en distintas posiciones de engrane. Para hacer frente a estos inconvenientes, los autores [4, 22] han desarrollado un modelo de comportamiento dinámico de engranajes planetarios rectos, que permite simular el reparto de carga, la rigidez de engrane y el error de transmisión, incluyendo el caso de dientes con modificación de perfil. Está basado en los modelos desarrollados previamente para engranajes de dentado exterior [23, 24] y de dentado interior [25], que a su vez se obtuvieron a partir del principio de mínimo potencial de deformación [26-30]. La rigidez de cada planeta en cada posición de engrane se calcula como la suma de la rigidez de cada una de las parejas de dientes en contacto en esa posición, incluyendo las parejas en contacto de ambos engranes, planeta-sol (PS) y planeta-anillo (PA), considerando, naturalmente, que el punto de contacto es diferente en cada pareja. Y lo mismo con los restantes planetas, teniendo en cuenta también que la posición relativa de engrane de cada uno es diferente si se trata de una configuración asíncrona [4].

El rebaje de punta se utiliza para retrasar el punto de inicio de engrane (y adelantar el de finalización de engrane) y evitar el choque que se produce al inicio (y el empuje que se produce al final) debido al retraso que induce la carga, y las deformaciones que provoca en los dientes, en la rueda conducida. El rebaje ideal, denominado rebaje ajustado, es el que retrasa el punto de inicio de engrane hasta su posición teórica (la que tendría en ausencia de carga); de esta manera se evita el impacto de inicio (que no se evitaría del todo con un rebaje menos profundo) sin reducir el grado de recubrimiento (que se reduciría si el rebaje es más profundo). Y lo mismo, o lo simétrico, cabe decir del adelanto del punto de finalización hasta su posición

teórica. Sin embargo, ambos impactos no son igualmente peligrosos. El empuje de salida provoca una aceleración en la rueda conducida, lo que genera una cierta carga dinámica y una cierta vibración. En cambio, el impacto de entrada supone un choque entre la cabeza del diente conducido y la base del diente conductor, lo que genera mayores niveles de carga dinámica y vibración, además de constituir una fuente importante de ruido.

En una transmisión simple, formada por un par de engranajes, es posible hacer frente a ambos problemas, pues el impacto de entrada se controla con el rebaje en la cabeza de la rueda conducida, y el empuje de salida con el rebaje en la rueda conductora. Sin embargo, en el caso de un engranaje planetario, el rebaje del diente del planeta es único, y puede ser ajustado para el engrane PS o para el engrane PA, pero no para los dos. En etapas planetarias multiplicadoras (como las de un aerogenerador) este inconveniente no es grave, pues el planeta es la rueda conductora en ambos engranes, PS y PA, lo que significa que no será posible eliminar el empuje de salida, pero eso tiene una importancia relativamente pequeña, como se acaba de discutir. En cambio, en las etapas reductoras (frecuentes en vehículos eléctricos con motor en rueda) el planeta es la rueda conducida, y consecuentemente el rebaje de entrada no se puede ajustar para ambos engranes. En efecto, si se ajusta el rebaje para el engrane, PS o PA, que requiera menos profundidad, el otro engrane no verá eliminado por completo el impacto de entrada; si se ajusta para el que requiere mayor profundidad, el otro verá reducido su grado de recubrimiento, lo que aumentará su carga y su deformación, por lo que se reducirá su capacidad de carga y su rigidez.

Sin embargo, no hay razones para aventurar, a priori, cuál de las dos es mejor solución: si reducir el grado de recubrimiento o someter las ruedas a un impacto de inicio. De hecho, ni siquiera se puede afirmar que una de las dos vaya a ser la óptima. En este trabajo se estudia el comportamiento dinámico de dos casos de reductoras planetarias con configuración asíncrona, haciendo variar la profundidad de rebaje en la cabeza del planeta desde el valor ajustado para el engrane PS hasta el valor ajustado para el engrane PA, considerando como criterio de optimización la minimización de la amplitud pico-pico del error de transmisión (PPTE), que determina el nivel de aceleración inducida en la rueda conducida, y por tanto el nivel de carga dinámica inducida. Para el estudio se emplea el modelo analítico desarrollado en [22], que permite la realización de estudios repetitivos con pequeño tiempo de preparación y coste computacional insignificante.

## 2. MODELO DE COMPORTAMIENTO DINÁMICO DE ENGRANAJES PLANETARIOS

Según el modelo de rigidez de engrane, reparto de carga y error de transmisión desarrollado en [22], el error de transmisión  $\delta$  se puede expresar de la siguiente manera:

$$\delta = \frac{F_T + \sum_j K_{Mj}(\delta_{Gj} + \delta_{Rj})}{\sum_j K_{Mj}} \quad (1)$$

donde  $F_T$  es la fuerza transmitida,  $K_M$  es la rigidez de la pareja de dientes,  $\delta_G$  es la distancia de separación,  $\delta_R$  es la profundidad de rebaje, y los sumatorios están extendidos a todas las parejas de dientes en contacto en la posición considerada, incluyendo tanto las parejas del engrane PS como las del engrane PA. Salvo la fuerza transmitida, que se mantiene constante a lo largo del ciclo de engrane, todos los demás parámetros de la ec. (1), incluido el error de transmisión, dependen del punto de contacto, que será diferente en cada pareja. Para caracterizar el punto de contacto se utiliza el parámetro  $\xi$ , que se define como:

$$\xi = \frac{Z_1}{2\pi} \sqrt{\frac{r_{c1}^2}{r_{b1}^2} - 1} \quad (2)$$

en donde  $Z_1$  es el número de dientes de la rueda conductora,  $r_{c1}$  el radio del punto de contacto sobre el perfil de la rueda conductora y  $r_{b1}$  el radio de base de la misma rueda. Se puede apreciar que  $\xi$  varía linealmente a lo largo de la línea de presión, por lo que también define cada punto de dicha línea. Puesto que el parámetro  $\xi$  de cada pareja de dientes es diferente, la ec. (1) se puede escribir:

$$\delta(\xi_0) = \frac{F_T + \sum_j K_M(\xi_j) (\delta_G(\xi_j) + \delta_R(\xi_j))}{\sum_j K_M(\xi_j)} \quad (3)$$

donde  $\xi_0$  es el parámetro correspondiente a una pareja de dientes que se toma como pareja de referencia.

La rigidez de la pareja de dientes se puede aproximar mediante la ecuación:

$$\begin{aligned} K_M(\xi) &= K_{M\max}^* b \cos(b_0(\xi_{inn} - \xi_m)) & \text{para } \xi_{\min} \leq \xi \leq \xi_{inn} \\ K_M(\xi) &= K_{M\max}^* b \cos(b_0(\xi - \xi_m)) & \text{para } \xi_{inn} \leq \xi \leq \xi_{out} \\ K_M(\xi) &= K_{M\max}^* b \cos(b_0(\xi_{out} - \xi_m)) & \text{para } \xi_{out} \leq \xi \leq \xi_{\max} \end{aligned} \quad (4)$$

ecuación que es válida tanto para el engrane PS como para el PA, si bien tanto los valores de la rigidez máxima por unidad de ancho de cara  $K_{M\max}^*$  como los coeficientes  $b_0$  y  $\xi_m$  se han de calcular separadamente, mediante los procedimientos que se describen en [26-28] para engranajes exteriores (engrane PS) y en [29, 30] para interiores (engrane PA).  $b$  es el ancho de cara, que por lo general es el mismo para todas las ruedas.  $\xi_{inn}$  y  $\xi_{out}$  son los límites del intervalo de contacto teórico y vienen determinados por las intersecciones de las circunferencias de cabeza con la línea de presión. Sus valores, obviamente, son también diferentes para los engranes PS y PA.

La distancia de separación  $\delta_G$  es la distancia, medida en la línea de presión, que habría de avanzar un diente de la rueda conductora para tocar con su base la cabeza del diente de la rueda conducida con el que ha de engranar (o también la distancia que habría de avanzar un diente de la rueda conducida para separarse de la cabeza del diente de la rueda conductora con la que deja de engranar).  $\delta_G$  es una relación puramente geométrica, que de manera muy aproximada se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \delta_G(\xi) &= \left(\frac{2\pi}{Z_1}\right)^2 C_{p-inn} r_{b1}(\xi_{inn} - \xi)^2 & \text{para } \xi_{\min} \leq \xi \leq \xi_{inn} \\ \delta_G(\xi) &= 0 & \text{para } \xi_{inn} \leq \xi \leq \xi_{out} \\ \delta_G(\xi) &= \left(\frac{2\pi}{Z_1}\right)^2 C_{p-out} r_{b1}(\xi - \xi_{out})^2 & \text{para } \xi_{out} \leq \xi \leq \xi_{\max} \end{aligned} \quad (5)$$

Los coeficientes  $C_{p-inn}$  y  $C_{p-out}$ , cuyos valores son también diferentes para los engranes PS y PA, se calculan como se indica en [23] para engranajes exteriores y [25] para interiores.  $\xi_{\min}$  y  $\xi_{\max}$  son los límites del intervalo de contacto extendido, que viene determinados por los puntos en que la distancia de separación es igual a la distancia de retraso de la rueda conducida, es decir, al error de transmisión, y por tanto:

$$\delta_G(\xi_{\min/\max}) = \delta(\xi_{\min/\max}) \quad (6)$$

Por último,  $\delta_R$  es la profundidad de rebaje, que se extiende a lo largo de un intervalo del perfil del diente, y por tanto del intervalo de engrane. Para rebajes lineales o parabólicos, la profundidad de rebaje se expresa como:

$$\begin{aligned} \delta_R(\xi) &= \Delta_{R-inn} & \text{para } \xi_{\min} \leq \xi \leq \xi_{inn} \\ \delta_R(\xi) &= \Delta_{R-inn} \left(1 - \frac{\xi - \xi_{inn}}{\Delta\xi_{R-inn}}\right)^n & \text{para } \xi_{inn} \leq \xi \leq \xi_{inn} + \Delta\xi_{R-inn} \\ \delta_R(\xi) &= 0 & \text{para } \xi_{inn} + \Delta\xi_{R-inn} \leq \xi \leq \xi_{out} - \Delta\xi_{R-out} \\ \delta_R(\xi) &= \Delta_{R-out} \left(1 - \frac{\xi_{out} - \xi}{\Delta\xi_{R-out}}\right)^n & \text{para } \xi_{out} - \Delta\xi_{R-out} \leq \xi \leq \xi_{out} \\ \delta_R(\xi) &= \Delta_{R-out} & \text{para } \xi_{out} \leq \xi \leq \xi_{\max} \end{aligned} \quad (7)$$

donde  $\Delta_{R-inn}$  y  $\Delta_{R-out}$  son las profundidades de rebaje en los puntos de cabeza de las ruedas conducida y conductora, respectivamente,  $\Delta\xi_{R-inn}$  y  $\Delta\xi_{R-out}$  las correspondientes longitudes de rebaje, y  $n$  toma los valores 1 y 2 para rebaje lineal y parabólico, respectivamente. La Fig. 1 presenta la geometría del rebaje de

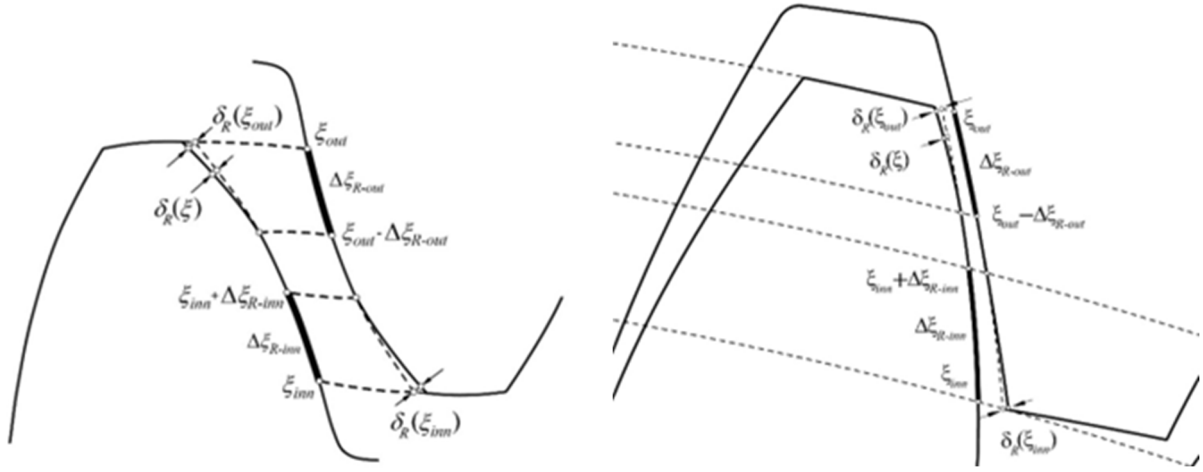


Fig. 1. Geometría de la modificación del perfil en engranajes exteriores (izquierda) e interiores (derecha).

engranajes exteriores e interiores. En el caso de reductora planetaria, en que el planeta es la rueda conducida en ambos engranes,  $\Delta R_{-inn}$  y  $\Delta\xi_{R-inn}$  son los correspondientes al planeta tanto en el engrane PS como en el engrane PA;  $\Delta R_{-out}$  y  $\Delta\xi_{R-out}$  son los correspondientes al sol en el engrane PS, y los correspondientes al anillo en el engrane PA. En este caso de dientes con rebaje, los límites del intervalo efectivo de contacto vienen dados por los puntos que verifican la ecuación:

$$\delta_G(\xi_{min/max}) + \delta_R(\xi_{min/max}) = \delta(\xi_{min/max}) \quad (8)$$

Las ecs. (4-8) proporcionan los valores de los parámetros necesarios para calcular el error de transmisión con la ec. (3). Faltaría únicamente relacionar los parámetros de contacto  $\xi$  de todas las parejas de dientes en contacto en cada instante (o posición de engrane). De la propia definición de  $\xi$  se deduce, para un determinado engrane, sea PS o PA, la diferencia entre los valores de  $\xi$  correspondientes a una pareja de dientes  $j$  y a la anterior  $j + 1$  es:

$$\xi_{j+1} = \xi_j + 1 \quad (9)$$

La relación entre el punto de contacto de una pareja PS y una pareja PA del mismo planeta es:

$$\xi_{PS} = \xi_{PR} - \left\{ \frac{Z_P}{2} \left( 1 - \frac{\alpha'_{t-PS} - \alpha'_{t-PA}}{\pi} \right) \right\} \quad (10)$$

expresión en la que  $\alpha'_t$  representa el ángulo de presión de operación y  $Z_P$  el número de dientes del planeta. Por último, la relación entre el parámetro de contacto de una pareja PA del planeta ( $k$ ) y del planeta ( $k + 1$ ) es:

$$\begin{aligned} \xi_{PA}^{(k)} &= \xi_{PA}^{(k+1)} + \frac{1}{N_p} \quad \text{para transmisiones asíncronas} \\ \xi_{PA}^{(k)} &= \xi_{PA}^{(k+1)} \quad \text{para transmisiones síncronas} \end{aligned} \quad (11)$$

donde  $N_p$  es el número de planetas. Combinando las ecs. (9-11) es posible conocer los puntos de contacto de todas las parejas de dientes de ambos engranes, PS y PA, de todos los planetas. Obviamente, estarán en contacto aquellas que cumplan la condición:

$$\xi_{min-PA/PS} \leq \xi_{PA/PS}^{(k)} \leq \xi_{max-PA/PS} \quad (12)$$

Tabla 1. Datos de las reductoras planetarias.

	Símbolo	Unidades	RVE23/11	RTP1000/04
Módulo	$m$	mm	1,00	1,00
Ángulo de presión	$\alpha_n$	°	20,00	20,00
Altura de cabeza herramienta	$mh_{a0}$	mm	1,25	1,25
Radio de acuerdo herramienta	$mr_f$	mm	0,30	0,3
Número de dientes	$Z_S/Z_P/Z_A$		22 / 98 / 218	26 / 29 / 84
Factor de desplazamiento	$x_S/x_P/x_A$		0,00 / 0,00 / 0,00	0,00 / 0,00 / 0,00
Radio de cabeza	$r_{oS}/r_{oP}/r_{oA}$	mm	12,00 / 49,60 / 108,00	13,60 / 15,70 / 41,45
Ancho de cara	$b$	mm	22,00	30,00
Distancia entre ejes	$C$	mm	60,00	27,50
Número de planetas	$N_P$		3	5
Par torsor de entrada (sol)	$T_S$	N·m	23,00	1000,00
Relación de transmisión	$u$		10,91	4,23
Grado de recubrimiento	$\varepsilon_{\alpha-PS}/\varepsilon_{\alpha-PA}$		1,36 / 1,60	1,48 / 1,54

### 3. INFLUENCIA DE LA PROFUNDIDAD DE REBAJE EN EL ERROR DE TRANSMISIÓN

Con el modelo esbozado en el epígrafe anterior y las ecuaciones presentadas, se ha estudiado la variación de error de transmisión con la profundidad y longitud de rebaje, para dos reductoras planetarias, cuyos datos se recogen en la Tabla 1. La primera es una reductora para vehículo eléctrico con motor en rueda, de pequeño tamaño y elevada relación de transmisión (10,91); la segunda es una reductora de alto par (4230 N·m a la salida) para transmisión de potencia.

Como se indicó más arriba, las deformaciones de los dientes producidas por la carga inducen un retraso en la rueda conducida, es decir, una desviación de su posición respecto de la posición ideal con acción conjugada, que se conoce como error de transmisión. Ello tiene dos consecuencias importantes en la dinámica de la transmisión. En primer lugar, si el retraso en la rueda conducida no es constante a lo largo del ciclo de engrane, y no lo es puesto que la rigidez de engrane es diferente en cada punto de contacto, se tendrá que, para velocidad de entrada constante, la velocidad de salida no será constante. Y si la velocidad de salida no es constante, la rueda de salida estará sometida a aceleraciones y deceleraciones periódicas, que son fuente de carga dinámica, que reduce la resistencia de los dientes. Por otro lado, el retraso de la rueda conducida, o lo que es lo mismo, el adelanto relativo de la rueda conductora hace que la pareja de dientes que inicia su contacto se encuentre antes de la posición de inicio de contacto ideal, produciéndose un choque de inicio de contacto, que es fuente de ruido y vibraciones.

Si la carga dinámica inducida se debe a la variación de la velocidad de la rueda de salida, cuanto menor sea esta variación de velocidad, menor será la carga inducida. Y como la variación de la velocidad de salida es proporcional al error de transmisión, cuanto menor sea la variación del error de transmisión, menor será la carga dinámica. Por consiguiente, el parámetro a controlar no es tanto el valor medio del error de transmisión, que no tiene ninguna influencia en la carga dinámica, como el valor de amplitud pico-pico, que está directamente relacionado con la variación de velocidad. En consecuencia, un buen criterio de diseño será reducir la amplitud PPTE tanto como sea posible.

En cuanto al impacto de inicio de engrane, se puede evitar practicando un rebaje en la cabeza del diente conducido, de manera que el material eliminado evita que se produzca el choque en el punto de inicio de contacto adelantado. De manera similar, un rebaje en la cabeza del diente conductor evita el empuje de finalización de engrane, que, aunque menos nocivo que el impacto de inicio, también es fuente de carga

dinámica y vibraciones. Sin embargo, se ha de tener en cuenta que una profundidad de rebaje excesiva provocaría un inicio de contacto muy retrasado (o una finalización muy adelantada), lo que reduciría el grado de recubrimiento, que a su vez, como es sabido, reduce la resistencia y la capacidad de carga. El rebaje ideal, llamado rebaje ajustado, es el que desplaza el punto de inicio o finalización de contacto a su posición teórica, de manera que no se reduce el grado de recubrimiento. Para ello, el rebaje a la entrada del engrane (en la cabeza de la rueda conducida) tiene que ser igual a la deformación –es decir, al error de transmisión– en el punto de inicio de contacto teórico, y el rebaje a la salida del engrane (en la cabeza de la rueda conductora) tiene que ser igual al error de transmisión en el punto de finalización de contacto teórico.

El problema que se presenta en las reductoras planetarias epicicloidales es que el planeta es la rueda conducida tanto en el engrane PS como en el PA, pero el inicio del contacto teórico en ambos engranes no es simultáneo, y por tanto no hay razón para que el error de transmisión sea igual en ambos instantes. Consecuentemente, el rebaje que se practique en los dientes del planeta podrá ser ajustado para el engrane PS o PA (o ninguno de los dos), pero no para ambos.

De acuerdo con lo anterior, se plantea a continuación el estudio del rebaje óptimo en el planeta, que proporcione un valor mínimo de la amplitud PPTE. Para ello, se supondrá que la profundidad de rebaje es ajustada en la cabeza del sol y del anillo, y se hará variar la del planeta entre los valores ajustados de ambos engranes PS y PA.

### 3.1. Reductora para vehículo eléctrico

La Fig. 2 representa las curvas de error de transmisión de la reductora RVE23/11 de la Tabla 1, con rebaje ajustado en sol (que resulta ser de 0,30 micras) y el anillo (0,32 micras), para dos profundidades de rebaje en el planeta: ajustada para el engrane PS (0,39 micras) y ajustada para el engrane PA (0,33 micras). En todos los casos, la longitud de rebaje de las tres ruedas se ha hecho  $\Delta\xi_R = 0,2$ .

Se aprecia que el error de transmisión en términos absolutos –o, si se prefiere, su valor medio– es mayor para el rebaje del planeta ajustado al engrane PS que para el ajustado al engrane PA. Este resultado era esperable pues la profundidad del rebaje ajustado PS es mayor que la del PA, y, cuanto mayor es la profundidad de rebaje, menor es la rigidez del diente, por lo que mayor será la deformación y, por tanto, el error de transmisión.

Pero, como se ha comentado, el valor medio del error de transmisión no es relevante; lo que afecta realmente al comportamiento dinámico de la transmisión es la amplitud de variación. En la Fig. 3 se ha

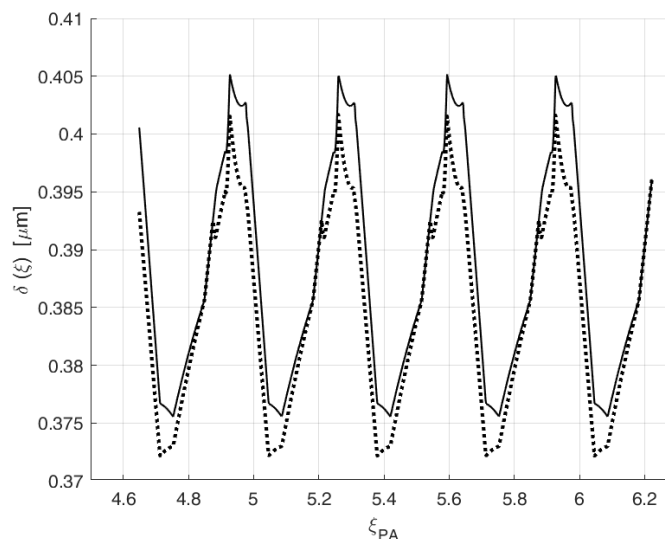


Fig. 2. Curvas de error de transmisión para reductora RVE23/11, con rebaje en planeta ajustado para el engrane PS (línea continua) y ajustado para el engrane PA (línea de puntos).

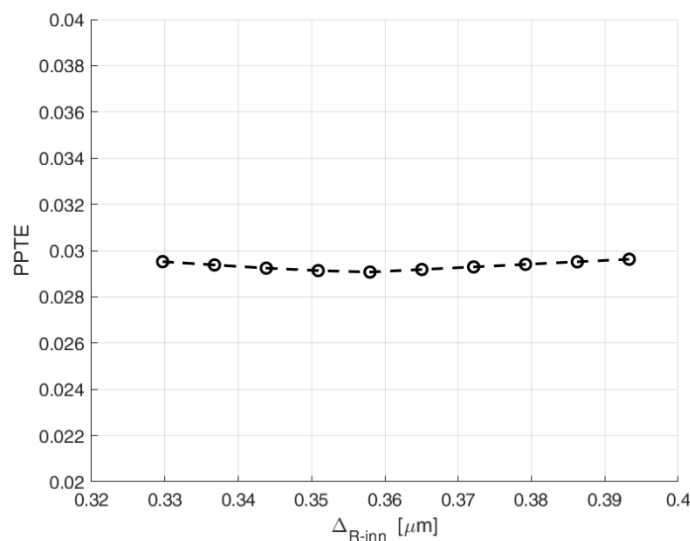


Fig. 3. Variación de la amplitud pico-pico del error de transmisión con la profundidad de rebaje en el planeta, para reductora RVE23/11.

representado la variación de la amplitud PPTe con la profundidad de rebaje en el planeta, para valores de ésta entre la ajustada PA y la ajustada PS. Se puede apreciar que, en este caso, la variación de la amplitud PPTe es insignificante, lo que no debe resultar extraño a la vista de que el rango de profundidades de rebaje considerado (de 0,33 a 0,39 micras, algo más de media décima de micra) es muy reducido.

### 3.2. Reductora para transmisión de potencia

Mucho más significativa es la deformación de los dientes en el caso de la reductora RTP1000/04, cuyo par de entrada es más de 40 veces mayor que el anterior. La Fig. 4 representa las curvas de error de transmisión con rebaje ajustado en sol (5,50 micras) y el anillo (5,50 micras), y dos rebajes en el planeta: el ajustado para el engrane PS (5,70 micras) y el ajustado para el engrane PA (5,50 micras). Como en el caso anterior, la longitud de rebaje de las tres ruedas es  $\Delta\xi_R = 0,2$ .

Como antes, el valor medio del error de transmisión es mayor para el rebaje del planeta ajustado al engrane PS, que es el mayor de los dos. Sin embargo, en este caso, la amplitud PPTe disminuye con la profundidad de rebaje, y por tanto es menor para el rebaje ajustado PS, como se aprecia en la Fig. 5.

De la observación de las Figs. 2-5 se puede extraer otra conclusión. Si se tiene en cuenta que la reductora RTP1000/04 tiene 5 planetas, por 3 de la RVE23/11, y que su ancho de cara es un 30% superior, aunque el par transmitido es 40 veces mayor, las deformaciones deberían ser del orden de  $40/1,3 \cdot 1,66 = 18,5$  veces las deformaciones de la otra reductora. Si se toman los valores medios del error de transmisión de una y otra, se obtiene una relación de  $6,66/0,39 = 17,1$ , lo que es coherente, puesto que esta relación, al depender de los grados de recubrimiento, del desfase de los planetas y de las profundidades de rebaje, no ha de ser exactamente igual a la primera, aunque haya de guardar cierta semejanza, como así sucede. Sin embargo, las amplitudes PPTe de ambos casos no guardan esa misma relación sino que, tomando valores medios, sería de  $0,105/0,029 = 3,6$ .

Aunque a primera vista parezca chocante, este resultado es razonable. En un engranaje planetario con configuración asínrona, la posición relativa de engrane se repite cada  $\Delta\xi = 1/N_p$ . Consecuentemente, cuanto mayor es el número de planetas, menor es la longitud de ese intervalo, y por tanto mayor será el número de parejas de dientes que engrana en puntos del intervalo de rebaje. Es sabido que esto aumenta de manera muy ostensible el valor mínimo del error de transmisión, pero influye mucho menos en el valor



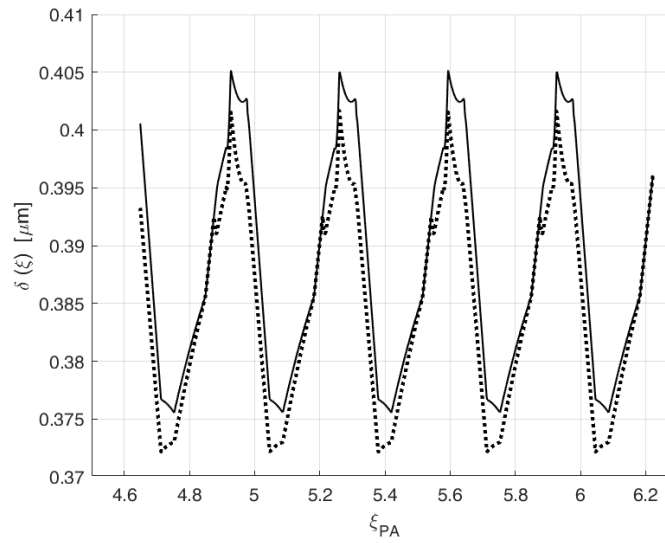


Fig. 4. Curvas de error de transmisión para reductora RTP1000/04, con rebaje en planeta ajustado para el engrane PS (línea continua) y ajustado para el engrane PA (línea de puntos).

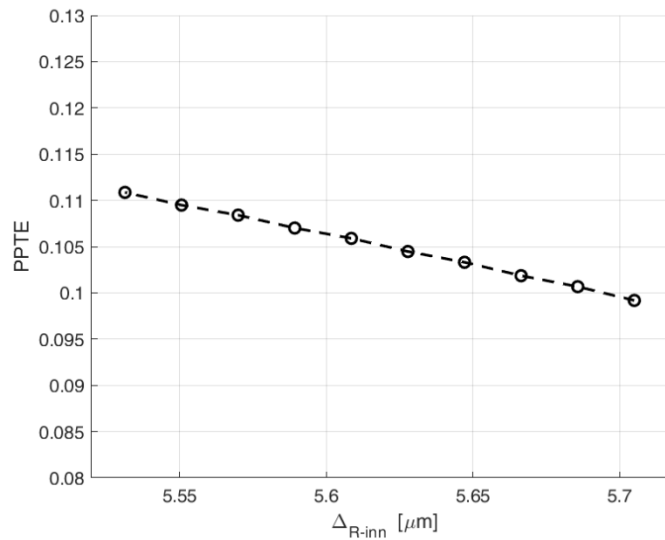


Fig. 5. Variación de la amplitud pico-pico del error de transmisión con la profundidad de rebaje en el planeta, para reductora RTP1000/04.

máximo [24, 25], lo que significa que la amplitud PPTE se reduce. Esto hace que, en este caso, las amplitudes PPTE de ambas reductoras estén en una relación mucho menor que los correspondientes pares de entrada por planeta y unidad de ancho de cara.

Este análisis lleva a la conclusión, además, de que la longitud de rebaje tiene también influencia en la amplitud PPTE, lo que se estudia en el siguiente apartado.

#### 4. INFLUENCIA DE LA LONGITUD DE REBAJE EN EL ERROR DE TRANSMISIÓN

Los resultados del apartado anterior se obtuvieron con una longitud de rebaje de  $\Delta\xi_R = 0,2$  en todas las ruedas (sol, anillo y planetas) en ambas reductoras. Ahora, el estudio se va a extender a los casos con  $\Delta\xi_R =$

0,1 y  $\Delta\xi_R = 0,3$ , manteniendo siempre iguales los rebajes de todas las ruedas.

#### 4.1. Reductora para vehículo eléctrico

La Fig. 6 representa las curvas de error de transmisión de la reductora RVE23/11 para las tres longitudes de rebaje mencionadas, con rebaje de 0,30 micras en el sol (ajustado), de 0,32 micras en el anillo (ajustado) y de 0,39 micras en los planetas (ajustado para el engrane PS). Se observa cómo el valor medio del error de transmisión aumenta con la longitud de rebaje –lo que es razonable puesto que disminuye la rigidez del diente–, pero el valor de la amplitud PPTE se reduce drásticamente. Incluso la forma de la curva se altera de manera significativa, presentándose el mínimo error de transmisión en el punto en que antes era máximo, y el máximo en puntos en los que antes tomaba un valor intermedio.

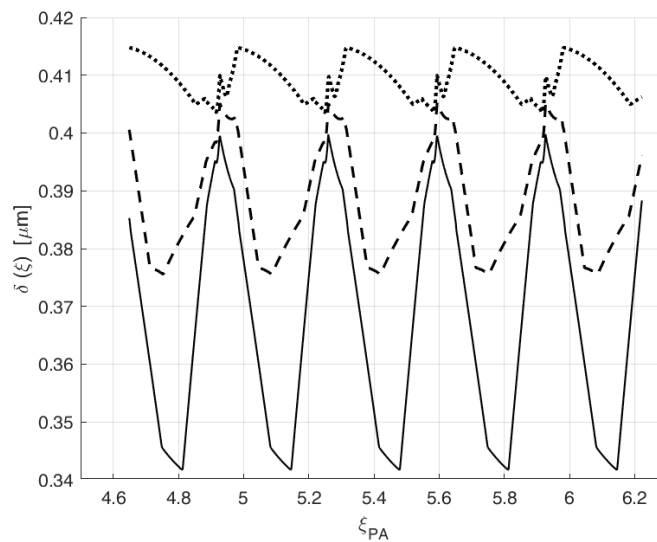


Fig. 6. Curvas de error de transmisión para reductora RVE23/11, con rebajes ajustados en sol y anillo, y ajustado para el engrane PS en planeta, para longitud de rebaje  $\Delta\xi_R = 0,1$  (línea continua),  $\Delta\xi_R = 0,2$  (línea de trazos) y  $\Delta\xi_R = 0,3$  (línea de puntos).

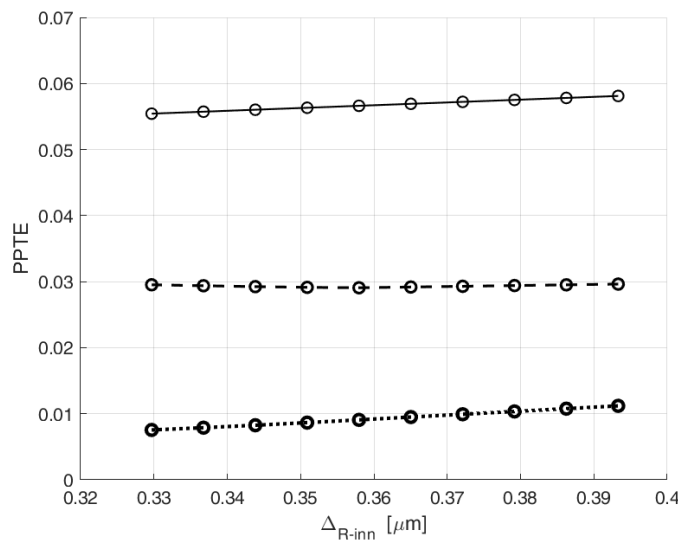


Fig. 7. Variación de la amplitud pico-pico del error de transmisión con la profundidad de rebaje en el planeta, para reductora RVE23/11, para longitud de rebaje  $\Delta\xi_R = 0,1$  (línea continua),  $\Delta\xi_R = 0,2$  (línea de trazos) y  $\Delta\xi_R = 0,3$  (línea de puntos).

La Fig. 7 muestra la variación de la amplitud PPTE con la profundidad de rebaje en el planeta (que se hace variar entre el valor ajustado para el engrane PR y el ajustado para el engrane PS), para las tres longitudes de rebaje consideradas. En los tres casos, la variación de la amplitud PPTE con la profundidad de rebaje es insignificante; sin embargo, la reducción de dicha amplitud con la longitud de rebaje es muy considerable.

#### 4.2. Reductora para transmisión de potencia

Las Figs. 8 y 9 representan las mismas curvas que las Figs. 6 y 7, para la reductora RTP1000/04. Los rebajes son, como los del caso anterior, ajustados en sol y anillo; en cambio, ahora, la profundidad de rebaje

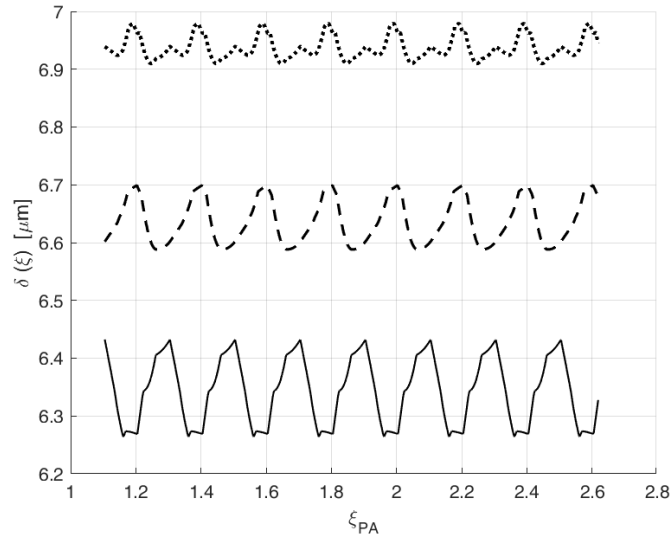


Fig. 8. Curvas de error de transmisión para reductora RTP1000/04, con rebajes ajustados en sol y anillo, y ajustado para el engrane PA en planeta, para longitud de rebaje  $\Delta\xi_R = 0,1$  (línea continua),  $\Delta\xi_R = 0,2$  (línea de trazos) y  $\Delta\xi_R = 0,3$  (línea de puntos).

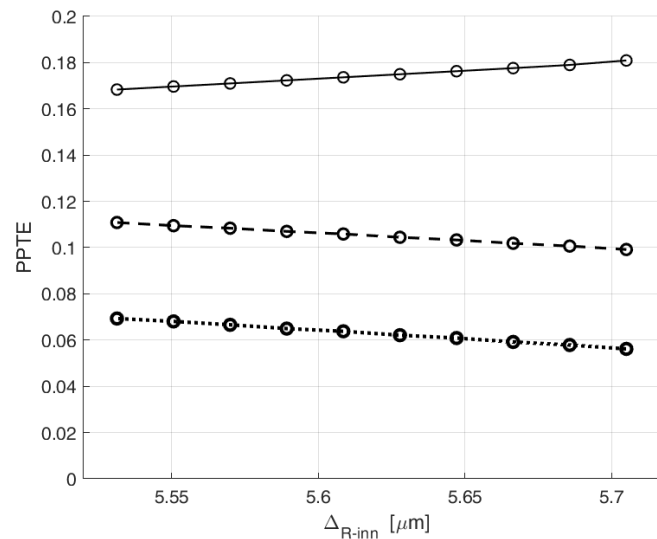


Fig. 9. Variación de la amplitud pico-pico del error de transmisión con la profundidad de rebaje en el planeta, para reductora RTP1000/04, para longitud de rebaje  $\Delta\xi_R = 0,1$  (línea continua),  $\Delta\xi_R = 0,2$  (línea de trazos) y  $\Delta\xi_R = 0,3$  (línea de puntos).

de los planetas es la ajustada para el engrane PA. En definitiva, en las tres ruedas la profundidad de rebaje es de 5,50 micras.

De la Fig. 8 se desprenden conclusiones parecidas a las de la Fig. 6. La forma de las curvas de error de transmisión cambia de manera notable, los máximos y los mínimos cambian de posición, el valor medio del error de transmisión aumenta con la longitud de rebaje, y la amplitud PPTE disminuye muy sensiblemente. En este caso, la reducción de la amplitud PPTE con la longitud de rebaje es más acusada cuanto mayor es la profundidad de rebaje, como se aprecia en la Fig. 9.

## 5. CONCLUSIONES

Se ha presentado un estudio de la influencia del rebaje de los dientes de los planetas en la amplitud pico-pico del error de transmisión, en reductoras planetarias epicicloides. Dado que en este tipo de transmisiones el planeta es la rueda conducida en ambos engranes, planeta-sol y planeta-anillo, la profundidad de rebaje en los dientes de los planetas no puede ser ajustada a ambos engranes simultáneamente, lo que hace pensar en la existencia de una profundidad de rebaje óptima, que minimice la amplitud del error de transmisión, y por consiguiente la carga dinámica inducida. Sin embargo, en contra de lo esperado, la profundidad de rebaje tiene una influencia muy poco significativa en la amplitud del error de transmisión. Y no sólo eso: esta tenue tendencia a crecer o decrecer con la profundidad de rebaje no siempre es la misma, llegando a darse el caso de que, para una misma reductora, para unas longitudes de rebaje la amplitud crece con la profundidad, y para otras decrece.

En cambio, se ha encontrado que la longitud de rebaje tiene una influencia mucho más significativa en la amplitud del error de transmisión, y con una tendencia continua a reducirla a medida que la longitud de rebaje aumenta. Se ha de tener en cuenta, no obstante, que una longitud de rebaje excesivamente grande puede reducir la rigidez de engrane tanto que haga necesaria una profundidad de rebaje mayor para evitar el impacto de inicio de engrane, lo que puede traducirse en una reducción de los grados de recubrimiento, que reduzcan la resistencia de los dientes y, por tanto, la capacidad de potencia de la transmisión.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Agencia Estatal de Investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación la financiación del proyecto de investigación PID2022-142632OB-I00 “Modelo para la simulación del reparto de carga y el error de transmisión de engranajes planetarios”.

## REFERENCIAS

- [1] Talbot, D., Kahraman, A., Singh, A., “An experimental investigation of the efficiency of planetary gear sets”, *Journal of Mechanical Design*, **134**, 0210037 (2012)
- [2] Talbot, D., Kahraman, A., “A methodology to predict power losses of planetary gear sets”, *Proceedings of the International Gear Conference, 2014*, 625–635 Lyon, France (2014)
- [3] Nutakor, C., Klodowsky, A., Sopanen J. *et al.*, “Planetary gear sets power loss modeling: application to wind turbines”, *Tribology International*, **105**, 42–54 (2017)
- [4] Pedrero, J.I., Pleguezuelos, M., Sánchez, M.B., “Influence of meshing stiffness on load distribution between planets of planetary gear drives”, *Mechanism and Machine Theory*, **170**, 104718 (2022)
- [5] Hidaka, T., Terauchi, Y., “Dynamic behavior of planetary gear – 1st Report: Load distribution in planetary gear”, *Bulletin JSME*, **19**, 690–698 (1976)
- [6] Seager, D. L., “Load sharing among planet gears”, *SAE Transactions*, **79**, 651-656 (1970)
- [7] Ma, P., Botman, M., “Load sharing in a planetary gear stage in the presence of gear errors and misalignments”, *Journal of Mechanical Transmissions and Automation in Design* **107**, 4–10 (1985)

- [8] Hayashi, T., Li, Y., Hayashi, I. *et al.*, “Measurement and some discussions on dynamic load sharing in planetary gears”, *Bulletin JSME*, **29**, 2290–2297 (1986)
- [9] Kahraman, A., “Load sharing characteristics of planetary transmissions”, *Mechanism and Machine Theory*, **29**, 1151–1165 (1994)
- [10] Kahraman, A., “Static load sharing characteristics of transmission planetary gear sets: model and experiment”, *SAE Technical Paper*, 1999-01-1050 (1999)
- [11] Kahraman, A., Vijayakar, S., “Effect of internal gear flexibility on the quasi-static behavior of a planetary gear set”, *Journal of Mechanical Design*, **123**, 408–415 (2001)
- [12] Bodas, A., Kahraman, A., “Influence of carrier and gear manufacturing errors on the static load sharing behavior of planetary gear sets”, *JSME International Journal, Series C*, **47**, 908–915 (2004)
- [13] Ligata, H., Kahraman, A., Singh, A., “An experimental study of the influence of manufacturing errors on the planetary gear stresses and planet load sharing”, *Journal of Mechanical Design* **130**, 041701 (2008)
- [14] Singh, A., “Application of a system level model to study the planetary load sharing behavior”, *Journal of Mechanical Design*, **127**, 469–476 (2005)
- [15] Singh, A., “Epicyclic load sharing map - Application as a design tool”, *AGMA Paper 11FTM05*, American Gear Manufacturers Association, Alexandria VA (2011)
- [16] Liang, X., Zuo, M. J., Patel, T.H., “Evaluating the time-varying mesh stiffness of a planetary gear set using the potential energy method”, *Journal of Mechanical Engineering Science*, **228**, 535–547 (2013)
- [17] Hammami, A., Santamaria, M., Fernandez del Rincon, A. *et al.*, “Load Sharing Behavior in Planetary Gear Set”, en: Haddar M. *et al.* (eds.) *Multiphysics Modelling and Simulation for Systems Design and Monitoring*, 459–468 (2015)
- [18] Iglesias, M., Fernandez del Rincon, A., de-Juan, A. *et al.*, “Planetary transmission load sharing: Manufacturing errors and system configuration study”, *Mechanism and Machine Theory*, **111**, 21-38 (2017)
- [19] Hu, Y., Talbot, D., Kahraman, A., “A load distribution model for planetary gear sets”, *Journal of Mechanical Design* **140**, 053302 (2018)
- [20] Sanchez-Espiga, J., Fernandez del Rincon, A., Iglesias, M., Viadero, F., “Influence of the phase in planetary gears load sharing and transmission error”, en: Uhl T. (ed.) *Advances in Mechanism and Machine Science*, 1059–1067 (2019)
- [21] Sanchez-Espiga, J., Fernandez del Rincon, A., Iglesias, M., Viadero, F., “Influence of errors in planetary transmissions load sharing under different mesh phasing”, *Mechanism and Machine Theory*, **153**, 104012 (2020)
- [22] Pedrero, J. I., Sánchez-Espiga, J., Sánchez, M.B. *et al.*, “Simulation and validation of the transmission error, meshing stiffness, and load sharing of planetary spur gear transmissions”, *Mechanism and Machine Theory*, **203**, 105800 (2024)
- [23] Sánchez, M.B., Pleguezuelos, M., Pedrero, J.I., “Influence of profile modifications on meshing stiffness, load sharing, and transmission error of involute spur gears”, *Mechanism and Machine Theory*, **139**, 506-525 (2019)
- [24] Pleguezuelos M., Sánchez M. B., Pedrero J. I., “Analytical model for meshing stiffness, load sharing, and transmission error for spur gears with profile modification under non-nominal load conditions”, *Applied Mathematical Modelling*, **97**, 344-365 (2021)
- [25] Pedrero, J.I., Sánchez, M.B., Pleguezuelos, M., “Analytical model of meshing stiffness, load sharing, and transmission error for internal spur gears with profile modification”, *Mechanism and Machine Theory*, **197**, 105650 (2024)
- [26] Pedrero, J.I., Pleguezuelos, M., Artés, M., Antona, J.A., “Load distribution model along the line of contact for involute external gears”, *Mechanism and Machine Theory*, **45**(5), 780-794 (2010)
- [27] Sánchez, M.B., Pleguezuelos, M., Pedrero, J.I., “Enhanced model of load distribution along the line of contact for non-standard involute external gears”, *Meccanica*, **48**(3), 527-543 (2013)
- [28] Sánchez, M.B., Pleguezuelos, M., Pedrero, J.I., “Approximate equations for the meshing stiffness and the load sharing ratio of spur gears including hertzian effects”, *Mechanism and Machine Theory*, **109**, 231-249 (2017)
- [29] Sánchez, M.B., Pleguezuelos, M., Pedrero, J.I., “Calculation of tooth bending strength and surface durability of internal spur gear drives”, *Mechanism and Machine Theory*, **95**, 102–113 (2016)

- [30] Sánchez, M.B., Pleguezuelos, M., Pedrero, J.I., “Strength model for bending and pitting calculations of internal spur gears”, *Mechanism and Machine Theory*, **133**, 691–705 (2019)