



## Síntesis dimensional óptima para mecanismo de dirección doble cuatro-barras mediante el uso de coordenadas naturales

### Optimal dimensional synthesis for four-bar double steering mechanism by using natural coordinates

Rafael Eduardo Villalba Gonzalez, Néider Nadid Romero Núñez, Gonzalo Guillermo Moreno Contreras

Universidad de Pamplona  
Grupo de Investigación en Ingeniería Mecánica (GIMUP)  
Km. 1 vía Bucaramanga, Pamplona Norte de Santander, Colombia

*(Recibido 14 de diciembre de 2024, para publicación 8 de abril de 2025)*

**Resumen** – En el presente trabajo se llevará a cabo la síntesis óptima de mecanismos doble cuatro barras, mediante el uso de coordenadas naturales iniciales de algunos pares cinemáticos. Este método novedoso se destaca por mantener la configuración inicial del mecanismo a lo largo de su rango de movimiento, lo que representa una ventaja sobre los métodos tradicionales, que no proporcionan esta información y se basan en las dimensiones que generalmente corresponden a las longitudes de los eslabones, complicando aún más el proceso de ensamblaje del mecanismo de dirección. Se aplican las coordenadas cartesianas de pares cinemáticos en posición neutra como variables de diseño para un mecanismo de dirección de doble cuatro barras. Se aplicará un algoritmo para resolver las ecuaciones de cinemática y determinar los ángulos óptimos, utilizando el software de código abierto Octave, lo que además permitirá realizar varias simulaciones y encontrar diversas soluciones de optimización del mecanismo de dirección. El enfoque de síntesis óptima ha sido aplicado con éxito a mecanismos de dirección de palanca central. Aunque este método resultó eficiente en la búsqueda de soluciones óptimas, es importante destacar que todas las soluciones cumplen la condición ideal de Ackermann aproximadamente; sin embargo, no todas las optimizaciones encontradas son aplicables, ya que exceden los ángulos de transmisión. Por lo tanto, su implementación dependerá de la aplicación o de los parámetros específicos del vehículo. Se concluye que la implementación de coordenadas cartesianas de pares cinemáticos en posición neutral, como variables de diseño para un mecanismo de dirección de doble cuatro barras fue exitosa, debido a que todas las optimizaciones dieron convergencia de la función objetivo de manera rápida y el cumplimiento aproximado de la condición de Ackermann.

**Palabras clave** – Mecanismos dirección, mecanismo doble cuatro-barras, síntesis dimensional óptima, coordenadas naturales.

**Abstract** – In the present work, the optimal synthesis of double four-bar mechanisms will be carried out by using the initial natural coordinates of some kinematic pairs. This novel method stands out for maintaining the initial configuration of the mechanism throughout its range of motion, which represents an advantage over traditional methods, which do not provide this information and are based on dimensions that generally correspond to the lengths of the links, further complicating the assembly process of the steering mechanism. Cartesian coordinates of kinematic pairs in neutral position are applied as design variables for a double four-bar steering mechanism. An algorithm for solving the kinematics equations and determining the optimal angles will be applied using the open source software Octave, which will also allow several simulations to be performed and various optimization solutions of the steering mechanism to be found. The optimal synthesis approach has been successfully applied to center lever steering mechanisms. Although this method proved to be efficient in finding optimal solutions, it is important to note that all solutions meet the Ackermann ideal condition approximately; however, not all optimizations found are applicable, since they exceed the transmission angles. Therefore, their implementation will depend on the application or specific vehicle parameters. It is concluded that the implementation of Cartesian coordinates of kinematic pairs in neutral position as design variables for a double four-bar steering mechanism

was successful, since all the optimizations gave convergence of the objective function in a fast way and approximate fulfillment of Ackermann's condition.

**Keywords** – Steering mechanisms, double four-bar mechanism, optimal dimensional synthesis, Natural coordinates.

## 1. INTRODUCCIÓN

En el diseño de mecanismos de dirección, uno de los desafíos fundamentales es lograr una síntesis dimensional que optimice el rendimiento y la precisión del sistema. La optimización dimensional de los mecanismos de dirección se ha investigado extensamente a través de diferentes enfoques, siendo uno de los más destacados el uso de coordenadas naturales. Las coordenadas naturales permiten una representación más directa de las relaciones geométricas y cinemáticas del mecanismo, lo cual es crucial para su diseño. Según algunos estudios previos, el uso de este enfoque puede reducir significativamente los errores de alineación en los mecanismos de dirección [1]. La síntesis dimensional óptima, como se ha demostrado en varios estudios, no solo mejora la precisión, sino también la facilidad de manufactura de los mecanismos.

Por otro lado, varios estudios han explorado el uso de métodos de optimización matemática para la síntesis de mecanismos de dirección y la aplicación de algoritmos evolutivos ha mostrado una mejora significativa en los resultados obtenidos con métodos clásicos de síntesis dimensional [2]. Asimismo, otros estudios de optimización utilizando coordenadas naturales ha facilitado el modelado cinemático al evitar el uso de funciones trascendentales. El problema de optimización se resuelve mediante un algoritmo genético con codificación continua, evitando el cálculo de derivadas altamente complejas [3]. A medida que la computación se ha vuelto más poderosa, la integración de técnicas de inteligencia artificial ha ganado relevancia en la optimización dimensional de estos mecanismos como las redes neuronales han sido aplicadas para predecir las mejores configuraciones dimensionales, abriendo nuevas alternativas para la automatización del diseño de mecanismos [4]. A pesar de los avances mencionados, existen aún desafíos significativos en la implementación práctica de estos enfoques, especialmente en la industria automotriz, donde los requisitos de precisión y confiabilidad son extremadamente altos [5]. La necesidad de perfeccionar la síntesis dimensional de los mecanismos de dirección es cada vez más urgente, lo que ha impulsado la investigación en nuevas metodologías.

En este contexto, el presente artículo propone un nuevo enfoque para la síntesis dimensional de mecanismos de dirección basados en coordenadas naturales. El método que se pretende implementar se destaca especialmente por permitir el conocimiento de la configuración inicial del mecanismo, asegurando que esta se mantenga constante a lo largo de todo el rango de movimiento [6]. Esto representa una ventaja significativa en comparación con métodos tradicionales, los cuales se centran en calcular las longitudes de los eslabones y, como consecuencia, no proporcionan información sobre la configuración inicial. La ausencia de este dato crítico puede complicar el proceso de ensamblaje del mecanismo, ya que frecuentemente existen varias maneras de llevar a cabo esta tarea, lo que se traduce en un desafío adicional [7].

Esta investigación tiene como objetivo explorar el método de coordenadas naturales en el diseño de mecanismos de dirección de doble cuatro barras, aplicando un algoritmo para determinar los ángulos óptimos y validando los resultados mediante un modelado en Octave. Se presentarán los resultados obtenidos junto con su validación gráfica. Se mostrarán las optimizaciones encontradas para el mecanismo, donde se logró una convergencia total de la función objetivo y de la condición ideal de Ackermann. Este enfoque de síntesis óptima ha sido probado con éxito para un mecanismo de palanca central y se espera que sea aplicado posteriormente a mecanismos de cuatro barras y de piñón y cremallera, ya que este método se ofrece como una nueva alternativa mucho más simple que los métodos tradicionales usados.

En la siguiente sección 2, se inicia con la selección de variables. En el apartado 3, se lleva a cabo el análisis cinemático, donde se formulan y detallan las ecuaciones de restricción del mecanismo de dirección de doble cuatro barras. En el cuarto apartado, se selecciona el método para resolver las ecuaciones de restricción, se analiza el error de síntesis y se formula el problema de optimización. A continuación, se implementan las ecuaciones obtenidas en Octave. Finalmente, se presentarán los resultados de las optimizaciones encontradas para el mecanismo de dirección doble-cuatro barras.

## 2. SELECCIÓN DE VARIABLES DEL MECANISMO DE DIRECCIÓN DOBLE-CUATRO BARRAS

Se inicia con la identificación de variables de diseño las cuales se ubican sobre los pares cinemáticos del mecanismo. Cabe resaltar que solo son necesario una parte de las coordenadas de los pares puesto que el mecanismo de dirección es simétrico en la posición neutral. Los puntos identificados son  $\mathbf{p}_1^0$ ,  $\mathbf{p}_2^0$  y el punto fijo  $\mathbf{p}_A$ . Estos pueden observarse en la Figura 1, junto con los demás puntos del mecanismo de dirección doble-cuatro barras.

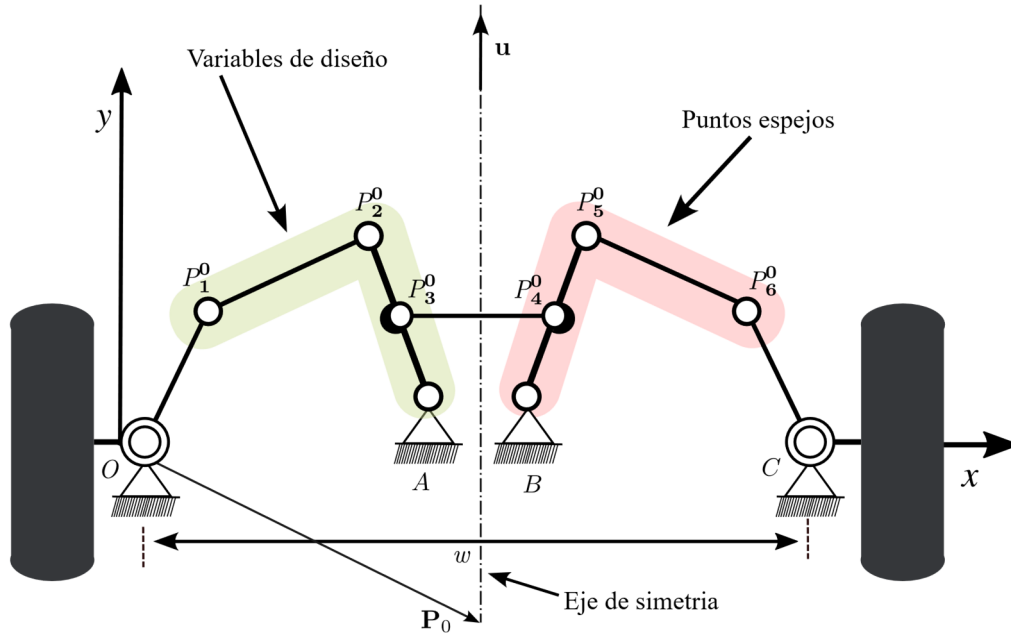


Fig. 1. Mecanismo de dirección doble-cuatro barras modelado en coordenadas naturales.

El vector de variables de diseño  $\mathbf{Z}$  para el mecanismo de dirección doble-doble cuatro barras que está dado por la ecuación (1),

$$\mathbf{z} = [x_1^0 \quad y_1^0 \quad x_2^0 \quad y_2^0 \quad x_A \quad y_A]^T \quad (1)$$

donde  $x_1^0$  y  $y_1^0$  son las coordenadas del punto  $\mathbf{p}_1^0$ ,  $x_2^0$  y  $y_2^0$  son las coordenadas del punto  $\mathbf{p}_2^0$ ,  $x_A$  y  $y_A$  son las coordenadas del punto fijo  $A$ . Cabe mencionar que el subíndice cero indica que son las coordenadas del mecanismo de dirección en la posición neutral. Es fundamental identificar los puntos espejo en la posición neutral del mecanismo, ya que esta información sirve como una estimación preliminar para resolver las ecuaciones de restricción asociadas al sistema. En el presente caso, los puntos espejo son  $\mathbf{p}_4^0$ ,  $\mathbf{p}_5^0$ ,  $\mathbf{p}_6^0$  y  $\mathbf{p}_B$ . La identificación precisa de estos puntos permite establecer las condiciones iniciales del mecanismo y facilita la formulación de las restricciones de la que depende estos puntos y que en palabras más simples son la distancias en la que se encuentran ubicados cada punto del mecanismo de dirección doble-cuatro

barras. A continuación, se describen las ecuaciones que se forman teniendo en cuenta la distancia de cada punto:

$$\mathbf{p}_3^0 = \mathbf{p}_A + \frac{1}{2}(\mathbf{p}_2^0 - \mathbf{p}_A) \quad (2)$$

$$\mathbf{p}_B = \mathbf{p}_0 + \mathbf{M}(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_A) \quad (3)$$

$$\mathbf{p}_4^0 = \mathbf{p}_0 + \mathbf{M}(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_3^0) \quad (4)$$

$$\mathbf{p}_5^0 = \mathbf{p}_0 + \mathbf{M}(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_2^0) \quad (5)$$

$$\mathbf{p}_6^0 = \mathbf{p}_0 + \mathbf{M}(\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1^0) \quad (6)$$

donde:  $\mathbf{p}_4^0, \mathbf{p}_5^0$  y  $\mathbf{p}_6^0$  representan los puntos espejo del mecanismo,  $\mathbf{p}_B$  es un punto fijo y  $\mathbf{p}_3^0$  es un punto en la posición inicial del mecanismo. mientras que  $\mathbf{p}_0$  corresponde al punto que se encuentra sobre el eje de simetría mostrado en la Fig. 1. Además,  $\mathbf{M}$  es la matriz que describe la transformación de los puntos espejo en relación con dicho eje de simetría mostrada más adelante en la Ecuación (7). Esta matriz juega un papel crucial en la formulación de las ecuaciones que vinculan los puntos del mecanismo en su configuración inicial.

A continuación, se define La matriz de espejo  $\mathbf{M}$ , mostrada en la siguiente ecuación,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 - 2\mu_x^2 & -2\mu_x\mu_y \\ -2\mu_x\mu_y & 1 - 2\mu_y^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

donde:  $\mu_x$  y  $\mu_y$  son los componentes del vector unitario que define el eje de simetría.

### 3. ANÁLISIS CINEMÁTICO

El análisis cinemático comienza con la colocación del mecanismo de dirección en una posición inicial arbitraria, tal como se ilustra en la Fig. 2. Para llevar a cabo este análisis, se emplean las coordenadas naturales, que permiten una representación más sencilla y adecuada del movimiento en el espacio. En este contexto, el punto de interés se define en función del ángulo de dirección de la rueda interior, el cual se expresa mediante la ecuación (8). Este ángulo es crucial para describir el comportamiento del sistema, ya que influye directamente en la trayectoria seguida por el vehículo. A partir de esta configuración inicial, se realiza un seguimiento detallado de las relaciones geométricas entre los distintos componentes del mecanismo de dirección, con el objetivo de obtener una comprensión más precisa de su funcionamiento cinemático. De esta manera, el análisis no solo permite predecir los movimientos de las ruedas, sino también optimizar el diseño del sistema para mejorar la maniobrabilidad del vehículo. Usando las coordenadas naturales entonces, el punto  $\mathbf{p}_1$  se define en función del ángulo de dirección de la rueda interior tal como se muestra en la ecuación (8)

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta_i & -\sin \delta_i \\ \sin \delta_i & \cos \delta_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ y_1^0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

donde  $x_1^0$  y  $y_1^0$  son las coordenadas del punto  $P_1$ .

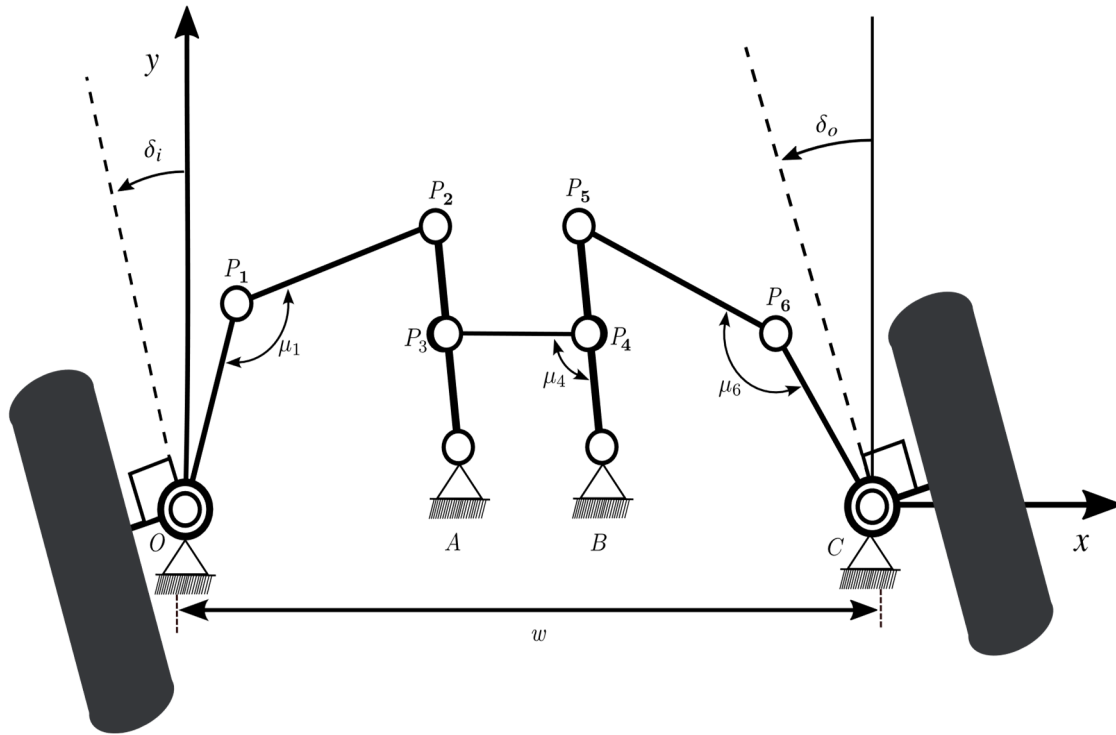


Fig. 2. Mecanismo de dirección doble-cuatro barras posicionado de forma arbitraria.

A continuación, se define el vector de coordenadas naturales  $\mathbf{q}$ , el cual está formado por las coordenadas naturales de los puntos  $P_2$ ,  $P_3$ ,  $P_4$ ,  $P_5$  y  $P_6$ . Que esta dado como muestra en la ecuación (9),

$$\mathbf{q} = [x_2 \quad y_2 \quad x_3 \quad y_3 \quad x_4 \quad y_4 \quad x_5 \quad y_5 \quad x_6 \quad y_6]^T \quad (9)$$

El vector de restricciones cinemáticas que se definen dentro de los límites inferior y superior de las variables de diseño. Para este caso corresponde a 10 restricciones, 6 de distancia entre los enlaces  $P_1P_2$ ,  $P_2P_A$ ,  $P_3P_4$ ,  $P_5P_6$ ,  $P_5P_B$  y  $P_6P_C$  y 4 restricciones de puntos alineados en los enlaces  $P_2P_3P_4$  y  $P_5P_4P_6$ . A continuación, se detallarán algunos enlaces y pares que se forman para el mecanismo en cuestión, con sus coordenadas naturales. Cabe resaltar que no se mostrarán todos, debido a la simetría y que el procedimiento es el mismo; solo cambian sus coordenadas y además se mostrara un enlace particular que se forma en la Fig. 3(c):

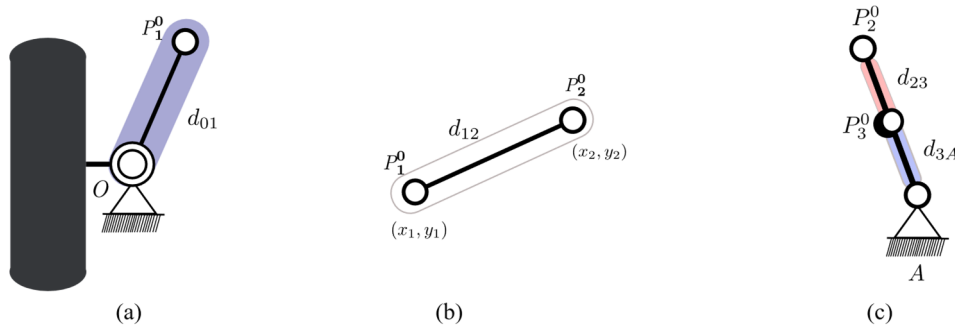


Fig. 3. Detalles de los enlaces particulares que forman para el mecanismo de dirección doble-cuatro barras.

Para el enlace  $P_0P_1$  Fig. 3(a) No se colocan ecuaciones de restricciones debido a que este punto es conocido. Pero en el enlace  $P_1P_2$  mostrado en la Fig. 3(b), las ecuaciones de restricciones de distancia  $d_{P_1P_2}$  quedan de la siguiente como se muestra en la siguiente ecuación(10),

$$\mathbf{r}_{12} \cdot \mathbf{r}_{12} - \mathbf{d}_{12}^2 = 0 \quad (10)$$

donde:  $\mathbf{r}_{12}$  es el vector desde el punto  $P_1$  al punto  $P_2$ , y  $\mathbf{d}_{12}$  es la distancia del vector desde el punto  $P_1$  al  $P_2$ .

Aplicando la ecuación (10), entonces la ecuación de restricción queda de la siguiente forma la siguiente forma obtenemos la ecuación (11).

$$(x_2 - x_1)(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_2 - y_1) - \left[ (x_2^0 - x_1^0)^2 + (y_2^0 - y_1^0)^2 \right] \quad (11)$$

operando la Ecuación(11), queda como resultado la ecuación (12). que podemos observar a continuación:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - \left[ (x_2^0 - x_1^0)^2 + (y_2^0 - y_1^0)^2 \right] \quad (12)$$

Finalmente, en la Fig. 3(c), se presenta un caso particular dentro del eslabón  $P_A P_2$ , donde se observa un punto alineado en el centro del mismo. Esta configuración se clasifica como una restricción de puntos alineados, que requiere la presencia de al menos tres puntos para su definición. En este contexto, podemos identificar la restricción de distancia  $P_A P_2$  y dos restricciones de alineamiento entre los puntos  $P_2 P_3 P_A$ . Esto nos lleva a considerar cuatro ecuaciones en total de alineamiento, que incluyen el enlace  $P_B P_4 P_5$ . Además, debido a la simetría del sistema, las ecuaciones son similares, variando únicamente en los subíndices.

A continuación, se detallará más de cerca el enlace de puntos alineados de la Fig. 3(c) y que se muestra más de cerca en la Fig. 4. Con sus respectivos vectores y coordenadas naturales,

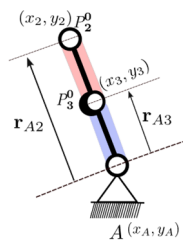


Fig. 4. Detalle del enlace  $P_A P_3 P_2$

Entonces tenemos que el vector  $\mathbf{r}_{A2}$  es dos veces la distancia del vector  $\mathbf{r}_{A3}$  por lo tanto nos da como resultado la ecuación (13) que observaremos a continuación:

$$\mathbf{r}_{A2} = 2\mathbf{r}_{A3} \quad (13)$$

Seguido despejamos la ecuación (13) el vector  $2\mathbf{r}_{A3}$  e igualamos a cero y obtenemos la ecuación (14).

$$\mathbf{r}_{A2} - 2\mathbf{r}_{A3} = 0 \quad (14)$$

se descompone la Ecuaciones. (14) en sus respectivas coordenadas naturales, dando como resultado las 2 restricciones del enlace  $P_3P_A$  que son las siguientes ecuaciones (15) y (16):

$$(x_2 - x_A) - 2(x_3 - x_A) = 0 \quad (15)$$

$$(y_2 - y_A) - 2(y_3 - y_A) = 0 \quad (16)$$

de la misma manera se opera el enlace  $P_5P_4P_B$  el cual es simétrico al enlace descrito anteriormente, por lo tanto, tenemos las (17)ecuaciones y (18);

$$(x_5 - x_B) - 2(x_4 - x_B) = 0 \quad (17)$$

$$(y_5 - y_B) - 2(y_4 - y_B) = 0 \quad (18)$$

De esta manera, se opera con los demás enlaces de distancia  $P_2P_A$ ,  $P_3P_4$ ,  $P_5P_B$  y  $P_5P_6$ . Esto se debe a que, aprovechando la simetría inherente al mecanismo, las ecuaciones particulares se cumplen de manera general para todos los pares y puntos del sistema. Gracias a esta simetría, las ecuaciones que componen el vector de ecuaciones de restricciones cinemáticas se presentan de forma uniforme, como se puede observar en la ecuación (19). En ella se establecen todas las restricciones que rigen el comportamiento del mecanismo de dirección doble de cuatro barras. Estas restricciones definen los límites tanto inferiores como superiores de los movimientos permitidos dentro del mecanismo de dirección, lo que es esencial para su correcto funcionamiento. Es importante destacar el papel fundamental del vector de ecuaciones de restricciones, denotado como  $\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{z})$ , ya que constituye la base sobre la cual se realizan todos los cálculos necesarios para analizar y optimizar el sistema. La precisión en la formulación de estas ecuaciones es crucial, pues cualquier error en su desarrollo podría dar lugar a resultados incorrectos. Un fallo en la correcta formulación de las restricciones no solo afectaría la calidad de los resultados obtenidos, sino que también impediría una convergencia efectiva y rápida de las soluciones, lo que ralentizaría el proceso de optimización. Por esta razón, es esencial llevar a cabo un análisis exhaustivo y cuidadoso en cada paso del proceso, asegurando que las ecuaciones reflejen de manera fiel las condiciones físicas y geométricas del sistema. Además, un manejo adecuado de las restricciones permite un mejor entendimiento del comportamiento global del mecanismo y facilita la identificación de posibles mejoras en su diseño.

$$\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{z}) = \begin{bmatrix} (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - \left[ (x_2^0 - x_1^0)^2 + (y_2^0 - y_1^0)^2 \right] \\ (x_2 - x_A)^2 + (y_2 - y_A)^2 - \left[ (x_2^0 - x_A^0)^2 + (y_2^0 - y_A^0)^2 \right] \\ (x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 - \left[ (x_4^0 - x_3^0)^2 + (y_4^0 - y_3^0)^2 \right] \\ (x_5 - x_B)^2 + (y_5 - y_B)^2 - \left[ (x_2^0 - x_A^0)^2 + (y_2^0 - y_A^0)^2 \right] \\ (x_6 - x_5)^2 + (y_6 - y_5)^2 - \left[ (x_2^0 - x_1^0)^2 + (y_2^0 - y_1^0)^2 \right] \\ (x_6 - x_C)^2 + (y_6 - y_C)^2 - \left[ (x_1^0)^2 + (y_1^0)^2 \right] \\ (x_2 - x_A) - 2(x_3 - x_A) \\ (y_2 - y_A) - 2(y_3 - y_A) \\ (x_5 - x_B) - 2(x_4 - x_B) \\ (y_5 - y_B) - 2(y_4 - y_B) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (19)$$

#### 4. MÉTODO PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES

El método de Levenberg-Marquardt es un algoritmo eficaz para resolver problemas de ajuste no lineal y optimización, que se centra en minimizar funciones de error cuadrático. Este método combina las estrategias del descenso de gradiente y el método de Newton, lo que le permite mejorar la convergencia, especialmente en contextos donde el modelo es no lineal en los parámetros. Durante su operación, el algoritmo alterna entre un enfoque más conservador, que utiliza el descenso de gradiente, y un enfoque más agresivo, basado en el método de Newton, lo que optimiza la velocidad de convergencia al acercarse a la solución óptima [6], [7].

Una de las características clave de este método es su parámetro de damping, que ajusta la mezcla de ambos enfoques en función de la convergencia observada, permitiendo una adaptación dinámica durante el proceso [8]. Debido a estas propiedades, el método de Levenberg-Marquardt se utiliza ampliamente en diversas áreas, como el ajuste de curvas y la calibración de modelos, destacándose por su eficacia en problemas bien condicionados.

A continuación, se detallará la estructura del método de Levenberg-Marquardt un diagrama. pero se adaptará con ecuaciones de análisis cinemático que se deben resolver para obtener los resultados de esta investigación.

---

##### Algoritmo 1: Método de Levenberg-Marquard

---

**Entradas:**  $\mathbf{q}_0$ ,  $\Phi$ ,  $\lambda$ ,  $Iter_{\max}$

**Salidas:**  $\mathbf{q}$

- 1 **para**  $j = 1$  a  $Iter_{\max}$  **hacer**
- 2      $\Delta \mathbf{f} \leftarrow \Phi_{\mathbf{q}}^T \Phi$

```

3       $\mathbf{H} \leftarrow \frac{\partial \nabla f}{\partial \mathbf{q}}$ 
4      si  $\|\nabla f\| \leq \varepsilon$  entonces
5          break
6      fin si
7       $(\mathbf{H} + \lambda \mathbf{I})\mathbf{s} \leftarrow -\nabla f$ 
8       $f_p \leftarrow f(\mathbf{q} + \mathbf{s})$ 
9      si  $f_p < f$  entonces
10          $\lambda \leftarrow \lambda / 10$ 
11          $\mathbf{q} \leftarrow \mathbf{q} + \mathbf{s}$ 
12     si no
13          $\lambda \leftarrow \lambda \cdot 10$ 
14     fin si
15 fin para

```

## 5. ANÁLISIS DE POSICIÓN

La determinación de la posición inicial del mecanismo se establece a partir del valor inicial de las coordenadas naturales, el cual se presenta en el vector  $\mathbf{q}_0$ . Este vector es fundamental, ya que proporciona las referencias necesarias para configurar adecuadamente el sistema en su estado inicial. Luego se resuelve el problema de posición de la ecuación (19) mediante el método optimización de Levenberg-Marquardt descrito anteriormente. Podemos formular la cinemática de posición como un problema de mínimos cuadrados como se muestra en la ecuación (20).

$$\underset{\mathbf{q}}{\text{minimize}} \quad \frac{1}{2} \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{z})^T \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{z}) \quad (20)$$

Resolviendo de manera simultánea  $(\mathbf{H} + \lambda \mathbf{I})\mathbf{S} = -\Delta \mathbf{f}$ , donde  $\mathbf{H}$  es la matriz hessiana,  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad,  $\lambda$  es un valor escalar y  $\Delta \mathbf{f}$  es el gradiente.

Para determinar la posición siguiente del mecanismo, se procede mediante incrementos unitarios hasta cubrir completamente el rango de ángulo de dirección de entrada, denotado como  $\delta_i$ . Este ángulo varía en el intervalo de  $[-27^\circ, 40^\circ]$  y  $[-40^\circ, 27^\circ]$  según fuente consultada en Billi and Chand [9]. De esta forma, se garantiza una exploración exhaustiva de las posibles configuraciones hasta completar todo el rango de movimiento.

## 6. ERROR DE SÍNTESIS

Para error de síntesis solo se define el error primario que es la diferencia entre el ángulo de dirección de la rueda exterior y el ángulo ideal dado por la condición de Ackermann tal como se muestra a continuación:

$$\varepsilon = (\delta_o - \delta_{oA}) \quad (21)$$

donde:  $\delta_o$  es el ángulo generado al girar la rueda de salida y  $\delta_{oA}$  es el ángulo según la condición de Ackermann que se muestra a continuación en la ecuación (22).

$$\delta_{OA} = \cot^{-1} \left( \frac{w}{l} + \cot \delta_i \right) \quad (22)$$

donde:  $l$  es la distancia entre ejes del vehículo.

También se tienen cuenta los ángulos de transmisión de forma indirecta a través del cálculo del determinante de Jacobiano. Estos ángulos aseguran que las fuerzas se transmitan de manera eficiente y que el mecanismo opere de forma suave [10]. Para el mecanismo en cuestión se forman tres ángulos de transmisión denotados con la letra  $\mu_1, \mu_4$  y  $\mu_6$  en donde las ecuaciones para calcular estos ángulos se muestran en la ecuación (23), (24) y (25) respectivamente. La ubicación de estos en ángulos en el mecanismo de dirección puede observarse en la Fig. 3.

$$\mu_1 = \arccos \left( \frac{x_1(x_1 - x_2) + y_1(y_1 - y_2)}{\sqrt{[(x_1^0)^2 + (y_1^0)^2]} \sqrt{[(x_2^0 - x_1^0)^2 + (y_2^0 - y_1^0)^2]}} \right) \quad (23)$$

$$\mu_4 = \arccos \left( \frac{(x_B - x_4)(x_3 - x_4) + (y_B - y_4)(y_3 - y_4)}{\sqrt{[(x_4^0 - x_B)^2 + (y_4^0 - y_B)^2]} \sqrt{[(x_4^0 - x_3^0)^2 + (y_4^0 - y_3^0)^2]}} \right) \quad (24)$$

$$\mu_6 = \arccos \left( \frac{(x_C - x_6)(x_5 - x_6) + (y_C - y_6)(y_5 - y_6)}{\sqrt{[(x_1^0)^2 + (y_1^0)^2]} \sqrt{[(x_2^0 - x_1^0)^2 + (y_2^0 - y_1^0)^2]}} \right) \quad (25)$$

donde:  $\mu_1, \mu_4$  y  $\mu_6$  son los ángulos de transmisión.

## 7. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

La formulación del problema de optimización se fundamenta en el método de Levenberg-Marquardt, un algoritmo que ofrece mayor robustez y eficiencia en la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales, especialmente en situaciones donde la matriz Hessiana presenta problemas de singularidad o condicionamiento deficiente. El método de Newton, al depender directamente de la matriz Hessiana, suele fallar en estos casos, ya que cuando dicha matriz se aproxima a valores cercanos a cero, el algoritmo experimenta dificultades para converger, quedándose atrapado en ciclos de iteración sin la posibilidad de alcanzar una solución de manera rápida y efectiva [8]. Esto es particularmente problemático en sistemas complejos, donde la estabilidad numérica es crucial para la eficiencia del proceso de optimización [11]. La formulación del problema queda como se muestra en la ecuación (26). En donde, se incluye la resolución del determinante del Jacobiano, el cual debe ser distinto de cero en todo momento. Si el determinante es cero, se genera una singularidad que, en términos simples, significa que el mecanismo se atasca y no puede moverse libremente.

$$\begin{aligned} &\text{minimize } g(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 + \rho \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{q}, \mathbf{z}) \\ &\text{sujeto a } \xi - \left| \det(\phi_{qi}) \right| < 0 \\ &\quad \underline{\mathbf{z}} \leq \mathbf{z} \leq \bar{\mathbf{z}} \\ &\text{resolviendo } f_i(\mathbf{q}, \mathbf{z}) = \min_{\mathbf{q}} \frac{1}{2} \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{z})^T \Phi(\mathbf{q}, \mathbf{z}) \end{aligned} \quad (26)$$

## 8. RESULTADOS NUMÉRICOS

Todas las soluciones obtenidas se generaron variando  $\delta_i$  de  $-27^\circ$  a  $40^\circ$  y, correspondientemente,  $\delta_o$  de  $-40^\circ$  a  $27^\circ$  como sugieren Balli and Chand [9], en su investigación. Este rango de variación permitió lograr un total de 68 puntos de precisión, considerando que la variación entre los ángulos fue de  $1^\circ$ . Así, se obtuvieron 68 puntos espaciados uniformemente a lo largo del eje  $\delta_i$ , lo que proporciona un marco adecuado para el análisis. Adicionalmente, se estableció  $w = 1,5$  m, que representa el ancho entre ejes del vehículo, y  $l = 2$  m como la longitud entre el eje delantero y trasero. Para abordar el problema de optimización, se utilizó la caja de herramientas del algoritmo de punto interior de Octave, que permite una resolución eficiente de problemas complejos. Este enfoque facilitó el cálculo del vector de solución inicial  $\mathbf{z}_0$ . El vector inicial de variables de diseño, junto con los límites superiores e inferiores, se detallan en la Tabla 1. A partir de estos valores, se realizaron las simulaciones para encontrar las soluciones óptimas, que se presentan en la Tabla 2.

Tabla 1. Parámetros optimizados.

Variables de diseño	Limites inferiores	limites superiores	Diseño inicial	Unidades
$x_1^0$	-0.1	0.2	0	[m]
$y_1^0$	-0.21	0.21	0.02	[m]
$x_2^0$	0.25	1.25	0.65	[m]
$y_2^0$	-0.21	0.21	0.3	[m]
$x_A$	0.25	1.25	0.65	[m]
$y_A$	-0.21	0.21	0.1	[m]

Tabla 2. Soluciones óptimas para el mecanismo de dirección doble-cuatro barras.

Variables de diseño	Solución óptima 1	Solución óptima 2	Solución óptima 3	Unidades
$x_1^0$	- 0.0299406205287200	0.196061065020571	0.180555455961390	[m]
$y_1^0$	0.131873885289682	0.208492036385158	0.207265442321363	[m]
$x_2^0$	0.252010110049633	0.552567686608999	0.550003033443116	[m]
$y_2^0$	0.0537556297044345	- 0.206906619985727	- 0.204537322743970	[m]
$x_A$	0.262002391077959	0.611685565674030	0.558633113408977	[m]
$y_A$	0.183758127076780	0.183789235244520	0.202747167968309	[m]

La Fig. 5(a). Representa solución inicial, donde se implementaron los valores iniciales de las variables El proceso de diseño permitió obtener un mecanismo que cumple con los requisitos funcionales básicos, lo que marca el punto de partida para su posterior optimización. En la Fig. 5(b) se presenta la primera optimización llevada a cabo.

Por otro lado, en la Fig. 5(c) se muestran los avances obtenidos en una segunda optimización. En esta fase, se logró una buena distribución de las barras del mecanismo, lo que permitió una trayectoria más suave en el mecanismo. A pesar de estos avances, se observó que el sistema aún podría realizar una tercera optimización, especialmente en la distribución y el comportamiento dinámico de las barras, lo que sugirió la necesidad de una optimización adicional.

Finalmente, la Fig. 5(d) ilustra los resultados de la tercera optimización realizada. En esta etapa, se alcanzó una configuración con una distribución más equilibrada de las barras, lo que permitió un funcionamiento más todavía mucho más suave del mecanismo. Se observa claramente que este diseño, mostrando tiene la mejor distribución alcanzada en el sistema de dirección de doble cuatro barras.

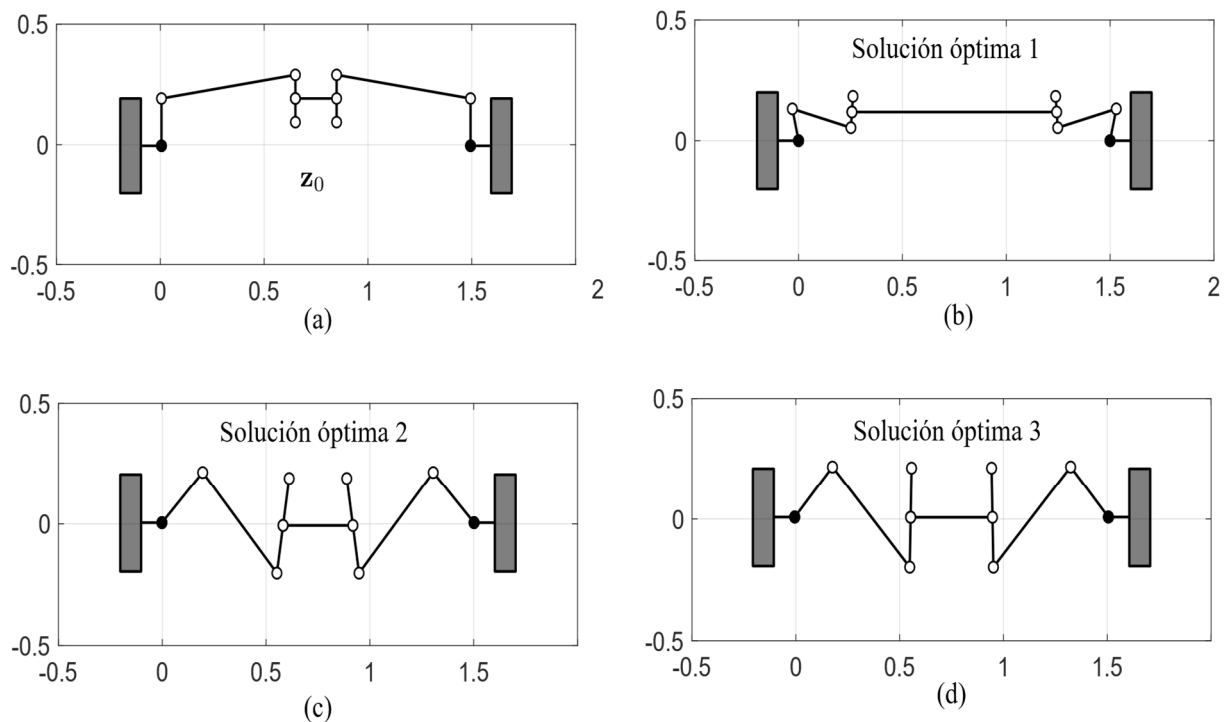


Fig. 5. Disposición de las barras del mecanismo de dirección doble-cuatro barras según cada solución óptima.

Fig. 6. muestran la convergencia de la función objetivo, recordando que la convergencia de la función objetivo se refiere al proceso en el cual los valores de la función objetivo se acercan a un valor óptimo a medida que se realizan iteraciones en un algoritmo de optimización. En este contexto, se busca encontrar el mínimo de la función objetivo, que representa el mejor desempeño posible según los criterios definidos. Además, Se considera que una función objetivo converge cuando, tras múltiples iteraciones, los valores obtenidos se acercan a un valor específico (mínimo) y se estabilizan, mostrando cambios mínimos en iteraciones sucesivas

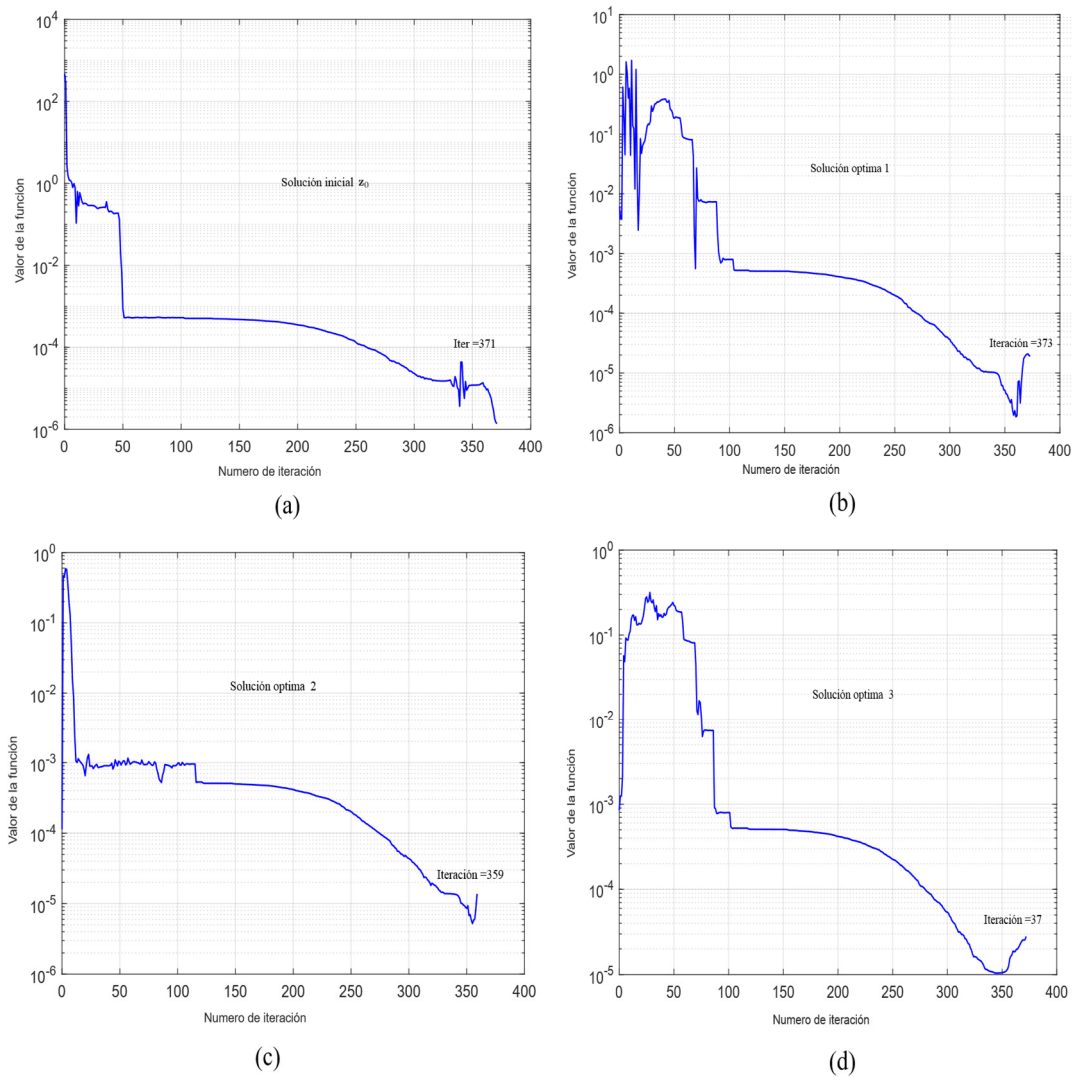


Fig. 6. Convergencias de la función objetivo para cada solución.

En la Fig. 7, se muestra los errores estructurales. En la Fig. 7(a) se muestra el sistema de barras inicial con un error máximo de  $12.75^\circ$ , la solución óptima 1 en la Fig. 7(b) con un error de  $0.023^\circ$ , la solución óptima 2 en la Fig. 7(c) con un error de  $0.004^\circ$  y finalmente la solución óptima 3 con un error de  $0.001^\circ$  siendo este el más bajo de las optimizaciones como se muestra en la Fig. 7(d).

En la Fig. 8 se observan los ángulos de transmisión para la solución inicial, mostrada en la Fig. 8(a), donde los ángulos sobrepasan el límite superior. Además, se presentan los ángulos de transmisión que correspondientes a cada optimización realizada. En las Fig. 8(b) y 8(c), correspondientes a la primera y segunda optimización, se observa que los ángulos aún sobrepasan los límites, tanto superior como inferior.

Por último, en la tercera optimización se evidencia con claridad que los ángulos se mantienen dentro del rango permisible, sin sobrepasar los límites establecidos.

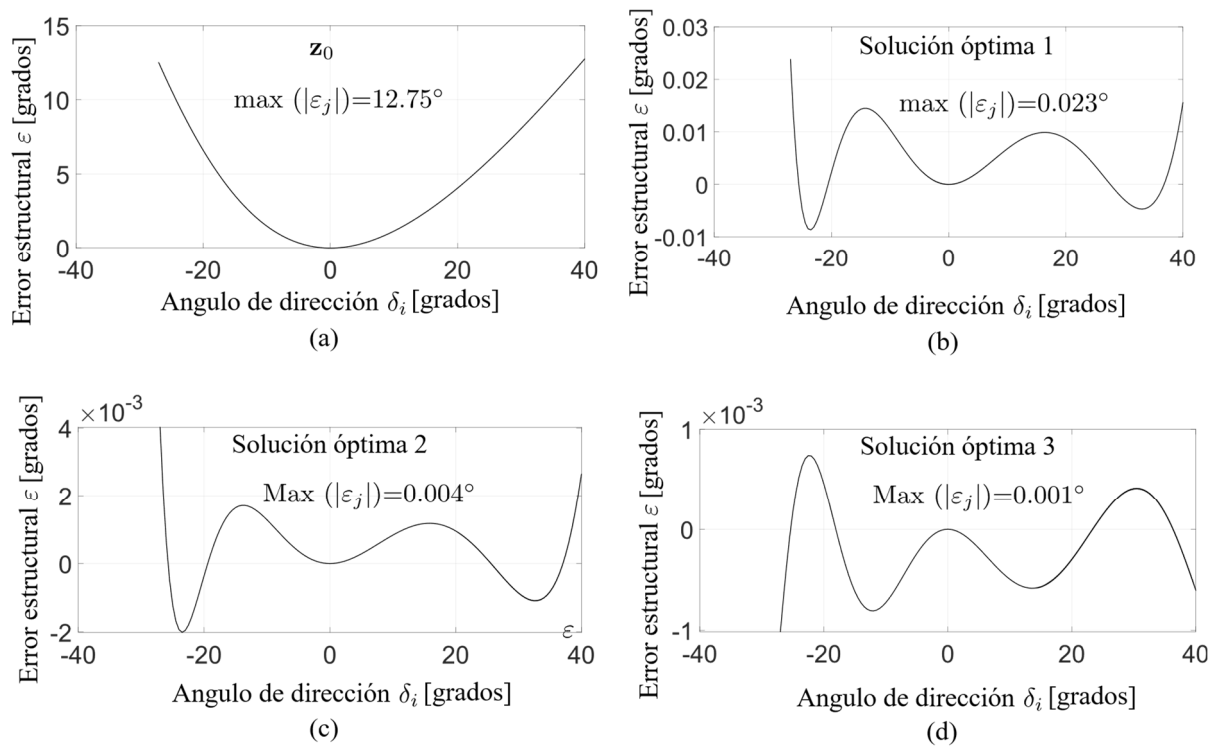


Fig. 7. Se observa el error estructural de la solución inicial y las soluciones óptimas.

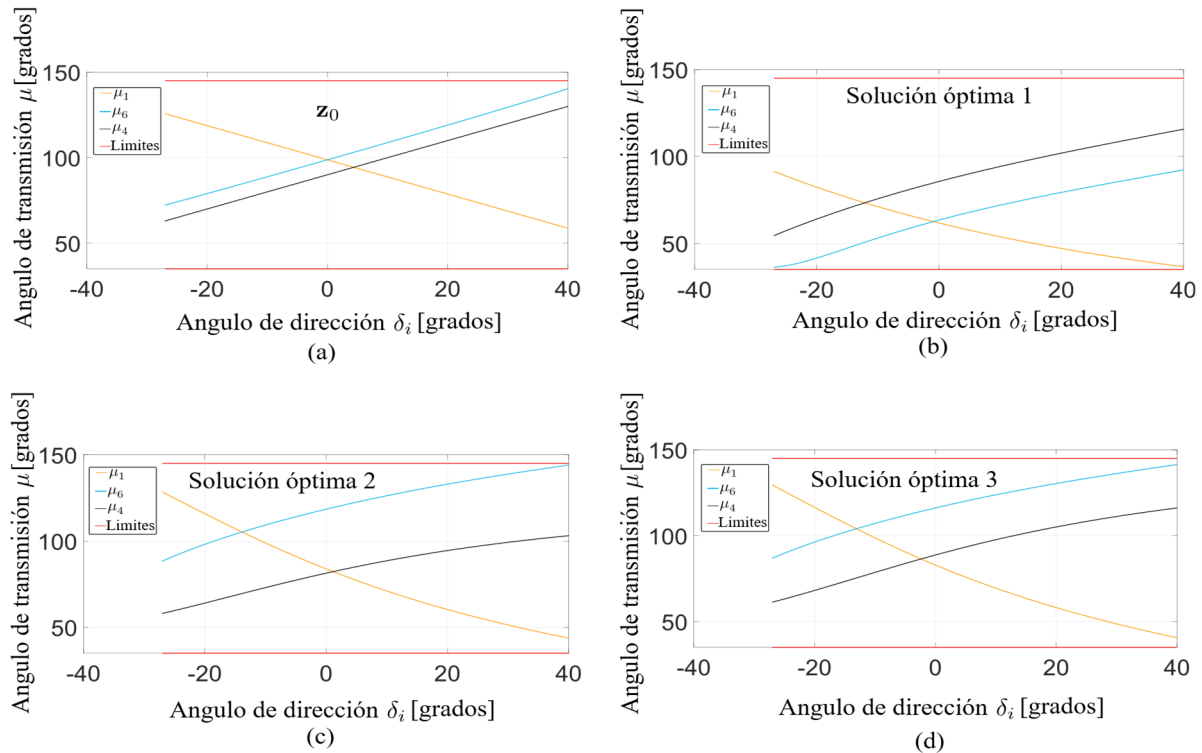


Fig. 8. Se observa los ángulos de transmisión para el mecanismo de dirección inicial y para los mecanismos óptimos.

## 9. CONCLUSIÓN

El método propuesto para la síntesis óptima, basado en coordenadas naturales para el mecanismo de dirección doble-cuatro barras, presentó desafíos significativos durante su implementación. A pesar de su diseño inicial, se encontró que el método de Newton falló al intentar resolver el problema de optimización en el entorno del software Octave. Este fallo se debió, en particular, a la singularidad de la matriz hessiana, lo que impidió que el método convergiera adecuadamente. Este inconveniente fue resuelto al reemplazar el método de Newton por el método de Levenberg-Marquardt, que demostró ser más robusto y capaz de manejar las limitaciones mencionadas. Este cambio permitió avanzar en el proceso de optimización sin los problemas previos asociados a la singularidad.

Además, la adopción del nuevo método exigió una revisión de la formulación del problema. En particular, se eliminó el parámetro de ponderación “ $v$ ” el cual está en el rango [0-1], donde cero indica que no cumple la geometría ideal y uno que cumple de manera estricta. Los ángulos de transmisión “ $\mu$ ” de la función objetivo. Esta decisión se basó en la evaluación de que dichos parámetros no tienen un impacto significativo en la optimización, lo que sugiere que su exclusión no compromete la efectividad del modelo. Esta simplificación contribuyó a una mayor claridad en la formulación del problema y facilitó el proceso de optimización.

Se incluyó, además, una restricción en la función objetivo que impide que la matriz hessiana adquiera valores cercanos a cero, evitando así la singularidad. Este enfoque no solo asegura la estabilidad del nuevo método, sino que también garantiza que la programación se ejecute sin contratiempos y alcance la convergencia esperada. La integración de esta restricción es crucial para el éxito del proceso de optimización y representa un avance importante en el diseño del mecanismo.

Las ecuaciones de restricciones o cinemáticas del mecanismo de dirección doble-cuatro barras fueron formuladas usando coordenadas naturales de manera satisfactoria, sin mayores complicaciones. Esto indica que el método propuesto puede aplicarse exitosamente al mecanismo de dirección doble-cuatro barras, aunque es fundamental tener especial cuidado al seleccionar el método de solución para la optimización. La elección del método adecuado es determinante para realizar simulaciones efectivas y encontrar las optimizaciones potenciales del mecanismo con éxito [13].

Las optimizaciones realizadas revelaron un error máximo de  $0.004^\circ$ , destacando especialmente la tercera optimización, que presentó un error de solo  $0.001^\circ$  en comparación con la solución inicial que fue del  $12^\circ, 75^\circ$  como se muestran en las Fig. 7(d) y Fig. 7(a) respectivamente. Además, los ángulos de transmisión se mantuvieron dentro de los límites establecidos en la investigación de [9].

## REFERENCIAS

- [1] S.M. Han, Y.Y. Kim, "Topology optimization of linkage mechanisms simultaneously considering both kinematic and compliance characteristics", *Journal of Mechanical Design*, **143**(6), 1-18 (2021)
- [2] X. Ju, F. Liu, "Wind farm layout optimization using self-informed genetic algorithm with information guided exploitation", *Applied Energy*, 248, 429-445 (2019)
- [3] N.N. Romero-Núñez, R.E. Tuiran-Villalba, "Optimization method of a six-bar steering mechanism formulated with natural coordinates", *DYNA (Colombia)*, **85**(207), 168-173 (2018) doi: 10.15446/dyna.v85n207.71619
- [4] M.G. Abdolrasol *et al.*, "Artificial neural networks based optimization techniques: A review", *Electronics*, **10**(21), 2689 (2021)
- [5] M.S. Sarfraz, H. Hong, S.S. Kim, "Recent developments in the manufacturing technologies of composite components and their cost-effectiveness in the automotive industry: A review study", *Composite Structures*, 266, 113864 (2021)
- [6] K. Levenberg, "A Method for the Solution of Certain Non-Linear Problems in Least Squares", *Quarterly of Applied Mathematics*, 2, 164-168 (1944)
- [7] D.W. Marquardt, "An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters", *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, **11**(2), 431-441 (1963)
- [8] J. Nocedal, S.J. Wright, *Numerical Optimization*. Springer Science & Business Media (2006)

- [9] S.S. Balli, S. Chand, "Transmission angle in mechanisms (Triangle in mech)", *Mechanism and Machine Theory*, **37**(2), 175-195 (2002) doi: 10.1016/S0094-114X(01)00067-2
- [10] J.E. Shigley, C.R. Mischke, R.G. Budynas, *Mechanical Engineering Design*. McGraw-Hill (2011)
- [11] S.C. Chapra, *Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists*. McGraw-Hill (2011)
- [12] J. E. Shigley, C. R. Mischke, *Mechanical Engineering Design*. McGraw-Hill (2003)
- [13] M. González, J. Lázaro, "Optimization Techniques in Mechanical Design", *Journal of Mechanical Engineering Science*, **226**(2), 321-330 (2012)

### AGRADECIMIENTOS

Al Grupo de Investigación en Ingeniería Mecánica de la Universidad de Pamplona (GIMUP).