



ANÁLISE DINÂMICA EM MODELO REDUZIDO DE UMA ESTRUTURA COM DOIS PAVIMENTOS

RODRIGO SOUZA RIBEIRO, JORGE LUIZ DE ALMEIDA FERREIRA, EDUARDO
CÉSAR GAVAZZA MENIN

Laboratório de Análise de Tensões

Universidade de Brasília - Departamento de Engenharia Mecânica, Campus Universitário Darcy Ribeiro,
Asa Norte, Brasília, DF, Brasil, CEP 70910-900

(Recibido 2 de abril de 2004, para publicación 29 de junio de 2005)

Resumo – Este artigo tem como principal objetivo avaliar os efeitos das incertezas associadas às estimativas dos parâmetros que caracterizam a modelagem do sistema sobre o seu comportamento dinâmico. Com tal finalidade, métodos experimentais, analíticos e numéricos foram utilizados para comparação de parâmetros modais de um modelo reduzido de uma estrutura de dois pavimentos. A metodologia experimental baseou-se em técnicas de varreduras em seno e no Método da Resposta em Frequência [1,2], pela qual os parâmetros modais são obtidos diretamente das informações contidas nas funções de resposta em frequência. Nesta análise foram estimadas as incertezas envolvidas na resposta dinâmica da estrutura devido à: (1) diferentes condições de contorno, (2) variabilidade das propriedades mecânicas e dimensionais das colunas de sustentação dos pavimentos. Um modelo simplificado de dois graus de liberdade foi utilizado na formulação analítica. Baseado no Método de Elementos Finitos [3], análises modais e harmônicas foram realizadas para simulação do comportamento dinâmico da estrutura ideal. Os resultados obtidos pelos diferentes métodos foram comparados e pôde-se quantificar as incertezas envolvidas na resposta dinâmica da estrutura, validar o modelo numérico idealizado, assim como, verificar a consistência dos resultados experimentais.

Palavras chave – Análise modal, análise de sensibilidade, vibrações estruturais, formas modais.

1. INTRODUÇÃO

As máximas tensões atuantes em estruturas quando submetidas a esforços dinâmicos são fatores fundamentais de projeto, exigindo que o projetista tenha uma noção exata dos seus valores. A análise dinâmica de estruturas pode ser realizada utilizando-se modelos numéricos, analíticos e/ou experimentais. Entretanto, sempre existem incertezas associadas à modelagem, que resultam de numerosas hipóteses envolvendo diversos parâmetros que controlam o comportamento dinâmico, tais como, geometria, propriedades mecânicas dos materiais e condições de vinculação. Em estudos recentes [4, 5, 6] são apresentadas as dificuldades na definição de modelos que representem de forma adequada o comportamento dinâmico de estruturas. A resposta dinâmica e a confiabilidade podem ser muito sensíveis a variações destas características, visto que dependendo do sistema analisado, pequenas incertezas podem afetar de forma significativa o comportamento dinâmico da estrutura [6]. Esse trabalho tem como principal objetivo avaliar o efeito das incertezas associadas às estimativas dos parâmetros que caracterizam a modelagem do sistema dinâmico sobre o seu comportamento. Nesse sentido, foram utilizados métodos experimentais, analíticos e numéricos na estimativa de parâmetros modais do modelo reduzido de uma estrutura de dois pavimentos. A metodologia experimental baseou-se no Método da Resposta em Frequência [1,2], pela qual os parâmetros modais são obtidos diretamente das informações contidas nas funções de Resposta em Frequência. Os parâmetros modais, tais como, frequências naturais e vetores modais foram obtidos mediante aplicação de técnicas de varreduras em seno. Uma bancada de ensaios experimentais foi construída para quantificar as incertezas envolvidas na resposta dinâmica de 9 modelos semelhantes devido às diferentes condições de contorno associadas aos processos de montagem e desmontagem dos modelos. A variabilidade da resposta em frequência relacionada à variações nas dimensões e propriedades mecânicas,

associada a diferentes medidas de espessura, comprimento, largura, densidade e módulo de elasticidade das colunas de sustentação que foram produzidas de um mesmo lote de material, foram estimadas mediante uma análise de sensibilidade. Na formulação analítica utilizou-se um modelo discreto com dois graus de liberdade cuja matriz de rigidez foi construída com a hipótese de que a estrutura é submetida a cisalhamento puro. Para as simulações numéricas, foi utilizado o MEF [3] com o qual foram realizadas análises modais e harmônicas em um modelo composto por elementos de casca nos pavimentos e elementos de viga nas colunas de sustentação para simulação do comportamento dinâmico da estrutura. Parâmetros de análise de consistência entre os resultados numérico e experimental foram utilizados para determinação do nível de consistência e correlação dos resultados encontrados.

1.1. Modelo a parâmetros concentrados de um edifício de n pavimentos

O Sistema de equações que caracteriza o comportamento dinâmico de uma estrutura é descrito por:

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{F}(t) \quad (1)$$

onde \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} representam, respectivamente, as matrizes Inércia, Amortecimento e Rigidez do sistema; $\ddot{\mathbf{X}}$, $\dot{\mathbf{X}}$, \mathbf{X} e $\mathbf{F}(t)$ representam, respectivamente, os vetores aceleração, velocidade, deslocamento e força.

A solução da equação (1) consiste em duas partes, a homogênea e a particular. Com base na solução da equação homogênea, ou solução modal, pode-se construir um conjunto de equações que permitem determinar as frequências fundamentais e os modos de vibração da estrutura. A solução particular permite descrever a resposta dinâmica da estrutura quando a mesma é excitada por uma função qualquer. Tipicamente, tal resposta é apresentada sob a forma da função resposta em frequência - FRF. Baseando-se numa função harmônica e desconsiderando os termos de amortecimento, a solução da equação homogênea associada à equação (1) pode ser representada pela equação (2), denominada auto-equação [7] na qual \mathbf{I} representa a matriz identidade e \mathbf{A} representa a matriz de flexibilidade.

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{M} \cdot \omega_i^2 \right) \cdot \mathbf{X}_i = 0 \quad , \quad \text{para } i = 1, 2, 3.. \quad (2)$$

O conjunto de equações algébricas homogêneas forma um problema de autovetores e autovalores associados, respectivamente, às frequências naturais e formas modais que caracterizam a vibração livre da estrutura [7,8,9]. Para cada autovalor ω_i associa-se uma frequência natural f_i e uma forma modal \mathbf{X}_i , sendo que o número de autovalores e autovetores é igual à quantidade de graus de liberdade do sistema. [9]. Ainda, com base na equação (2) é possível fazer uma análise de sensibilidade da resposta em frequência. Isso é realizado aproximando-se a média e a variância de ω por meio da expansão da mesma em uma série de Taylor utilizando os valores médios das variáveis e truncando-as a partir dos termos de primeira ordem. As aproximações em primeira-ordem para a variância do estimador das frequências fundamentais são determinadas segundo a equação (3).

$$\sigma_\omega^2 \cong \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left[\left(\frac{\partial \omega(\Xi)}{\partial \Xi_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial \omega(\Xi)}{\partial \Xi_j} \right) \text{Cov}(\Xi_i, \Xi_j) \right] \quad (3)$$

onde Ξ representa o vetor associado aos parâmetros que regem a equação do movimento e $\text{Cov}(\Xi_i, \Xi_j)$, a covariância entre Ξ_i e Ξ_j .

1.2. Solução aproximada do problema

A solução aproximada do comportamento dinâmico da estrutura de dois pavimentos foi realizada considerando um modelo de dois graus de liberdade no qual as colunas de sustentação são submetidas a cisalhamento puro [11]. Assim, conforme ilustrado na Fig. 1, as hipóteses básicas utilizadas para descrever a linha elástica das colunas foram a de engastamento numa extremidade e rotação nula na extremidade oposta, representadas pelas equações (4) e (5), respectivamente.

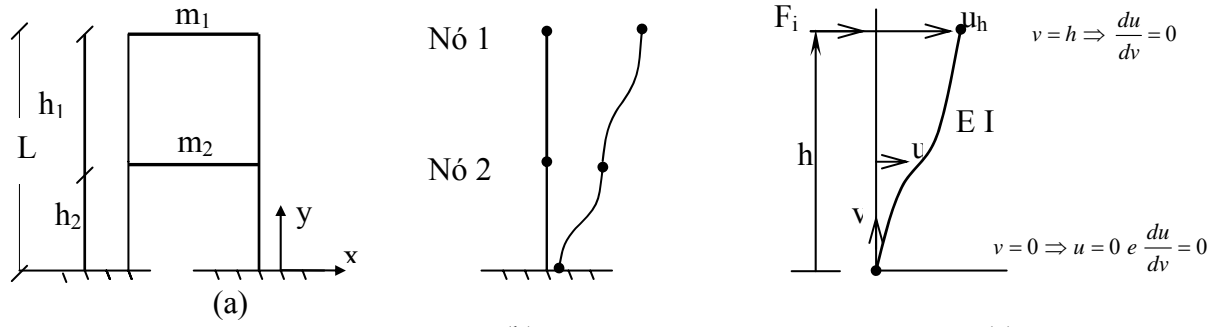


Fig. 1. (a) Desenho esquemático da estrutura; (b) Modelo com dois graus de liberdade; (c) Representação da Coluna submetida a cisalhamento puro e condições de contorno do problema.

$$v = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ e } \frac{du}{dv} = 0 \quad (4)$$

$$v = h \Rightarrow \frac{du}{dv} = 0 \quad (5)$$

onde v e u representam, respectivamente, as coordenadas locais nas direções longitudinal e perpendicular e h é a altura de cada andar.

A aplicação dessas condições de contorno à equação da linha elástica resulta na relação entre a força, F , e o deslocamento, u , sofrido no ponto de aplicação desta força, cuja expressão é apresentada na equação (6).

$$F = \frac{12 \cdot E \cdot I}{h^3} \cdot u \quad (6)$$

onde E representa o módulo de elasticidade e I o segundo momento de área de cada segmento.

O coeficiente de influência de flexibilidade a_{ij} é definido como o deslocamento em i devido a aplicação de uma força unitária em j . Para determinar os elementos da matriz de Flexibilidade, apresentada na equação (7), aplicou-se o princípio da superposição associado ao equacionamento da linha elástica [12,13].

$$\mathbf{A} = \mathbf{K}^{-1} = \begin{bmatrix} h_2^3 + h_1^3 & h_2^3 \\ h_2^3 & h_2^3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{24EI} \quad (7)$$

onde h_1 e h_2 representam, respectivamente, a distância entre os dois pavimentos e a distância entre o pavimento inferior e a base da estrutura.

A matriz de inércia do sistema é representada pela equação (8) e foi computada levando-se em consideração as massas dos 2 pavimentos, assim como as massas equivalentes devido à inércia das colunas de sustentação [8].

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 + m_{1 \text{ equiv}} & 0 \\ 0 & m_2 + m_{2 \text{ equiv}} \end{bmatrix} \quad (8)$$

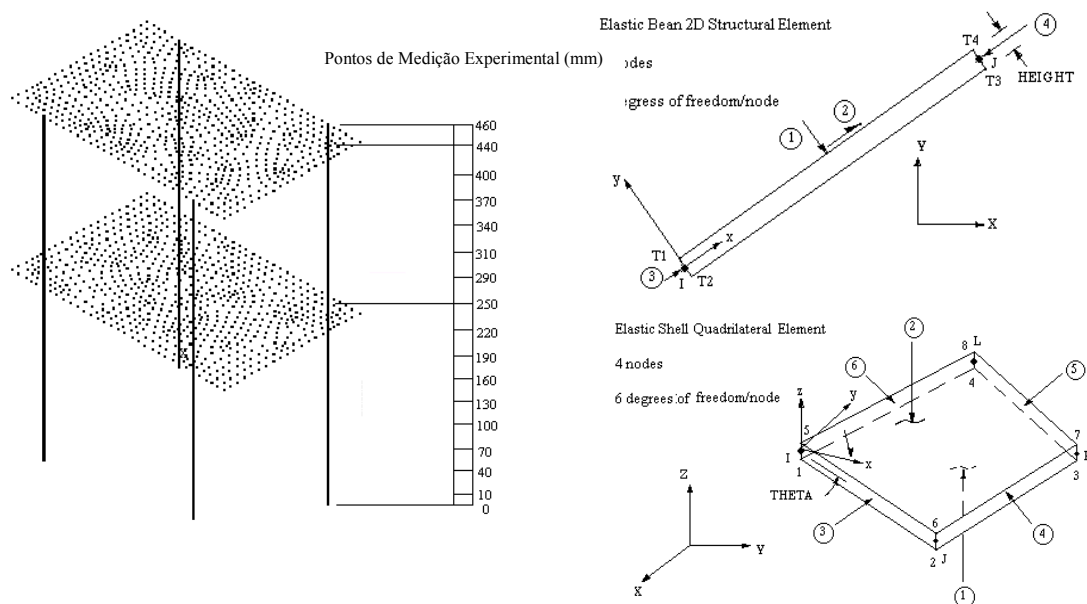


Fig. 2. Modelo Numérico, posicionamento dos nós avaliados e tipos de elementos utilizados.

onde m_1 e m_2 representam, respectivamente as massa dos pavimentos superior e inferior.

Computadas estas duas matrizes, foi possível obtenção dos dois autovalores/autovetores do sistema simplificado.

1.3. Modelo Numérico - MEF

O Método dos Elementos Finitos, comumente utilizado, é baseado no método de Rayleigh-Ritz e prevê a discretização do domínio de integração em um número finito de regiões denominadas *elementos finitos* que formam uma rede de conectividades, cada qual possuindo um determinado número de graus de liberdade [3]. Foram utilizados na modelagem das colunas de sustentação e nos pavimentos da estrutura elementos de viga e de casca, respectivamente. Os elementos de viga apresentam 2 nós e 3 graus de liberdade por nó, sendo estes, translação em x e y e rotação em z . Os elemento de casca são quadrilaterais com 4 nós e 6 graus de liberdade por nó. A condição de contorno foi estabelecida restringindo-se todos os graus de liberdade dos nós localizados nas bases das colunas de sustentação, simulando uma condição de engastamento completo. Com a intenção de determinar com elevada precisão os parâmetros modais utilizou-se o método dos subespaços [3]. Foram realizadas análises de convergência para diversos graus de refinamento das malhas, possibilitando a escolha de um modelo que conciliasse esforço computacional e precisão de resultados. Tal estudo de convergência foi realizado utilizando-se os quinze primeiros modos de vibração da estrutura, entretanto serão apresentados somente os resultados obtidos para os dois primeiros modos. A fim de garantir a compatibilidade entre a ordem dos autovetores estimados numérica e experimentalmente, as dimensões dos elementos de viga foram escolhidas de modo que apresentassem nós que correspondessem aos pontos de medição experimental, evitando-se, assim, a necessidade da utilização de técnicas numéricas de redução ou expansão de modelos [14,15,16]. O modelo numérico, os tipos de elementos finitos, e os pontos em que foram quantificados os deslocamentos modais são ilustrados na Fig. 2.

Uma vez escolhido o modelo e determinadas as duas frequências fundamentais, foram realizadas análises harmônicas. A fim de compatibilizar resultados numéricos e experimentais, utilizou-se uma força de excitação unitária e normal à estrutura, aplicada na posição similar ao ponto de excitação do shaker na estrutura física. O método numérico utilizado para a determinação da FRF foi o método completo, em que a equação (1) é resolvida diretamente [3]. Com o objetivo de se fazer um levantamento da FRF da estrutura e observar os picos de amplitude relativos às frequências naturais determinadas previamente na análise do tipo Modal, utilizou-se uma faixa de frequência entre 0 e 30 Hz. Posteriormente, varreduras mais espe-

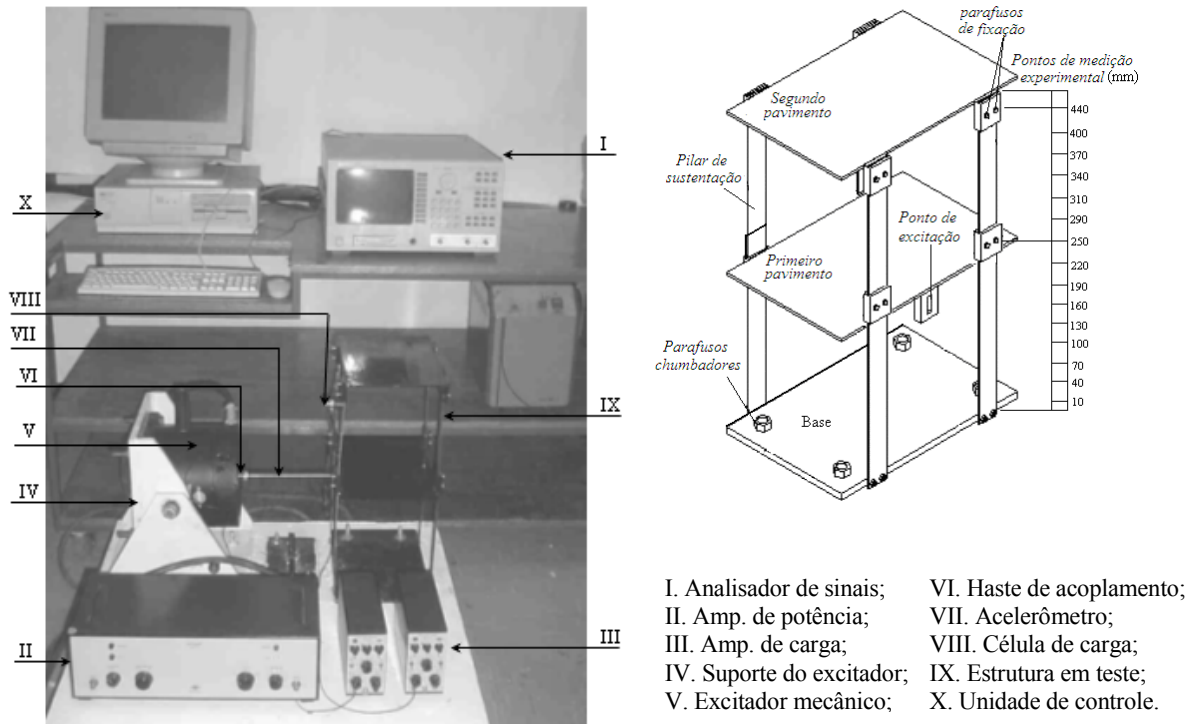


Fig. 3. Configuração da montagem experimental, modelo físico e pontos de medição experimental.

cíficas foram realizadas em torno das frequências de interesse, possibilitando a obtenção dos vetores modais representativos dos dois primeiros modos de vibração. Em todas as situações as faixas de frequência foram discretizadas em 100 segmentos iguais.

1.4. Modelo Experimental

A fim de levantar as características dinâmicas da estrutura, foi construída a bancada de ensaios experimentais apresentada na Fig. 3.

A condição de engastamento total foi aproximada por intermédio de um conjunto de parafusos chumbadores que fixaram a estrutura à base inercial representada por um bloco de concreto de 350kg. As 4 colunas de sustentação da estrutura foram fabricadas a partir de chapas de aço de 1,2 mm de espessura e cortadas para dimensões nominais de 470 x 30 mm, apresentando massas aproximadamente iguais a 132 g. Os pavimentos superior e inferior foram fabricados em chapas de aço 3 mm de espessura e cortadas para dimensões de 200 x 300 mm, com massas aproximadas de 1784 e 1926 g, respectivamente. Os pavimentos são fixados às colunas de sustentação por intermédio de conjuntos de parafusos que possibilitam variações de seu posicionamento. Na análise, o pavimento superior e o inferior foram posicionados a, respectivamente, 460 e 235 mm de altura em relação à base.

As respostas foram medidas com acelerômetro piezoelétrico axial B&K modelo 4366, fixado com cera e posicionado ao longo das colunas de sustentação em 15 pontos. A aquisição dos dados foi realizada com analisador espectral de dois canais HP35665A com o qual foram estimadas as FRFs. Foram realizadas varreduras em seno abrangendo uma ampla gama de frequências (1 a 20 Hz) com a finalidade de identificar as frequências naturais relativas aos dois primeiros modos de vibração da estrutura. A partir desta primeira análise, varreduras mais específicas foram realizadas em torno das frequências de interesse. Na determinação dos parâmetros modais foram usados os métodos de modo simples de ajuste de curvas, chamados também de modo-a-modo [17]. A partir da obtenção das FRF para os quinze pontos ao longo da estrutura pôde-se fazer o levantamento do modo de vibração.

Tabela 1. Parâmetros Metrológicos das Colunas de Sustentação.

Coluna	Largura		Espessura		Comprimento		Massa	
	Média (mm)	C.V. (%)	Média (mm)	C.V. (%)	Média (mm)	C.V. (%)	Média (g)	C.V. (%)
1	30,112	1,135	1,207	2,621	475,7	0,105	133,089	1,143
2	30,094	1,285	1,201	1,882	475,4	0,111	133,356	0,916
3	29,784	2,115	1,206	1,906	475,7	0,105	132,056	1,907
4	29,384	1,615	1,208	2,221	475,4	0,111	132,001	1,415
Todas	29,844	1,814	1,205	2,094	475,6	0,106	132,625	1,409

Com o objetivo de obter consistência estatística e avaliar a variabilidade das características dinâmicas, o procedimento acima descrito foi aplicado a 9 modelos nominalmente semelhantes. Cada modelo foi montado com um conjunto distinto de 4 colunas de sustentação, escolhidas aleatoriamente de um mesmo lote de material. Na Tabela 1 são apresentados os resultados metrológicos de cada conjunto de colunas. Como resultado desses ensaios foram obtidos 9 formas modais e 135 frequências fundamentais associadas a cada modo estudado. De forma independente também foi avaliado o efeito da vinculação dos componentes do modelo sobre a resposta dinâmica. Para isso, foram realizadas 6 montagens de um mesmo modelo e medidas as frequências fundamentais.

2. METODOLOGIA DE ANÁLISE DOS RESULTADOS

Para a validação dos resultados utilizaram-se métodos gráficos e estatísticos. Os métodos gráficos foram usados para a comparação das frequências e das formas modais. Nesta metodologia constrói-se o diagrama de dispersão entre os resultados numéricos e experimentais e são estimadas a melhor reta que passa pela origem, bem como os limites do intervalo de confiança das previsões para um nível α de confiança.

Além da estimativa das estatísticas básicas estimadas para os resultados obtidos, foram utilizados os parâmetros de MAC - “Modal Assurance Critério” e de MSF - “Modal Scale Factor” [18,9] para a comparação das estimativas dos modos de vibração obtidos numérica e experimentalmente. O MSF representa a inclinação da melhor reta que se ajusta aos pontos do gráfico, sendo sua expressão dada pela equação (9). O parâmetro MAC, ou também, MSCC - “Mode Shape Correlation Coefficient”, fornece a medida do desvio mínimo quadrático dos pontos em relação à linha de correlação, sendo computado pela equação (10).

$$\text{MSF}(x, p) = \frac{\sum_{i=1}^N (\phi_x)_i (\phi_p)_i}{\sum_{i=1}^N (\phi_p)_i (\phi_p)_i} \quad (9)$$

$$\text{MAC}_{(p,x)} = \frac{\left| \sum_{i=1}^N (\phi_x)_i (\phi_p)_i \right|^2}{\left(\sum_{i=1}^N (\phi_x)_i (\phi_x)_i \right) \left(\sum_{i=1}^N (\phi_p)_i (\phi_p)_i \right)} \quad (10)$$

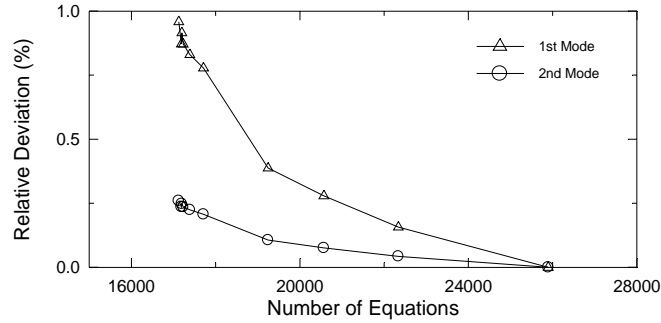


Fig. 4. Análise de convergência.

Tabela 2. Frequências fundamentais experimentais para as 9 estruturas semelhantes.

Frequência	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5	Modelo 6	Modelo 7	Modelo 8	Modelo 9	
1 ^a	Média (Hz)	4,27	3,84	5,09	3,70	4,07	3,97	3,83	3,78	4,04
	CV (%)	0,00	0,00	0,00	0,00	0,22	0,87	0,62	0,33	0,51
2 ^a	Média (Hz)	14,54	15,29	15,46	14,54	15,43	15,05	15,25	14,91	15,52
	CV (%)	0,00	0,15	0,13	0,13	0,14	0,17	0,69	0,16	0,14

Com a intenção de avaliar as variações dos parâmetros dinâmicos devido às variações aleatórias nas características intrínsecas dos modelos e as envolvidas nos procedimentos de medição, também foi utilizada a técnica de análise de variância [19], e realizada uma análise de sensibilidade do modelo segundo a equação (3).

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Com base no modelo analítico foram estimados valores iguais a 4,696 e 17,776 Hz para as duas primeiras frequências fundamentais. Tais valores serviram como referências para a ordem de grandeza dos resultados que deveriam ser encontrados numericamente e experimentalmente.

A análise de convergência dos resultados estimados por meio do método de elementos finitos é apresentada na Fig. 4. Nessa figura, verifica-se que a relação percentual, definida como desvio relativo, entre as previsões realizadas para uma malha qualquer e a malha mais refinada é inferior a 1 %, o que permitiria a utilização de qualquer nível de refinamento do modelo. Entretanto, a fim de permitir a compatibilidade entre a ordem dos autovetores estimados numericamente e experimentalmente, utilizou-se uma malha contendo 1374 elementos de casca e 5284 elementos de viga, totalizando, 3339 nós e 25896 equações. Assim, as previsões para as duas primeiras frequências fundamentais obtidas por esse método e com esse nível de refinamento foram, respectivamente, iguais a 4,01 e 16,05 Hz, resultados aproximadamente iguais aos obtidos com o modelo simplificado.

As estatísticas básicas das frequências fundamentais dos modelos experimentais são apresentadas na Tabela 2.

Analisando os resultados apresentados nessa tabela pode-se verificar a existência de variações da ordem de 10 e 2 % para a 1^a e a 2^a frequência, respectivamente. Entretanto, tal fato não se observa nas medições realizadas para um mesmo modelo, em que se observa uma variação máxima da ordem de 0,9 %, indicando baixo erro experimental e que as variações associadas ao efeito de vinculação e de variações aleatórias dos parâmetros que regem o comportamento dinâmico, tais como massas e rigidez das colunas, afetam a resposta da mesma. Tais afirmações são corroboradas pelos resultados das análises de variância

Tabela 3. Análise de variância para as medições da 1ª frequência fundamental.

<i>Fonte da variação</i>	<i>SQ</i>	<i>Gl</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>valor-P</i>	<i>F crítico</i>
Entre grupos	21,217	8	2,652	9885,4	2,3E-172	2,013
Dentro dos grupos	0,034	126	0,0002			
Total	21,251	134				

Tabela 4. Análise de variância para as medições da 2ª frequência fundamental.

<i>Fonte da variação</i>	<i>SQ</i>	<i>Gl</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>valor-P</i>	<i>F crítico</i>
Entre grupos	11,887	8	1,486	913,3	1,2E-107	2,013
Dentro dos grupos	0,205	126	0,0016			
Total	12,092	134				

Tabela 5. Frequências naturais experimentais para as 6 montagens de um mesmo modelo.

1ª Frequência		2ª Frequência	
Média (Hz)	CV (%)	Média (Hz)	CV (%)
3,87	3,31	15,01	3,08

apresentados nas Tabelas 3 e 4, nas quais se observa que a hipótese das variações entre os grupos ser igual às variações dentro dos grupos é rejeitada, visto que F é superior a $F_{crítico}$.

As estatísticas relacionadas às medições das frequências fundamentais obtidas ao se analisar o efeito da vinculação dos componentes sobre a resposta dinâmica são apresentadas na Tabela 5. Com base nos resultados apresentados nessa tabela verifica-se que a incerteza das respostas é aproximadamente constante.

Pelo estudo de sensibilidade do modelo, em que foram avaliados os efeitos das variações aleatórias da espessura, da largura, do módulo de elasticidade das colunas, das massas e dos espaçamentos entre os pavimentos sobre a resposta em frequência, pode-se verificar que a espessura e o espaçamento entre os andares contribuem de forma significativa, com valores da ordem de 30 % cada um, sobre a incerteza global da medição. Com base nos resultados metrológicos apresentados na Tabela 1 verifica-se que, somente devido aos parâmetros dimensionais, os resultados experimentais deveriam apresentar incertezas idênticas para os dois primeiros modos, com coeficientes de variação iguais a 4,4 %. Comparando a ordem de grandeza dessa incerteza com a obtida pelo efeito de vinculação, observa-se que a combinação das mesmas explica a dispersão global medida para a 1ª frequência fundamental. Entretanto, o mesmo raciocínio não é válido para explicar o reduzido desvio encontrado para a 2ª frequência fundamental.

Os resultados dos estudos analítico e numérico para as duas primeiras formas modais são apresentados na Fig 5. Com base nos resultados apresentados nessas figuras, pode-se observar nas deformadas a veracidade das hipóteses básicas utilizadas na construção do modelo analítico das colunas, ou seja: de engastamento numa extremidade e de rotação nula na extremidade oposta.

Utilizando a técnica experimental de varredura em senos as formas modais dos 9 modelos foram estimadas. Uma comparação gráfica entre os resultados obtidos experimentalmente para o 1º e 2º modos de vibração é apresentada nas Figuras 6 e 7, respectivamente. Nessas figuras, além desses resultados, faz-se também uma comparação do comportamento médio obtido experimentalmente com os respectivos resultados numérico. Pela análise desses resultados observa-se uma maior dispersão dos dados experimentais obtidos para o 1º modo em relação ao 2º modo. Além disso, verifica-se visualmente uma dispersão relativamente elevada nos deslocamentos nodais estimados para o 1º modo. Entretanto, uma análise mais consistente sobre tais resultados é realizada por meio de uma análise de dispersão e da medida dos parâmetros MAC e MSF.

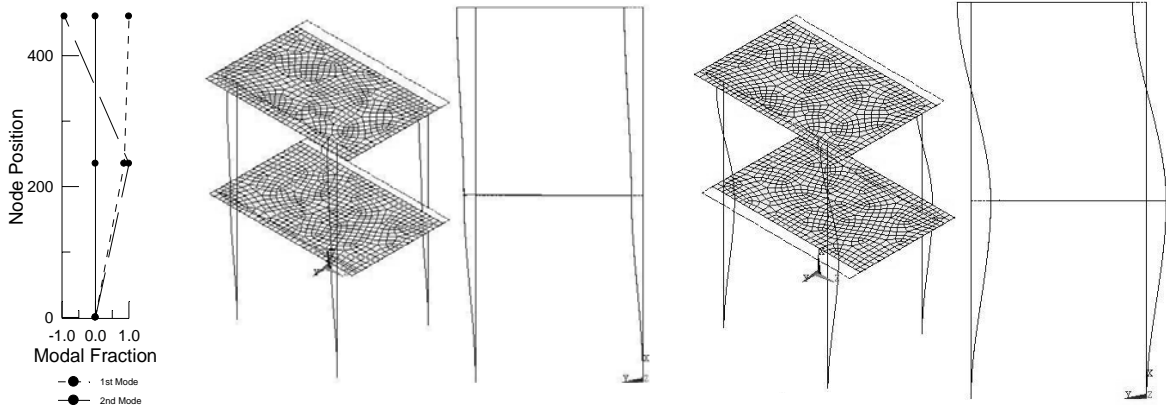


Fig. 5. Modos de vibração: (a) modelo analítico, (b) 1º modo do MEF, (c) 2º modo do MEF.

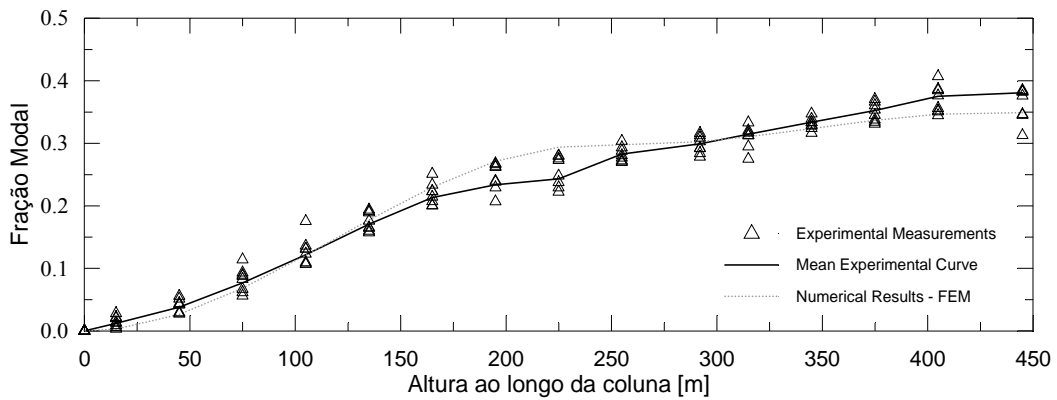


Fig. 6. Comparação dos resultados obtidos para a forma do 1º modo de vibração.

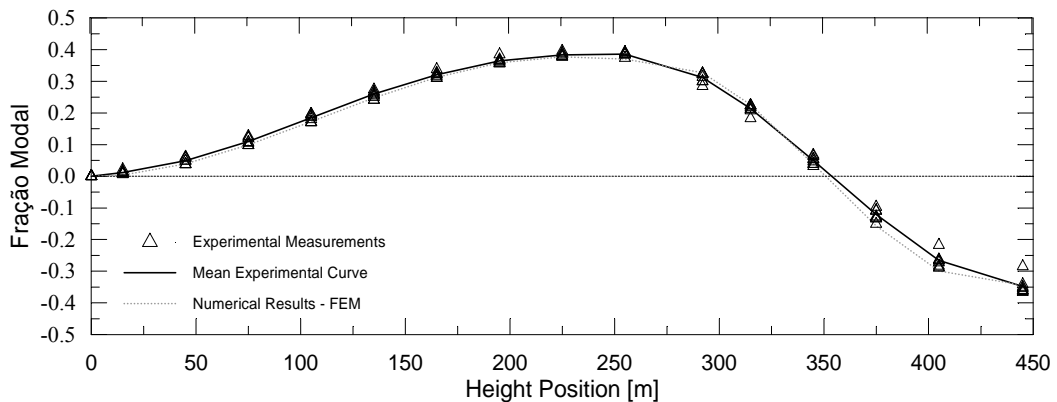


Fig. 7. Comparação dos resultados obtidos para a forma do 2º modo de vibração.

Os diagramas de dispersão são apresentados na Fig. 8. A análise desses gráficos permite comparar as formas modais obtidas experimental e numericamente, observando-se a localização da maioria dos resultados dentro dos limites de confiança das previsões para um nível de 95% de confiança, assim como, corrobora a presença de uma maior dispersão dos dados relativos ao 1º modo de vibração, quando compara-

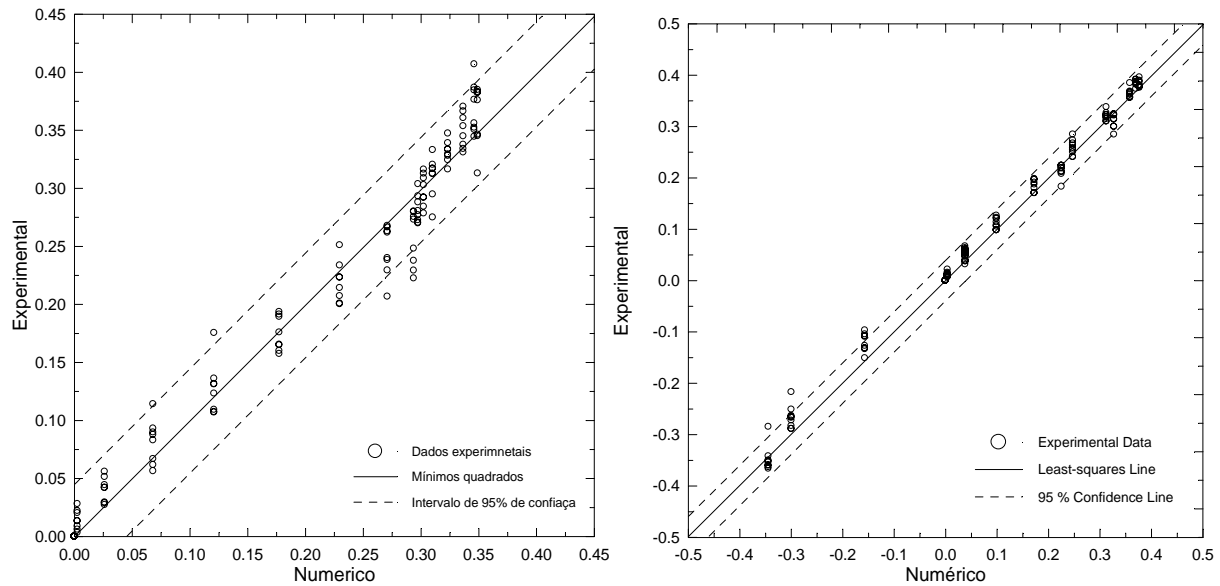


Fig. 8. Diagramas de dispersão das formas modais do (a) 1° modo de vibração, (b) 2° modo de vibração.

Tabela 6. MSF entre os vetores modais experimentais e numéricos ajustado.

Modo	MSF								
	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5	Modelo 6	Modelo 7	Modelo 8	Modelo 9
1°	0,927	0,987	0,911	0,902	0,985	0,852	0,896	0,994	0,687
2°	0,972	0,980	0,980	0,976	0,943	0,964	0,962	0,997	0,984

Tabela 7. MAC entre os vetores modais experimentais e numéricos ajustado.

Modo	MAC								
	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5	Modelo 6	Modelo 7	Modelo 8	Modelo 9
1°	0,997	0,998	0,995	0,987	0,989	0,986	0,986	0,996	0,926
2°	0,995	0,999	0,999	0,998	0,981	0,992	0,994	0,995	0,992

dos ao 2° modo. Pela análise da melhor reta ajustada aos pontos e que passa pela origem, observa-se sua semelhança à reta ideal de inclinação 45°, demonstrando um bom nível de correlação dos dados obtidos numérica e experimentalmente.

Na avaliação analítica da correlação entre resultados numéricos e experimentais com a utilização dos parâmetros MSF e MAC foram encontrados os valores apresentados nas Tabela. 6 e 7, respectivamente. Pela análise do parâmetro MSF é possível verificar que a inclinação da melhor reta que se ajusta aos pontos do gráfico de dispersão aproxima-se da reta ideal de inclinação 45° para a grande maioria dos modelos. Esta análise de consistência é confirmada pelos valores encontrados para o parâmetro MAC, determinando que o desvio mínimo quadrático dos pontos em relação à linha de correlação são próximos da unidade, resultando numa elevada correlação entre os resultados obtidos.

4. CONCLUSÕES

Nesse trabalho procurou-se avaliar e quantificar as incertezas envolvidas no processo de modelagem de uma estrutura de dois pavimentos por intermédio de previsões teórica, numérica e experimental de sua resposta dinâmica. Para isso foram construídos 9 modelos visando o estudo experimental. A solução analítica baseou-se num modelo de dois graus de liberdade, cuja matriz de rigidez foi construída com a hipó-

tese de que a estrutura é submetida a cisalhamento puro. A solução em elementos finitos foi discretizada utilizando-se uma combinação de elementos de casca para a representação dos pavimentos e elementos de viga para a representação das colunas. Com base nos resultados encontrados pôde-se verificar que, sob o ponto de vista médio, as previsões numéricas e experimentais para as frequências fundamentais dos dois primeiros modos de vibração proporcionaram resultados similares, com desvio máximo da ordem de 5 %, entretanto o mesmo não se pode dizer em relação aos resultados analíticos que proporcionaram desvios da ordem de 15 %, servindo somente como uma aproximação inicial. A quantificação das incertezas envolvidas na resposta dinâmica da estrutura pôde ser evidenciada com base nos resultados analíticos e experimentais. A combinação da incerteza estimada analiticamente, igual a 4,4%, acopladas às medidas para o efeito de vinculação, da ordem de 3%, permitiu explicar de maneira satisfatória a dispersão global observada para o modo de vibração dominante. Os parâmetros de MAC e MSF demonstraram a consistência e concordância entre os resultados obtidos numérica e experimentalmente.

REFERÊNCIAS

- [1] R. J. Allemang, D. L. Brown, *Experimental Modal Analysis – Handbook of Shock and Vibrations*, McGraw-Hill (1988)
- [2] M. Rades, “Modal analysis Using Frequency Response Measurement Data”, *Shock and Vibration Digest*, **20**(1), 237-255 (1988).
- [3] K. J. Bathe, E. Wilson, “Numerical Methods in Finit Element Analysis”, Ed. Prentice Hall, Nova Jersey, EUA (1996)
- [4] B. R. Ellis, J. D. Littler, “Dinamic Response of Nine Similar Tower Blocks”, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, Vol. 28 (1998)
- [5] T. P. Chang, “Dinamic Finite Element Analysis of a Beam on Random Foundation”, *Computer & Structures*, **48**(4), 583 – 589 (1993)
- [6] C. Papadimitriou, L. S. Katafygiotis, J. L. Beck, “Approximate Analysis of Response Variability of Uncertain Linear Systems”, *Probabilistic Engineering Mechanics*, **10**, 251–264 (1995)
- [7] A. B. S. Oliveira, “Caracterização por Análise Modal Experimental do Comportamento Dinâmico de Painéis de Satélites, Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Unb, (1997)
- [8] S. S. Rao, *Mechanical Vibrations*, Addison-Wesley, Third Edition, Nova Iorque, USA (1995)
- [9] D. J. Ewins, *Modal Testing: Theory and Practice*, Ed. Jonh Wiley & Sons Inc (2000)
- [10] B. M. Ayyub, A. Haldar, “Practical Structural Reliability Techniques”, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Japão, **110**(8), Aug, 1707–1725 (1984)
- [11] C. F. Beards, *Structural Vibration-Analysis and Damping*, John Wiley&Sons Inc., Nova Iorque, USA (1996)
- [12] W. T. Thomson, *Teoria da Vibração com aplicação*, Ed. Interciência, Rio de Janeiro, Brasil (1978)
- [13] R. F. Jr. Seidel, *An Introduction to Mechanical Vibration*, John Wiley&Sons Inc., Third edition, Nova Iorque, USA (1986)
- [14] R. J. Guyan, “Reduction of Stiffness and Mass Matrices”, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, **22** (11), 16.16-16.17 (1965)
- [15] D. J. Ewins, J. He, “Compatibility of Measured and Practiced Vibration Modes in Model Improvement Studies”, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, **29**(5), 798-803 (1991)
- [16] K. O. Kim, W. J. Anderson, “Generalized Dynamic Reduction in Finit Element Dynamic Optimization”, *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, **29**(5), 798-803 (1984)
- [17] A. L. A. Mesquita, “Análise Modal Experimental - Comparação com resultados de Simulação Numérica”, Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Unb (1996)
- [18] HP Application Note 243-3, “The Fundamentals os Modal Testing”, Hewlett Packard, Washington, USA (1986)
- [19] B. J. F. Murteira, *Probabilidades e Estatística*, McGraw-Hill, 2, Second Edition, Portugal (1990)

DYNAMIC ANALYSIS OF THE REDUCED MODEL OF A TWO-STOREY SHEAR BUILDING

Abstract – In this paper, experimental, analytical and numerical methods are used to evaluate the dynamic behavior of the reduced model of a two-storey shear building. The experimental methodology is based on sweep sine techniques and the frequency domain method (Allemang, 1988, Rades, 1988), where the modal parameters are obtained directly from the information contained on the frequency response functions. The uncertainties involved on the dynamic response are estimated primarily due to: (1) boundary conditions effects, (2) variability of the mechanical and dimensional properties of the components of the structure. A lumped system is used for the analytical formulation. Based on the Finite Element Method (Bathe, 1996), modal and harmonic analysis are performed in order to simulate the dynamic behavior of the ideal structure. The results achieved by means of the different methods were compared and it was possible to, not only, validate the numerical idealized model, but also, verify the consistency of the experimental results and quantify the uncertainties involved on the dynamic response of the structure.

Keywords – Modal analysis, sensitivity analysis, structural vibrations, mode shapes.