



## UN MÉTODO ANALÍTICO DE ANÁLISIS CINEMÁTICO DE MECANISMOS ARTICULADOS

BORIS F. VORONIN, JESÚS A. ÁLVAREZ SÁNCHEZ

Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingeniería,  
Universidad de Guadalajara, División de Ingenierías, Departamento de Ingeniería Mecánica Eléctrica  
Av. Revolución 1500, Guadalajara, Jalisco, México, C.P. 44430

*(Recibido 11 de marzo de 2006, revisado 28 de junio de 2006, para publicación 20 de diciembre de 2007)*

**Resumen** – En el artículo se propone un nuevo método analítico para el análisis cinemático de mecanismos articulados planos, que consiste en la combinación de los métodos del álgebra vectorial y del método de L.V. Assur, el cual se basa en la construcción de los mecanismos articulados a partir de grupos estructurales y de mecanismos de primera clase. Se muestra el modo de obtención de las ecuaciones para el análisis cinemático de los mecanismos de primera clase y de los grupos estructurales de segunda clase de tercera variedad. El enfoque propuesto simplifica mucho el análisis de mecanismos de cualquier grado de la complejidad ya que esto no requiere la formulación de las ecuaciones para el mecanismo completo. El mecanismo se presenta compuesto de bloques que tienen en su estructura mecanismos de primera clase, grupos estructurales y el conjunto de ecuaciones que los acompañan. Para mostrar el método se toman, como ejemplo, mecanismos planos de cuatro eslabones. El método está dirigido a los profesores que imparten clases de Teoría de Mecanismos y Máquinas, a los ingenieros diseñadores de sistemas mecánicos y a los ingenieros que desarrollan SOFTWARE.

**Palabras clave** – Teoría de mecanismos, eslabón, mecanismo articulado, análisis cinemático.

### 1. INTRODUCCIÓN

En diferentes textos básicos y de la especialidad se efectúa el análisis cinemático y de fuerzas de mecanismos articulados de forma gráfica. Por su parte, los que utilizan métodos analíticos formulan las ecuaciones para mecanismos completos. Por ejemplo en [6] y [8], el esquema cinemático de un mecanismo se representa como una figura geométrica compuesta por rectas y, empleando correlaciones geométricas, utilizan ecuaciones en forma cuadrática. El empleo de éste método define solamente la magnitud de los vectores; para determinar su dirección y sentido hay que emplear métodos adicionales.

En otros libros [3,4,7-11,13-15] para el análisis cinemático se emplea el álgebra vectorial, donde se describen conceptos para la formulación de las ecuaciones de algunos mecanismos en forma de un sistema cerrado. Ya que la cantidad de mecanismos es infinita, se supone, que la cantidad de ecuaciones también va a ser infinita lo que está demostrado en los libros [9] y [10] editados en España y en México que emplearon este método.

Los métodos antes descritos son rígidos, es decir, están destinados al análisis de mecanismos concretos. Por eso no permiten unificar los cálculos lo que dificulta formar programas más generales para la modelación matemática lo que reduce la capacidad para ser implementados en la técnica informática contemporánea. En el nivel de enseñanza superior el empleo de este método dificulta el aprendizaje de la materia por los alumnos, lo que reduce el horizonte de los ingenieros del futuro.

Todo esto se simplifica con el uso del método elaborado por el profesor del Instituto Politécnico de Petersburgo (Rusia) L.V. Assur [2] el cual presentó todos los mecanismos articulados compuestos de mecanismos de primera clase y de grupos estructurales. Con el objetivo de facilitar la lectura del contenido del presente artículo, se comenzará recordando los fundamentos del método de composición de mecanismos articulados propuesto por Assur.

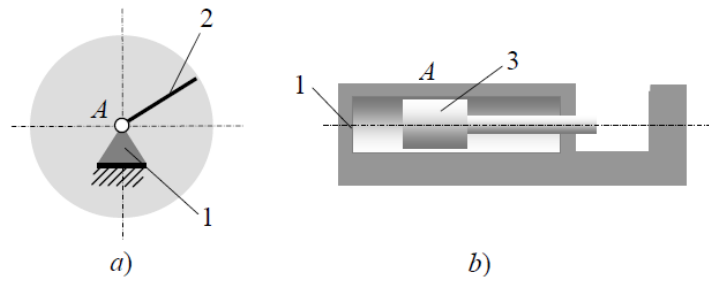


Fig. 1. Dos tipos de mecanismos de primera clase: a) el eslabón móvil está unido con la base mediante el par cinemático de rotación y b) mediante el par de traslación.

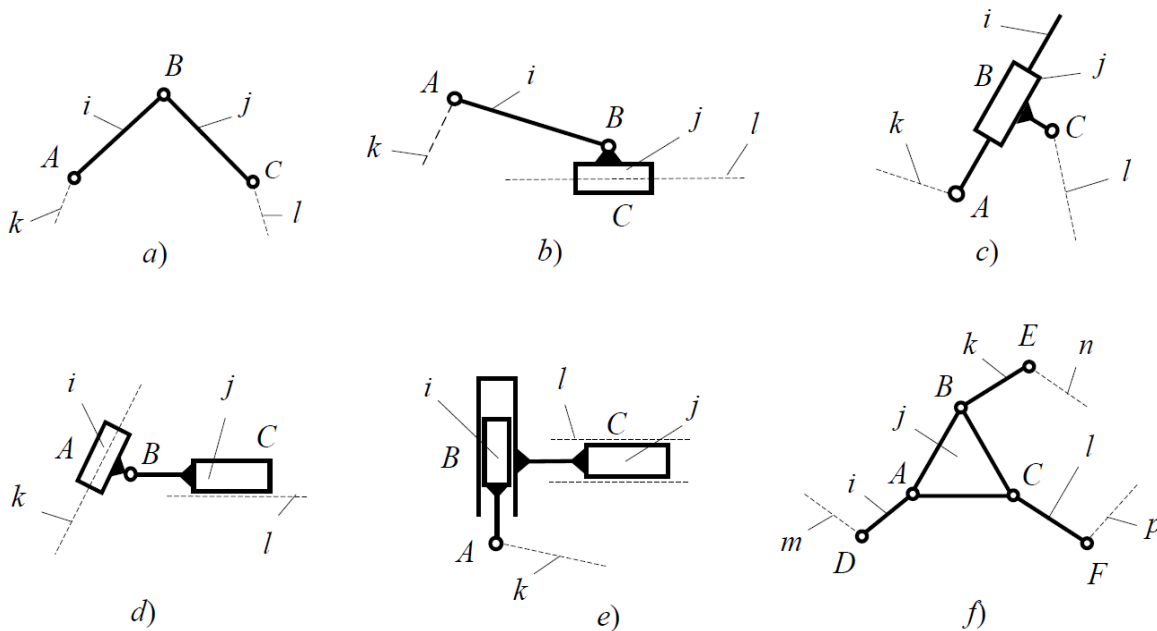


Fig. 2. Grupos estructurales de Assur de a) a e) son de segunda clase y f) es de tercera clase. Además, los de segunda clase se dividen en variedades. Estas son: a) de primera variedad; b) de segunda variedad; c) de tercera variedad; d) de cuarta variedad y e) de quinta variedad.

Assur divide un mecanismo en cadenas cinemáticas abiertas con movilidad igual a uno y con movilidad nula. A los primeros los nombré como mecanismos de primera clase y a los segundos, como grupos estructurales.

En la Fig. 1, se muestran dos tipos de mecanismos de primera clase. Éstos están compuestos de dos eslabones, un eslabón es inmóvil, la base 1, y el otro es móvil: la manivela 2 representada en la Fig. 1a y la corredera 3 representada en la Fig. 1b.

Los grupos estructurales tienen solamente eslabones móviles. En la Fig. 2 están representados todos los grupos estructurales de segunda clase y un grupo de tercera clase [1, 15].

A su vez, los mecanismos articulados se dividen en clases. La clase viene determinada por el grupo estructural de la clase mayor que entra en su estructura. Los métodos para la síntesis y el análisis se diferencian entre sí en correspondencia con la clase del mecanismo; por eso antes de todo se debe comenzar por definir la clase del mecanismo.

El análisis presentado en este artículo, se limita a los mecanismos de segunda clase.

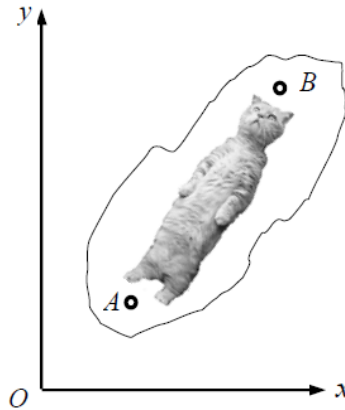


Fig. 3. En un cuerpo rígido y duro no hay movimiento relativo entre los puntos diferentes, no hay diferencia en el movimiento.

## 2. ANÁLISIS CINEMÁTICO

### 2.1. Formulación analítica del mecanismo

En la Teoría de Máquinas y Mecanismos (TMM) la solución de los problemas de análisis de mecanismos comienza con la construcción del esquema cinemático. La información requerida para construcción de éste, mediante el método gráfico, se obtiene con relativa facilidad a partir de dibujos y esquemas.

En el ensamble de los eslabones, desde el punto de vista analítico, se opera con vectores. La posición de éstos, en el espacio tridimensional, viene dada por las coordenadas de dos puntos o por la coordenada de un solo punto, la longitud y el ángulo de orientación de este vector. En la formulación analítica de un mecanismo se utiliza un concepto fundamental: un mecanismo es una cadena cinemática cerrada que tiene un eslabón fijo y un número de grados de libertad igual a uno o mayor que uno.

Para no complicar la explicación, en este artículo se analizan solamente mecanismos planos con un número de grados de libertad igual a uno, es decir, mecanismos que tienen un solo eslabón de entrada.

Antes de iniciar las explicaciones hay que prestar atención a una interpretación errónea a la que se puede llegar en algunos libros de texto [3,5,7,11-13] relacionada con la disposición y el movimiento de diferentes puntos del mismo eslabón. Por ejemplo en el libro [13, p. 67] se dice: “sólo la rotación contribuye a la diferencia de desplazamiento entre dos puntos del mismo cuerpo, es decir, no existe diferencia alguna entre los desplazamientos de dos puntos cualesquiera del mismo cuerpo rígido como resultado de traslación”; de manera similar se explica el movimiento relativo en [7, p.p. 352-353] y en [12, p. 61]. En el libro [3, p.p. 138-139] con referencia a [5], y también en [11, p. 233] se razona sobre “la diferencia de posición” y “el movimiento de diferencia”, cuando se trata de puntos del mismo eslabón y, como alternativa, sobre la “posición relativa” y el “movimiento relativo” cuando se trata de puntos de diferentes eslabones. Por esta razón la expresión de las ecuaciones tiene diferente forma. Por ejemplo, en [13, p.p. 81-98], para el punto B del eslabón  $i$  unido con el  $j$  mediante el par cinemático de rotación se usa la siguiente forma  $\underline{v}_B = \underline{v}_A + \underline{v}_{BA}$  y para el mismo eslabón unido con el otro mediante el par de traslación la siguiente:  $\underline{v}_{Bj} = \underline{v}_{Ai} + \underline{v}_{BjAi}$ . De igual forma se expresan estas ecuaciones en otros libros de texto.

El carácter erróneo de esta interpretación se puede comprobar fácilmente con el ejemplo representado en la Fig. 3. Al pegar una figura al cuerpo rígido, disponerlo en el sistema de coordenadas  $xy$  y darle un movimiento de rotación, o de traslación, se puede notar que las partes de la figura no se mueven una respecto a otra ya que están pegadas al cuerpo rígido, por consiguiente, tampoco va a existir movimiento relativo entre los puntos  $A$  y  $B$  de este cuerpo.

De aquí se puede concluir que, no existe movimiento entre los puntos ubicados en un mismo cuerpo rígido, independientemente del tipo del movimiento, ya sea de traslación o de rotación. El movimiento

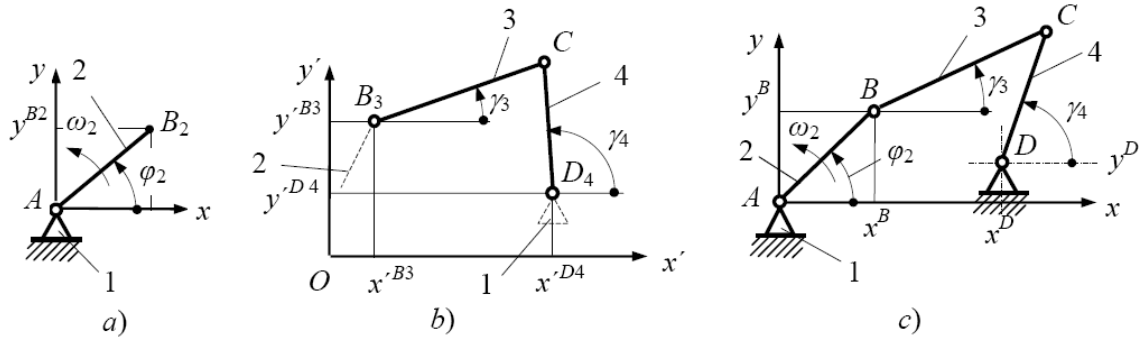


Fig. 4. Etapas de ensamble analítico de un mecanismo.

relativo aparece solamente cuando el cuerpo se dispone en un sistema de coordenadas  $xy$ , o cuando el cuerpo se une con otro mediante un par cinemático. Pero este movimiento no es el movimiento entre los puntos del mismo cuerpo, sino entre los puntos de un cuerpo respecto a los del sistema de coordenadas o respecto a los del otro cuerpo y viceversa.

Por supuesto los autores del artículo suponen que todos los razonamientos presentados en los libros a que se ha hecho referencia se hacen teniendo en cuenta que los cuerpos están ubicados en sistemas de coordenadas y realmente se trata del movimiento de los cuerpos en éstos y del movimiento de los puntos respecto a los del sistema de coordenadas. Pero consideran que estos razonamientos están expresados de manera imprecisa y pueden provocar errores en la imaginación de los alumnos y dificultar el estudio de la materia.

Debido a esto, se recomienda marcar los puntos de diferentes eslabones ubicados en el mismo par cinemático indicando el número del eslabón concreto al que este punto pertenece. También se recomienda indicar la ubicación de los puntos con el número del eslabón, por lo que los vectores de velocidad, de aceleración y de fuerzas, estarán aplicados en puntos concretos.

Por esta razón, en el artículo los puntos de diferentes eslabones, se indican con el número del eslabón al que pertenecen como superíndice, aunque esto no resulta imprescindible.

El empleo de estas herramientas, en la enseñanza de la materia, proporciona al profesor un instrumento muy importante: la unificación de la escritura de las ecuaciones, la que no dependerá del tipo de par cinemático que une los eslabones.

Continuando con la formulación analítica se tomará como ejemplo el mecanismo de balancín representado en la Fig. 4 el cual está compuesto por un mecanismo de primera clase y por un grupo estructural de segunda clase, de primera variedad.

Se supone que se conoce: la disposición de la base, que en el sistema de coordenadas  $xy$  está representada por las coordenadas de los puntos  $A_1(0, 0)$  y  $D_1(x_{D1}, y_{D1})$ ; las longitudes de los eslabones  $L_2$ ,  $L_3$  y  $L_4$ ; la coordenada generalizada  $\varphi_2$  de la manivela 2.

Al colocar el mecanismo de primera clase (Fig. 4a) en el sistema de coordenadas  $xy$  se obtienen las ecuaciones del mecanismo de primera clase:

$$\begin{aligned} x^{B2} &= x^{A1} + L_{AB} \cdot \cos \varphi_2 \\ y^{B2} &= y^{A1} + L_{AB} \cdot \sin \varphi_2 \end{aligned} \quad (1)$$

Asimismo, las ecuaciones del grupo estructural de segunda clase de primera variedad, colocado en el sistema de coordenadas  $x'y'$  (Fig. 4b), tendrán la forma siguiente:

$$\begin{aligned} x_1^{D4} &= x_1^{B3} + L_{BC} \cos \gamma_3 - L_{CD} \cos \gamma_4 \\ y_1^{D4} &= y_1^{B3} + L_{BC} \sin \gamma_3 - L_{CD} \sin \gamma_4 \end{aligned} \quad (2)$$

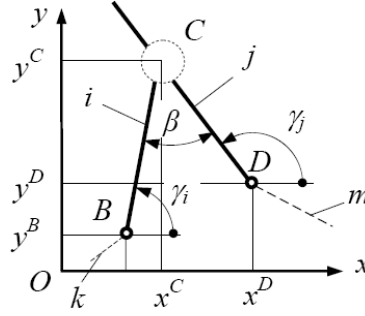


Fig. 5. Esquema de un grupo estructural convencional.

Al colocar el mecanismo primario y el grupo estructural en un solo sistema de coordenadas  $xy$  (Fig. 4c) y unir los eslabones 2 y 3 mediante el par cinemático  $B$  en que  $x^{B3} = x^{B2}$ ,  $y^{B3} = y^{B2}$ , también el eslabón 4 con la base 1 mediante el par  $D$  con  $x^{D4} = x^{D1}$ ,  $y^{D4} = y^{D1}$ , se obtiene una nueva cadena cinemática. Su representación matemática es:

$$\begin{aligned} x^D &= L_{AB} \cos \varphi_2 + L_{BC} \cos \gamma_3 - L_{CD} \cos \gamma_4 \\ y^D &= L_{AB} \sin \varphi_2 + L_{BC} \sin \gamma_3 - L_{CD} \sin \gamma_4 \end{aligned} \quad (3)$$

El sistema de ecuaciones (3) representa un sistema cinemático cerrado, que se conoce como sistema de ecuaciones de cierre del mecanismo o simplemente la ecuación del mecanismo.

El sistema de ecuaciones (3) aparece en numerosos libros, como en [1...12, 14] y no es el objeto del artículo presente. Del análisis presentado se puede llegar a una conclusión importante y es que para la representación analítica de un mecanismo no es necesario formular la ecuación del sistema cinemático cerrado: es suficiente con tener la ecuación del mecanismo de primera clase, las de los grupos estructurales y el modo de su unión. En la formación de los mecanismos de segunda clase hay que tener en cuenta que para obtener uno con un grado de libertad, los pares cinemáticos externos de los grupos estructurales deben estar unidos del modo siguiente: uno con la base y otro con el eslabón móvil del mecanismo de primera clase o con un eslabón móvil del grupo estructural anterior.

## 2.2. Concepto básico de análisis cinemático

Para definir las ecuaciones de las velocidades y las de las aceleraciones es muy útil emplear el procedimiento siguiente.

Se toma un grupo estructural convencional, como el representado en la Fig. 5, en que el eslabón  $j$  se une con el  $i$  mediante el par cinemático  $C$ , el que puede ser de rotación o de traslación orientado a lo largo del eslabón  $j$ . Tomando la posición del punto  $C$  del eslabón  $j$  en relación con el  $C$  del  $i$  en el par cinemático mencionado, se considerará que los puntos  $C_j$  y  $C_i$  coinciden; por eso la distancia  $L_{C_j C_i}$  es igual a cero pero, dependiendo del tipo del par cinemático, el punto  $C_j$  puede tener un movimiento de traslación respecto al  $C_i$  coincidente con la dirección del eslabón  $j$ . También se considera, que están dadas las coordenadas del punto  $B$  del eslabón  $k$ , la magnitud y dirección de velocidad, así como la de aceleración del mismo y el ángulo  $\gamma_i$  de la posición del eslabón  $i$ .

Entonces, de la Fig. 5 se tiene:

$$\begin{aligned} x^{C_j} &= x^{Bk} + L_{BC} \cos \gamma_i + L_{C_j C_i} \cos \gamma_j \\ y^{C_j} &= y^{Bk} + L_{BC} \sin \gamma_i + L_{C_j C_i} \sin \gamma_j \end{aligned} \quad (4)$$

Teniendo en cuenta que en el par cinemático de traslación  $\gamma_j = \gamma_i + \beta$ , el sistema (4) se presentará como:

$$\begin{aligned}x^{Cj} &= x^{Bk} + L_{BC} \cos \gamma_i + L_{CjCi} \cos(\gamma_i + \beta) \\y^{Cj} &= y^{Bk} + L_{BC} \sen \gamma_i + L_{CjCi} \sen(\gamma_i + \beta)\end{aligned}\quad (5)$$

Al derivar (5) respecto al tiempo se obtiene el sistema de ecuaciones de la velocidad del punto  $C_j$ :

$$\begin{aligned}\dot{x}^{Cj} &= \dot{x}^{Bk} - L_{BC} \dot{\gamma}_i \sen \gamma_i + \dot{L}_{CjCi} \cos(\gamma_i + \beta) - L_{CjCi} \dot{\gamma}_i \sen(\gamma_i + \beta) \\ \dot{y}^{Cj} &= \dot{y}^{Bk} + L_{BC} \dot{\gamma}_i \cos \gamma_i + \dot{L}_{CjCi} \sen(\gamma_i + \beta) + L_{CjCi} \dot{\gamma}_i \cos(\gamma_i + \beta)\end{aligned}\quad (6)$$

en donde  $x^{Bk}$  e  $y^{Bk}$  son los componentes del vector velocidad del punto  $B$  del eslabón  $k$  (ésta se considera como la velocidad de traslación). Los componentes que siguen serán los de las velocidades relativas. La derivada  $\dot{\gamma}_i$  es la velocidad angular del eslabón  $i$ , entonces, el término  $L_{BC} \dot{\gamma}_i$  representa la velocidad del punto  $C$  del eslabón  $i$  en el movimiento giratorio respecto al  $B$  del  $k$ . La derivada  $\dot{L}_{BC}$  representa la velocidad del movimiento lineal del punto  $C$  del eslabón  $j$  respecto al  $C$  del  $i$ , cuando los eslabones están unidos mediante el par cinemático de traslación.

Al derivar el sistema de ecuaciones (6) se tiene:

$$\begin{aligned}\ddot{x}^{Cj} &= \ddot{x}^{Bk} - L_{BC} \ddot{\gamma}_i \sen \gamma_i - L_{BC} \dot{\gamma}_i^2 \cos \gamma_i + \ddot{L}_{CjCi} \cos(\gamma_i + \beta) - 2\dot{L}_{CjCi} \dot{\gamma}_i \sen(\gamma_i + \beta) - \\ &L_{CjCi} \ddot{\gamma}_i \sen(\gamma_i + \beta) - L_{CjCi} \dot{\gamma}_i^2 \cos(\gamma_i + \beta) \\ \ddot{y}^{Cj} &= \ddot{y}^{Bk} + L_{BC} \ddot{\gamma}_i \cos \gamma_i - L_{BC} \dot{\gamma}_i^2 \sen \gamma_i + \ddot{L}_{CjCi} \sen(\gamma_i + \beta) + 2\dot{L}_{BC} \dot{\gamma}_i \cos(\gamma_i + \beta) + \\ &L_{CjCi} \ddot{\gamma}_i \cos(\gamma_i + \beta) - L_{CjCi} \dot{\gamma}_i^2 \sen(\gamma_i + \beta)\end{aligned}\quad (7)$$

En el sistema de las ecuaciones (7) los términos  $\ddot{x}^{Bk}$  y  $\ddot{y}^{Bk}$  son los del vector del movimiento de traslación acelerado. La derivada  $\ddot{\gamma}_i$  es la aceleración angular del eslabón  $i$ ; entonces, el término  $L_{BC} \ddot{\gamma}_i$  representa la aceleración tangencial del punto  $C_i$  en el movimiento giratorio respecto al  $B_k$  y el  $L_{BC} \dot{\gamma}_i^2$  representa la aceleración normal (centrípeta) del mismo. El término  $\ddot{L}_{BC}$  representa la aceleración del movimiento lineal del punto  $C_j$  respecto al  $C_i$  cuando los eslabones  $i$  y  $j$  están unidos mediante el par cinemático de traslación y el término  $2\dot{L}_{BC} \dot{\gamma}_i$  es la aceleración de Coriolis en el mismo par cinemático.

Teniendo en cuenta que  $L_{CjCi} = 0$ , en los sistemas de ecuaciones (6) y (7) resulta  $L_{CjCi} \dot{\gamma}_i = 0$ ,  $L_{CjCi} \dot{\gamma}_i = 0$  y  $L_{CjCi} \dot{\gamma}_i^2 = 0$ .

Así pues, cuando los eslabones están unidos mediante el par cinemático de rotación, los puntos  $C_j$  y  $C_i$  se ubican en un eje; por tanto:

$$\begin{aligned}x^{Cj} &= x^{Ci} \\ y^{Cj} &= y^{Ci}\end{aligned}$$

En este caso el sistema de ecuaciones (6) se puede escribir como:

$$\begin{aligned}\dot{x}^{Cj} &= \dot{x}^{Bk} - L_{BC} \dot{\gamma}_i \sen \gamma_i \\ \dot{y}^{Cj} &= \dot{y}^{Bk} + L_{BC} \dot{\gamma}_i \cos \gamma_i\end{aligned}\quad (8)$$

y el sistema (7):

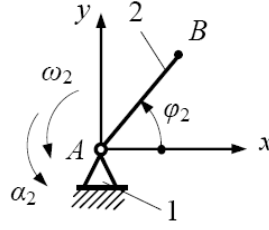


Fig. 6. Esquema para la formulación de la ecuación del mecanismo de primera clase.

$$\begin{aligned}\ddot{x}^{Cj} &= \ddot{x}^{Bk} - L_{BC}\ddot{\gamma}_i \text{sen } \gamma_i - L_{BC}\dot{\gamma}_i^2 \text{cos } \gamma_i \\ \ddot{y}^{Cj} &= \ddot{y}^{Bk} + L_{BC}\ddot{\gamma}_i \text{cos } \gamma_i - L_{BC}\dot{\gamma}_i^2 \text{sen } \gamma_i\end{aligned}\quad (9)$$

Cuando los eslabones se unen mediante el par cinemático de traslación, el eslabón  $j$  tiene un movimiento complejo: junto con el  $i$  en el par cinemático de rotación  $B$  y respecto al  $i$  en el par de traslación  $C$ . Entonces, el sistema de ecuaciones (6) toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}^{Cj} &= \dot{x}^{Bk} - L_{BC}\dot{\gamma}_i \text{sen } \gamma_i + \dot{L}_{CjCi} \text{cos}(\gamma_i + \beta) \\ \dot{y}^{Cj} &= \dot{y}^{Bk} + L_{BC}\dot{\gamma}_i \text{cos } \gamma_i + \dot{L}_{CjCi} \text{sen}(\gamma_i + \beta)\end{aligned}\quad (10)$$

y el (7):

$$\begin{aligned}\ddot{x}^{Cj} &= \ddot{x}^{Bk} - L_{BC}\ddot{\gamma}_i \text{sen } \gamma_i - L_{BC}\dot{\gamma}_i^2 \text{cos } \gamma_i + \ddot{L}_{CjCi} \text{cos}(\gamma_i + \beta) - 2\dot{L}_{CjCi}\dot{\gamma}_i \text{sen}(\gamma_i + \beta) \\ \ddot{y}^{Cj} &= \ddot{y}^{Bk} + L_{BC}\ddot{\gamma}_i \text{cos } \gamma_i - L_{BC}\dot{\gamma}_i^2 \text{sen } \gamma_i + \ddot{L}_{CjCi} \text{sen}(\gamma_i + \beta) + 2\dot{L}_{BC}\dot{\gamma}_i \text{cos}(\gamma_i + \beta)\end{aligned}\quad (11)$$

En el caso en que el eje del par cinemático de rotación  $B$  atraviesa la línea de simetría del par de traslación  $C$ , es decir, cuando  $L_{BC}=0$ , el segundo término en el sistema de ecuaciones (10) y el segundo y tercero en el (11) serán iguales a cero.

Teniendo en cuenta que  $\dot{L}$  es  $v$ ,  $\ddot{L}$  es  $a$ ,  $\dot{\gamma}$  es  $\omega$  y  $\ddot{\gamma}$  es  $\alpha$ , e indicando con subíndices la pertenencia de estos parámetros a cierto punto de un eslabón, en lo adelante se transformarán las ecuaciones de la 8 a la 11.

La aplicación de las ecuaciones obtenidas no presenta dificultades. Brevemente se mostrará el uso de las mismas en un mecanismo de primera clase y para un grupo estructural de segunda clase, de tercera variedad.

### 2.3. Sistema de ecuaciones para el mecanismo de primera clase

En la Fig. 6 está representado el mecanismo de primera clase con el par cinemático de rotación  $A$  colocado en el inicio del sistema de coordenadas  $xy$ . A pesar de que las coordenadas del punto  $A$  son  $(0, 0)$ , también son iguales a cero la velocidad y aceleración del mismo; en la enseñanza, para la formación de hábitos estables por los alumnos, se recomienda formular los sistemas de ecuaciones (5), (8) y (9) de la siguiente forma:

- ecuación del mecanismo:

$$\begin{aligned}x^{B2} &= x^{A1} + L_{AB} \cdot \text{cos } \varphi_2 \\ y^{B2} &= y^{A1} + L_{AB} \cdot \text{sen } \varphi_2\end{aligned}\quad (12)$$

- sistema de ecuaciones de la velocidad del punto  $B_2$ :

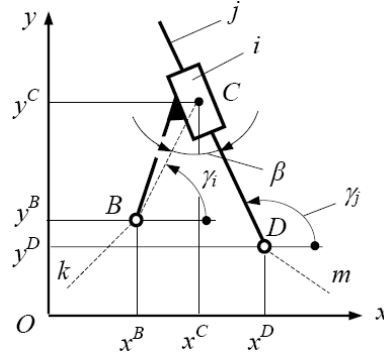


Fig. 7. Esquema del grupo estructural de segunda clase de tercera variedad.

$$\begin{aligned}\dot{x}^{B2} &= \dot{x}^{A1} - L_{AB} \cdot \omega_2 \operatorname{sen} \varphi_2 \\ \dot{y}^{B2} &= \dot{y}^{A1} + L_{AB} \cdot \omega_2 \operatorname{cos} \varphi_2\end{aligned}\quad (13)$$

- aceleración del mismo punto:

$$\begin{aligned}\ddot{x}^{B2} &= \ddot{x}^{A1} - L_{AB} \cdot \alpha_2 \operatorname{sen} \varphi_2 - L_{AB} \cdot \omega_2^2 \operatorname{cos} \varphi_2 \\ \ddot{y}^{B2} &= \ddot{y}^{A1} + L_{AB} \cdot \alpha_2 \operatorname{cos} \varphi_2 - L_{AB} \cdot \omega_2^2 \operatorname{sen} \varphi_2\end{aligned}\quad (14)$$

Para el caso del movimiento uniforme, cuando  $\omega_2$  es constante ( $\alpha_2=0$ ), el sistema de ecuaciones (14) podrá escribirse como tendrá la forma:

$$\begin{aligned}\ddot{x}^{B2} &= \ddot{x}^{A1} - L_{AB} \cdot \omega_2^2 \operatorname{cos} \varphi_2 \\ \ddot{y}^{B2} &= \ddot{y}^{A1} - L_{AB} \cdot \omega_2^2 \operatorname{sen} \varphi_2\end{aligned}\quad (15)$$

Es decir, desde el punto de vista didáctico no se pueden suprimir los primeros términos de las ecuaciones aunque su magnitud es igual a cero.

#### 2.4. Sistema de ecuaciones para el grupo estructural de segunda clase de tercera variedad

En la Fig. 7 se muestra el grupo mencionado en forma general cuando el eje del par cinemático de rotación  $B$  no atraviesa la línea de simetría del par de traslación  $C$ . Teniendo en cuenta que, en el análisis cinemático se necesita encontrar las velocidades y aceleraciones para todos los puntos ubicados en los pares cinemáticos, también teniendo en cuenta que  $\omega_i = \omega_j$  los sistemas de ecuaciones para este caso tendrán la siguiente estructura:

- posición de los puntos  $C_j$  y  $C_i$ :

$$\begin{aligned}x^{Cj} = x^{Ci} &= x^{Bk} + L_{BC} \operatorname{cos} \gamma_i & x^{Ci} = x^{Cj} &= x^{Dm} + L_{DC} \operatorname{cos}(\gamma_i + \beta) \\ y^{Cj} = y^{Ci} &= y^{Bk} + L_{BC} \operatorname{sen} \gamma_i & y^{Ci} = y^{Cj} &= y^{Dm} + L_{DC} \operatorname{sen}(\gamma_i + \beta)\end{aligned}\quad (16)$$

- el sistema de ecuaciones (10) para el punto  $C_j$  se escribirá como:

$$\begin{aligned}\dot{x}^{Cj} &= \dot{x}^{Bk} - L_{BC} \omega_i \operatorname{sen} \gamma_i + v_{CjCi} \operatorname{cos}(\gamma_i + \beta) \\ \dot{y}^{Cj} &= \dot{y}^{Bk} + L_{BC} \omega_i \operatorname{cos} \gamma_i + v_{CjCi} \operatorname{sen}(\gamma_i + \beta) \\ \dot{x}^{Cj} &= \dot{x}^{Dm} - L_{DC} \omega_i \operatorname{sen}(\gamma_i + \beta) \\ \dot{y}^{Cj} &= \dot{y}^{Dm} + L_{DC} \omega_i \operatorname{cos}(\gamma_i + \beta)\end{aligned}\quad (17)$$



y el sistema de ecuaciones de velocidad del punto  $C_i$  en forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}^{Ci} &= \dot{x}^{Bk} - L_{BC} \omega_i \operatorname{sen} \gamma_i \\ \dot{y}^{Ci} &= \dot{y}^{Bk} + L_{BC} \omega_i \operatorname{cos} \gamma_i\end{aligned}\quad (18)$$

De mismo modo se formula el sistema de ecuaciones de la aceleración del punto  $C_j$ :

$$\begin{aligned}\ddot{x}^{Cj} &= \ddot{x}^{Bk} - L_{BC} \alpha_i \operatorname{sen} \gamma_i - L_{BC} \omega_i^2 \operatorname{cos} \gamma_i + a_{CjCi} \operatorname{cos}(\gamma_i + \beta) - 2v_{CjCi} \omega_i \operatorname{sen}(\gamma_i + \beta) \\ \ddot{y}^{Cj} &= \ddot{y}^{Bk} + L_{BC} \alpha_i \operatorname{cos} \gamma_i - L_{BC} \omega_i^2 \operatorname{sen} \gamma_i + a_{CjCi} \operatorname{sen}(\gamma_i + \beta) + 2v_{CjCi} \omega_i \operatorname{cos}(\gamma_i + \beta) \\ \ddot{x}^{Cj} &= \ddot{x}^{Dm} - L_{DC} \alpha_i \operatorname{sen}(\gamma_i + \beta) - L_{DC} \omega_i^2 \operatorname{cos}(\gamma_i + \beta) \\ \ddot{y}^{Cj} &= \ddot{y}^{Dm} + L_{DC} \alpha_i \operatorname{cos}(\gamma_i + \beta) - L_{DC} \omega_i^2 \operatorname{sen}(\gamma_i + \beta)\end{aligned}\quad (19)$$

y el de la aceleración del punto  $C_i$  como:

$$\begin{aligned}\ddot{x}^{Ci} &= \ddot{x}^{Bk} - L_{BC} \alpha_i \operatorname{sen} \gamma_i - L_{BC} \omega_i^2 \operatorname{cos} \gamma_i \\ \ddot{y}^{Ci} &= \ddot{y}^{Bk} + L_{BC} \alpha_i \operatorname{cos} \gamma_i - L_{BC} \omega_i^2 \operatorname{sen} \gamma_i\end{aligned}\quad (20)$$

Como es habitual después del análisis cinemático debe ser hecho el análisis de fuerzas. Éste no presenta ninguna dificultad ya que del análisis cinemático se obtienen la magnitud, dirección y sentido de los vectores velocidad y aceleración.

### 3. CONCLUSIONES

1. Los autores consideran que las explicaciones que aparecen en algunos libros de texto relacionadas con el desplazamiento de diferentes puntos del mismo eslabón rígido no son claras. Tampoco se expresan con claridad los conceptos de la “diferencia de posición” y del “movimiento de diferencia” de los puntos del mismo eslabón y, como alternativa, sobre “la posición relativa” y “movimiento relativo” cuando se trata de los puntos de diferentes eslabones.

Sería correcta la consideración del movimiento relativo solamente entre los puntos de un eslabón y los del sistema de coordenadas en que éste se ubica, o entre los puntos de diferentes eslabones cuando éstos se unen mediante un par cinemático.

Este concepto debe tomarse en cuenta a la hora de proceder al análisis cinemático y dinámico de mecanismos, ya que es evidente la necesidad de diferenciar los puntos de los eslabones indicando su pertenencia al eslabón concreto. Tal indicación permitirá unificar la formulación de las ecuaciones, no dependiendo del tipo del par cinemático lo que facilitará la comprensión de la materia.

2. Hasta el momento, en la TMM los grupos estructurales de Assur se usan solamente para el análisis estructural y para los análisis cinemático y dinámico de mecanismos articulados mediante polígonos vectoriales.

Los autores mostraron que los grupos estructurales de Assur en combinación con las herramientas del álgebra vectorial se pueden utilizar eficientemente para el análisis cinemático y dinámico, logrando así:

a) Simplificar la representación matemática del análisis cinemático y de fuerzas. De este modo, las ecuaciones forman un bloque con los grupos estructurales de Assur y los mecanismos de primera clase. Los modelos matemáticos presentados tienen una forma universal y flexible. Eso permite, representar matemáticamente y proceder al análisis de mecanismos de cualquier complejidad, teniendo en cuenta solamente bloques compuestos de grupos estructurales de Assur y sus ecuaciones, sin requerir la composición formal de las ecuaciones de los mecanismos;

b) A partir de lo anterior, es posible el desarrollo de SOFTWARE que permitan al ingeniero diseñador utilizar todas las herramientas conocidas de la síntesis y el análisis de mecanismos, creando las máquinas con las propiedades óptimas.

## REFERENCIAS

- [1] Artobolevsky, I.I., *Teoría de Mecanismos y Máquinas*, Nauka, Moscú, Rusia (1988)
- [2] Assur, L.V., *Investigación de mecanismos planos de barras con los pares inferiores del punto de vista de su estructura y clasificación*, Moscú, Edición de Academia de Ciencias de la URSS (1952)
- [3] Erdman, A.G., Sandor, G.N., *Diseño de Mecanismos. Análisis y Síntesis*, Prentice may, México, 119-290 (1998)
- [4] Cordona Foix, S., Clos Costa, D., *Teoría de Máquinas*, Universidad Politécnica de Catalunya, SL, Barcelona, España, 61-88 (2001)
- [5] Hartenberg, R.S., Denavit, J., *Kinematic Synthesis of Linkages*, McGraw-Hill, New York (1964)
- [6] Levitsky, N.I., *Teoría de Mecanismos y Máquinas*, Nauka, Moscú, Rusia, 53-84 (1979)
- [7] Mabie, H.H., Reinoldz, C.F., *Mecanismos y Dinámica de Maquinaria*, Limusa, México, 329-442 (2004)
- [8] Marghitu, D.B., Crocker, M.J., *Analisis Elements of Mechanisms*, Cambridge University Press, 21-82 (2001)
- [9] Suñer Martínez, J.-Ll., Rubio Montoya, F.J. et al., *Problemas resueltos de Teoría de Máquinas y Mecanismos*, Universidad Politécnica de Valencia, España (2001)
- [10] Suñer Martínez, J.-Ll., Rubio Montoya, F.J. et al., *Teoría de Máquinas y Mecanismos. Problemas resueltos*. Alfaomega, México (2004)
- [11] Norton, R.L., *Diseño de Maquinaria. Una introducción a la Síntesis y al Análisis de Mecanismos y Máquinas*. McGraw-Hill, México, 232-371 (2005)
- [12] Calero Pérez, R., Carta González, J.A., *Fundamentos de Mecanismos y Máquinas para Ingenieros*, McGraw-Hill/Interamericana de España, S.A.U., Madrid, 57-88 (1999)
- [13] Shigley, J.E., Uicker, J.J. Jr., *Teoría de Mecanismos y Máquinas*, McGraw-Hill, México, 156-159 (1990)
- [14] Sumskiy, S.N., *Cálculo de características cinemáticas y dinámicas de mecanismos articulados*, Mashinostroenie, Moscú, Rusia, 8-31 (1980)
- [15] Frolov, K.V. et al., *Teoría de Mecanismos y Máquinas*, Edición de MGTU, Moscú, Rusia, 82-260 (2002)

## AN ANALYTICAL METHOD OF CINEMATIC ANALYSIS OF ARTICULATED MECHANISMS

**Abstract** – A new method is proposed for the cinematic analysis, of articulated plane mechanisms, which consists of the combination of the methods of the vector algebra and of the method of L.V.Assur, which is based on the construction of the articulated mechanisms from structural groups and of mechanisms of the first class. The way of obtaining of the equations for the cinematic analysis of the mechanisms of the first class and of the structural groups of the second class of third variety it show. The proposed approach simplifies much the analysis of mechanisms of any grade of complexity since it does not need the formulation of the equations for the complete mechanism. The mechanism appears compound of blocks that have in his structure mechanisms of the first class, structural groups and the set of equations that accompany them. To show the method they take, as example, plane mechanisms of four links. The method is directed to the teachers who give classes of the Theory of Mechanisms and Machines, to the engineers-designers of mechanical systems and to the engineers who develop SOFTWARE.

**Keywords** – Theory of Mechanisms, Link, Articulated Mechanism, Kinematic Analysis.