



## MODELADO DE UNA TRANSMISIÓN *HARMONIC DRIVE*. ANÁLISIS DEL ERROR CINEMÁTICO

CRISTINA CASTEJÓN, JUAN CARLOS GARCÍA-PRADA, OMAR JOSÉ LARA

Universidad Carlos III de Madrid

Dirección Grupo de investigación MAQLAB, Departamento de Ingeniería Mecánica  
Avda. de la Universidad nº 30, 28911 Leganés, Madrid, España

(Recibido 20 de marzo de 2008, para publicación 5 de febrero de 2009)

**Resumen** – Las transmisiones de tipo *Harmonic Drive* son ampliamente usadas en aplicaciones industriales, tales como: robótica, industria aeroespacial, equipos médicos o grandes imprentas, debido a la precisión en su posicionamiento, capacidad de transmisión de par, poco peso y volumen, holguras despreciables, versatilidad y alta eficiencia. Sin embargo, estos sistemas presentan un tipo de error característico denominado error cinemático, parámetro poco estudiado, que genera resonancias en el sistema y depende básicamente de la fricción, la flexibilidad y los desajustes de montaje de los distintos elementos que configuran el sistema mecánico. Para integrar con precisión un *Harmonic Drive* en un sistema robótico, es necesario conocer la variación del error cinemático durante la rotación; en este artículo se plantea un modelo matemático del funcionamiento dinámico del *Harmonic Drive*, basado en las ecuaciones de Lagrange, y una representación del mismo mediante ecuaciones de estado de un sistema lineal en S I M U L I N K®, que nos permite caracterizar el error cinemático de manera razonable e integrarlo en un sistema electromecánico.

**Palabras clave** – *Harmonic Drive*, error cinemático, modelo de estados.

### 1. INTRODUCCIÓN

El mecanismo *Harmonic Drive* (HD) es un sistema de transmisión de potencia capaz de desarrollar elevadas relaciones de transmisión, aportando al conjunto una elevada exactitud en su posicionamiento, con una relación peso/volumen baja. Fue creado en el año 1955 por Musser [1], y es actualmente aceptado por la gran mayoría de científicos e ingenieros.

El *Harmonic Drive* está compuesto por 3 elementos distintos y con funciones bien definidas, como lo son el *Wave Generator* (WG), el *FlexSpline* (FS) y el *Circular Spline* (CS), elementos presentados en la Fig. 1(a). Para conocer el comportamiento de todo el dispositivo, es necesario conocer el comportamiento individual de cada elemento que lo compone.

Se dice que el HD tiene tres posibles configuraciones de funcionamiento, debido a que cualquiera de los tres componentes antes mencionados puede servir de entrada o salida de movimiento de rotación, lo cual determinará la configuración del dispositivo. La configuración básica, consiste en la fijación del *Circular Spline*, que permite una rotación de alta velocidad en el *Wave Generator* y una baja velocidad en el *FlexSpline*.

De manera similar, con el FS fijo, el par en el WG puede incrementarse y transmitirse a través del *Circular Spline*. Si tanto el *Circular Spline* como el *FlexSpline* son utilizados como entradas, el *Wave Generator* puede ser manejado a altas velocidades y bajo par. En general, usando diferentes combinaciones de rotación de los tres componentes del HD, se pueden lograr numerosas relaciones de transmisión y par.

Los estudios de la caracterización del comportamiento de un HD son escasos y se han canalizado en dos líneas principales de investigación: la primera relacionada con la optimización de los materiales utilizados en los componentes del HD, en especial del *FlexSpline*, y la segunda, en la caracterización del comportamiento dinámico del HD y sus aplicaciones de control de sistemas.

En el año 1997, Hoon [9], realizó una mejora en las propiedades dinámicas de un FlexSpline, y concluyó que un FlexSpline híbrido, compuesto por acero y fibra de vidrio epóxica era el más apropiado para su uso en HD. Dos años más tarde, en 1999, Han *et al.* [8] llevaron a cabo un estudio de la vibración de un HD, al comparar el comportamiento de dos FS híbridos, el primero compuesto de acero y fibra de carbono epóxica y el segundo de acero con fibra de vidrio epóxica, concluyendo que el modelo de fibra de carbono presenta mejores características ante la vibración, como la capacidad de amortiguamiento.

Haciendo una revisión de los trabajos más representativos, en el año 1992, Tuttle *et al.* [11] presentaron un amplio modelo experimental de las propiedades más influyentes del HD, como son: la rigidez, la fricción y el error cinemático; en el cual concluyen, entre otras cosas, que el error cinemático presenta una frecuencia predominante del doble de la frecuencia de giro del motor. En el año 2001, Ghorbel *et al.* [5], desarrollaron un modelo matemático para caracterizar el comportamiento dinámico del HD, y hallaron el error cinemático asociado, al separarlo en una componente de fricción y una componente flexible. Un año más tarde, en el 2002, Gandhi *et al.* [6], desarrollaron un sistema de control de lazo cerrado para contrarrestar los efectos del error cinemático en un sistema de transmisión de HD, sistema que los mismos autores mejoraron en el año 2005 [10]. También se consideran relevantes los estudios llevados a cabo por Kennedy *et al.* [12], en los cuales se efectúa un análisis y modelado del sistema de brazo robótico Mitsubishi PA-10, con reductores de tipo HD.

El presente artículo se divide en tres partes, la primera consiste en una breve introducción de las transmisiones HD y de los estudios previos en su entorno; en la segunda parte, se reseñan los fundamentos básicos del HD, sus componentes y sistema de funcionamiento. Por último, se expone un análisis de las ecuaciones que describen el error cinemático del HD y que finalmente modelan al sistema mediante el modelo en el espacio de estados.

## 2. FUNDAMENTOS DE OPERACIÓN DEL *HARMONIC DRIVE*

Cuando se insertan en el *FlexSpline* y el *Wave Generator* en el *Circular Spline* (véase Fig. 1(b)), los dientes externos del *FlexSpline* engranan con los dientes internos del *Circular Spline* a lo largo del eje mayor de la elipse del *Wave Generator*.

Los tres componentes de la transmisión pueden rotar a velocidades diferentes, aún estando en el mismo eje de rotación. El mecanismo de rotación del *Harmonic Drive* (véase Fig. 2) comienza su recorrido en el momento que el *Wave Generator* tiene la zona de engrane en su eje mayor, y cuando esta zona se desplaza 180° alrededor de la circunferencia del *Circular Spline*, entonces el *FlexSpline*, que posee dos dientes menos que el *Circular Spline*, tendrá un retraso de un diente relativo al *Circular Spline*. Por este engrane gradual y continuo de los dientes del engranaje, cada rotación del *Wave Generator* mueve al *FlexSpline* dos dientes hacia atrás sobre el *Circular Spline*. Las relaciones de transmisión típicas del *Harmonic Drive* están en el rango de 50:1 a 200:1, aunque pueden obtenerse relaciones de transmisión de hasta 320:1 en una transmisión simple [2]. Las eficiencias del mecanismo normalmente rondan el 85%, aunque pueden alcanzar un 90%; las transmisiones más pequeñas pueden proporcionar un par mínimo de salida de alrededor de 1.3N.m, a altas revoluciones (3000 rpm) y con relaciones de transmisión mínimas (50:1); por el contrario, los *Harmonic Drives* de alta potencia pueden presumir de hasta 10.000 N.m de capacidad de par.

### 2.1. El *Harmonic Drive* Ideal

En catálogos comerciales, a cada *Harmonic Drive* se le asigna una relación de transmisión  $N$ , que describe su posición, velocidad y comportamiento de par.

En particular, conociendo el valor de  $N$  y la posición de dos de los tres componentes del HD, puede saberse la rotación ideal del tercer componente, mediante la ecuación (1):

$$\theta_{WG} = (N + 1)\theta_{CS} - N\theta_{FS} \quad (1)$$

$\theta_{WG}$  = Rotación angular del *Wave Generator*

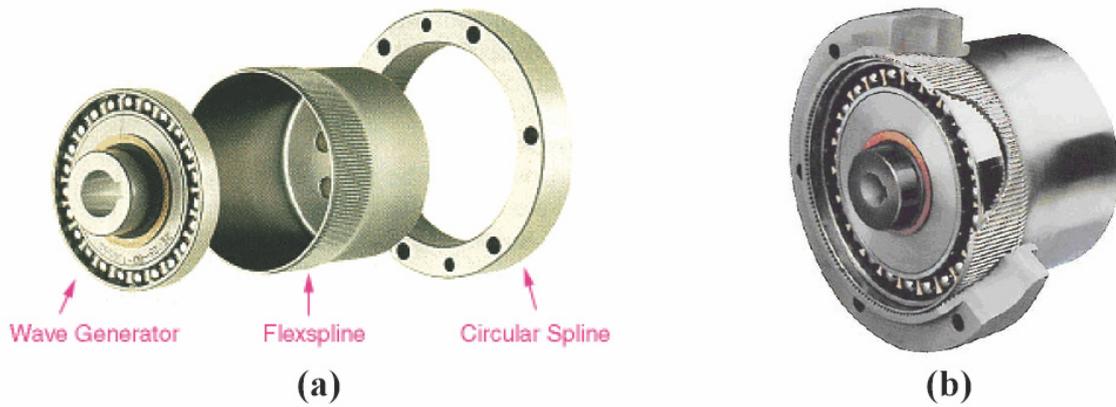


Fig. 1. (a) Despiece del HD (b) Ensamblaje de HD típico [3].



Fig. 2. Mecanismo de operación de un *Harmonic Drive*.

$\theta_{CS}$  = Rotación angular del *Circular Spline*

$\theta_{FS}$  = Rotación angular del *FlexSpline*

De manera similar, dado que  $N$  es una constante bajo suposiciones ideales, la derivada de esta relación produce una restricción de velocidad dada por la ecuación (2):

$$\omega_{WG} = (N + 1)\omega_{CS} - N\omega_{FS} \quad (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2) se aprecia que, si  $\omega_{CS}=0$ , el *Wave Generator* rotará  $N$  veces más rápido que el *FlexSpline* en la dirección opuesta. En una configuración diferente, un *FlexSpline* fijo produce que el *Wave Generator* rote  $(N+1)$  veces más rápido que el *Circular Spline* en la misma dirección. Aplicando la ley de conservación de la energía a los 3 componentes del HD, el par ideal se define como:

$$\tau_{WG} = \frac{1}{N + 1} \cdot \tau_{CS} = -\left(\frac{1}{N}\right) \cdot \tau_{FS} \quad (3)$$

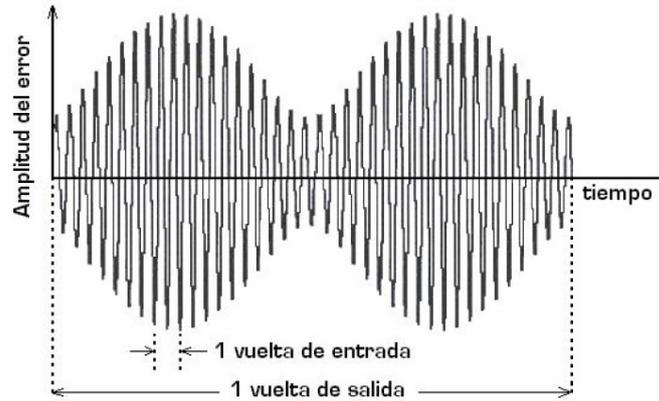


Fig. 3. Error cinemático típico del *Harmonic Drive*.

De esta identidad, se puede comprobar que, el par en cada puerto del HD conduce al par ideal en los otros dos. También se observa que el par en el *FlexSpline* es semejante al par en el *Circular Spline*, que es aproximadamente  $N$  veces más grande que el par en el *Wave Generator*. Con las ecuaciones (1), (2) y (3), el comportamiento dinámico de un HD bajo suposiciones ideales, está completamente definido.

### 3. EL ERROR CINEMÁTICO EN EL *HARMONIC DRIVE*

En aplicaciones que requieren de alta precisión en la posición, el error cinemático del HD expone los puntos débiles de un modelo de transmisión ideal. Este error de posición ( $\Delta\theta$ ), se calcula restando la rotación a la salida del HD de la rotación de entrada dividida por la relación de transmisión ideal. En la configuración estudiada, la rotación de entrada del motor es la que imprime el *Wave Generator* al mecanismo, y la rotación de salida es la proporcionada por el *FlexSpline*.

$$\Delta\theta = \frac{\theta_m}{N} - \theta_i \quad (4)$$

donde:

$\Delta\theta$	Error cinemático
$\theta_m = \theta_{WG}$	Rotación de entrada del motor
$N$	Relación de transmisión
$\theta_i = \theta_{FS}$	Rotación de salida de la carga

Este nuevo parámetro ( $\Delta\theta$ ), está definido principalmente por los errores de montaje, la flexibilidad de los componentes y la fricción; y es necesario considerarlo a la hora de conocer la posición exacta de cada uno de los componentes del mecanismo, lo cual genera que el sistema real tenga dos grados de libertad.

Los fabricantes aseguran que la magnitud del error cinemático varía periódicamente al doble de la frecuencia de la velocidad de giro del WG y que puede reducirse con el tipo de operación del mecanismo; la amplitud de este error periódico modula dos veces por cada revolución del FS o CS como se ilustra en la Fig. 3. Los fabricantes *Harmonic Drive Technologies Nabtesco inc.* [3] y *HDsystems* [4], aseguran que se puede lograr una precisión de 0.08 grados.

### 3.1. Descomposición del error cinemático

Ghorbel *et al.* [5] concluyeron que, una descomposición razonable del error cinemático consiste en la suma de un error puro  $\theta_p$ , que engloba todos los términos de fricción, y un error secundario ( $\theta_s$ ), que viene dado por la flexibilidad torsional del mecanismo. Esta descomposición, sirve para dar una explicación al origen de la variabilidad y la aparente aleatoriedad de los perfiles del error cinemático experimentales.

$$\Delta\theta \approx \theta_p + \theta_s \quad (5)$$

Para obtener la componente pura ( $\theta_p$ ) de modo experimental, es necesario trabajar a muy baja velocidad para evitar los efectos de la flexibilidad. También se debe tener presente que, el error cinemático no depende únicamente de factores como la fricción y la flexibilidad de los componentes del HD, sino que también se ha de tener en cuenta un factor “humano”, que tiene fundamentalmente que ver con el montaje de estos componentes.

### 3.2. Modelo matemático del *Harmonic Drive*. Ecuaciones de Lagrange

Las ecuaciones de Lagrange [13], son un método que permite formular las ecuaciones dinámicas de un sistema mecánico general a partir de la definición de un sistema de coordenadas generalizadas. En la ecuación (6) se representa dicho formalismo:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} - Q_i = 0 \quad (6)$$

donde:

$q_i$  Coordenadas generalizadas del sistema o grados de libertad.

$T$  Energía cinética del sistema.

$Q_i$  “Fuerza generalizada”, término que engloba todas las fuerzas que interactúan en el sistema. Las fuerzas pueden ser de tres categorías:

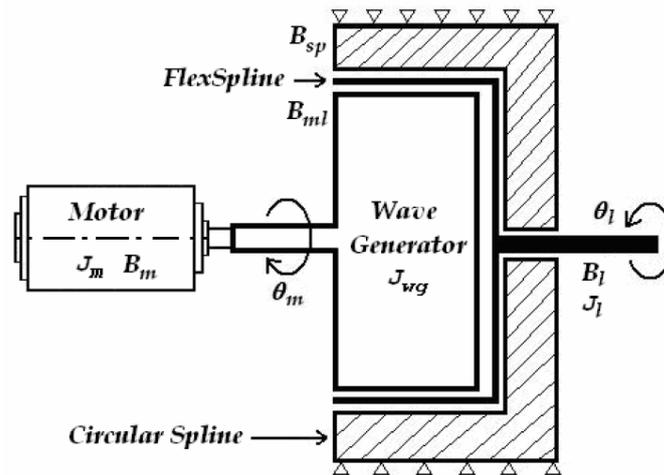
- A) Fuerzas de interacción entre diferentes masas puntuales del sistema.
- B) Fuerzas exteriores, incluida la fuerza debida a la gravedad.
- C) Fuerzas debidas a la fricción.

Las fuerzas de tipo (A) y (B) definen un campo conservativo, y se pueden obtener derivando una función de energía potencial ( $V$ ), con respecto a una coordenada generalizada; las fuerzas de fricción (tipo C) son no conservativas, y se obtienen derivando con respecto a la velocidad un potencial dependiente de la misma, que es la función de Rayleigh ( $D$ ). En la ecuación (7) se representa la fuerza generalizada con sus términos conservativos y no conservativos.

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} \quad (7)$$

Para la configuración básica del HD explicada en el apartado 1, se puede aplicar la ecuación de Lagrange a un sistema mecánico de dos grados de libertad. Para ello, se debe conocer cuál es el conjunto de parámetros que actúan durante la transmisión del movimiento en un sistema real. Se selecciona el sistema que se ilustra en la Fig. 4, que consiste en un HD [3], Unit HDC-40,  $N = 50$ , conectado por un eje de entrada a un motor eléctrico y mediante un eje de salida a un elemento de carga. Los parámetros se encuentran en la Tabla 1.

Dado que el mecanismo tiene dos grados de libertad, se tienen dos coordenadas generalizadas, que son:

Fig. 4. Mecanismo *Harmonic Drive*.Tabla 1 Parámetros del *Harmonic Drive* presentados en la Fig. 4.

Parámetro	Definición	Valor	Unidades
$J_m$	Inercia del motor	2.9E-04	$Kg.m^2$
$J_l$	Inercia de la carga	5.0E-04	$Kg.m^2$
$B_{wg}$	Inercia del Wave Generator	1.6E-04	$Kg.m^2$
$B_m$	Amortiguamiento del motor	1.7E-04	$N.m.s$
$B_{ml}$	Amortiguamiento por fricción entre dientes del Wave Generator y del Flexspline.	1.3E-05	$N.m.s$
$B_{sp}$	Amortiguamiento por fricción entre dientes del Flexspline y del Circular Spline.	1.0E-04	$N.m.s$
$B_l$	Amortiguamiento debido a la carga.	5.0E-04	$N.m.s$
$\theta_m$	Posición del motor	-	$rad$
$\theta_l$	Posición de la carga.	-	$rad$
$N$	Relación de transmisión	50	-
$K$	Rigidez de la carga	7160	$Nm / rad$

1. Posición o ángulo girado por el eje del motor ( $\theta_m$ ), valor de entrada del sistema.
2. El error cinemático ( $\Delta\theta$ ), que se expresa en función de la posición en la salida del HD ( $\theta_l$ ), que es conocida de forma experimental, y se muestra en la ecuación (8).

$$\theta_l = \frac{\theta_m}{N} - \Delta\theta \quad (8)$$

Por otra parte, la energía cinética ( $T$ ), presentada en la ecuación (9), es la debida al movimiento en el eje motor y en el eje de salida donde existe un elemento de carga.

$$T = \frac{1}{2}(J_m + J_{wg})\dot{\theta}_m^2 + \frac{1}{2}J_l\dot{\theta}_l^2 \quad (9)$$

La energía potencial elástica ( $V$ ), es debida a la flexibilidad del mecanismo, y se define como:

$$V = \int_{-\theta_s}^0 K\sigma d\sigma \quad (10)$$

donde

$\sigma$  : Desviación rotacional

$K$ : rigidez del elemento de carga

La función de Rayleigh se define mediante la ecuación (11)

$$D = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}B_i \dot{q}_i^2 \quad (11)$$

Aplicando la ecuación (11) a cada uno de los términos de fricción, se llega a la expresión (12).

$$D = \frac{1}{2}B_m \dot{\theta}_m^2 + \frac{1}{2}B_l \dot{\theta}_l^2 + \frac{1}{2}B_{ml} (\dot{\theta}_m + \dot{\theta}_l)^2 + \frac{1}{2}B_{sp} \left( \dot{\theta}_l - \frac{\dot{\theta}_m}{N} + \dot{\theta}_p \right)^2 \quad (12)$$

Existe una ecuación de Lagrange por cada coordenada generalizada, por lo que para representar el sistema HD se necesitan dos ecuaciones de Lagrange.

La ecuación de Lagrange para la coordenada de posición o ángulo girado por el motor ( $\theta_m$ ), viene dada por la expresión (13), y para la coordenada del eje de carga ( $\theta_l$ ), la expresión (14).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_m} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_m} + \frac{\partial V}{\partial \theta_m} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_m} = \tau_m \quad (13)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_l} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_l} + \frac{\partial V}{\partial \theta_l} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_l} = \tau_l \quad (14)$$

Sustituyendo en estas dos ecuaciones, los valores representados por las expresiones (9), (10) y (12) correspondientes a energía cinética, energía potencial y función de Rayleigh, se llega a las ecuaciones dinámicas (15) y (16) del HD, presentadas a continuación:

$$J_m \ddot{\theta}_m + K \left( \theta_l - \frac{\theta_m}{N} + \theta_p \right) \left[ -\frac{1}{N} + \frac{d\theta_p}{d\theta_m} \right] + B_m \dot{\theta}_m + B_{ml} (\dot{\theta}_m + \dot{\theta}_l) + B_{sp} \left( \dot{\theta}_l - \frac{\dot{\theta}_m}{N} + \dot{\theta}_p \right) \left[ -\frac{1}{N} + \frac{d\theta_p}{d\theta_m} \right] = \tau_m \quad (15)$$

$$J_l \ddot{\theta}_l + K \left( \theta_l - \frac{\theta_m}{N} + \theta_p \right) + B_l \dot{\theta}_l + B_{ml} (\dot{\theta}_m + \dot{\theta}_l) + B_{sp} \left( \dot{\theta}_l - \frac{\dot{\theta}_m}{N} + \dot{\theta}_p \right) = \tau_l \quad (16)$$

Como se observa, en la ecuación dinámica (15) se presenta una situación no lineal, que hace compleja la representación del modelo en variables de estado con la herramienta de simulación SIMULINK®.

Para lograr la condición de linealidad del sistema de ecuaciones, es preciso recordar que el error cinemático resulta de una descomposición dada por la ecuación (5); en la cual es posible evaluar las dos componentes de manera separada. Si se hace el error puro ( $\theta_p$ ) nulo, el sistema de ecuaciones mostrado arriba se hace lineal, y solo se evalúa el error cinemático debido a los efectos de la flexibilidad.

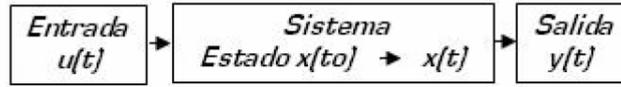


Fig. 5. Esquema típico de un sistema.

La componente pura o de fricción del error cinemático ( $\theta_p$ ) y su derivada, es conocida de forma experimental por estudios previos. Para poder derivar una expresión en función del ángulo girado por el motor ( $\theta_m$ ), se procede a desarrollar las series de Fourier tal y como se muestra en la expresión (17). Las constantes  $a_n$  y  $b_n$  son halladas por integración numérica de datos experimentales [5], en un sistema HD real operado a baja velocidad (310 RPM).

$$\theta_p = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k [a_n \cos(n\theta_m) + b_n \text{sen}(n\theta_m)] \quad (17)$$

donde:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Delta\theta(\theta_m) \cos(n\theta_m) d\theta_m \quad (18)$$

$$b_n = \int_0^{2\pi} \Delta\theta(\theta_m) \text{sen}(n\theta_m) d\theta_m \quad (19)$$

### 3.3. Modelado de un *Harmonic Drive* en el espacio de estados

La forma más habitual de estudiar un sistema dinámico es, mediante la relación entre las entradas que se proporcionan a un sistema y las salidas que de él se obtienen. Este método es especialmente apropiado si el sistema es lineal, y sus parámetros varían continuamente en el tiempo. En la Fig. 5 se esquematiza este concepto.

Las técnicas de modelado de sistemas en el espacio de estados se basan en describir el sistema dinámico por medio de  $n$  ecuaciones diferenciales de primer orden, cuando se tienen sistemas descritos en tiempo continuo, o de  $n$  ecuaciones en diferencias, si el sistema es de tiempo discreto. Si las  $n$  ecuaciones se representan de forma matricial, la representación matemática del sistema se simplifica bastante.

Si denominamos  $x(t_0)$  al vector de estados inicial del sistema,  $y(t)$  al de salida y  $u(t)$  al de entrada, podemos definir una función  $g$  tal que:

$$y(t) = g[x(t_0), u(t)] \quad (20)$$

Igualmente se puede definir una función  $f$  de modo que el estado en el que se encuentra el sistema en un momento determinado depende del estado en el que se encontraba en el instante anterior y de la entrada al mismo.

$$x(t) = f[x(t_0), u(t)] \quad (21)$$

Un sistema dinámico puede describirse por un conjunto de ecuaciones diferenciales. Una vez que se conocen esas ecuaciones, se hallan las variables que definen el estado del sistema, o sus variables de estado. Definidas las variables, se vuelven a escribir las ecuaciones en función de éstas, y se obtienen las ecuaciones de estado del sistema

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t)] \quad (22)$$

$$y(t) = g[x(t), u(t)] \quad (23)$$

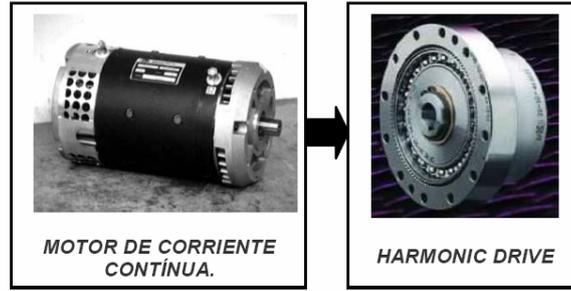


Fig. 6. Sistema mecánico en el que se integra el HD.

donde:

$x(t)$  es el vector de variables de estado

$\dot{x}(t)$  es el vector de variación temporal de las variables de estado

$u(t)$  es el vector de entradas

$y(t)$  es el vector de salidas del sistema

En el caso de que el sistema sea lineal, las ecuaciones de estado pueden expresarse con matrices variables en el tiempo como sigue:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (24)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (25)$$

Para modelar la transmisión de tipo HD, es necesario escoger, dentro de las ecuaciones dinámicas (15) y (16), las entradas, salidas y variables que definen el estado del sistema. Para poder distinguir entre entradas, salidas y variables de estado, se debe conocer el entorno donde se va a ubicar el sistema, es decir, sus condiciones de contorno. El sistema HD se integrará en un conjunto mecánico, como el de la Fig. 6. Está formado por un motor de corriente continua y su salida acoplada a una transmisión HD. El HD transmite la potencia mecánica que recibe del motor, de modo que reduce drásticamente la velocidad angular, aumentando considerablemente el par transmitido.

La primera variable de entrada al sistema es la posición angular del motor ( $\theta_m$ ), y la primera variable de salida es la posición angular del elemento de carga ( $\theta_l$ ). De ahí, que se conozca par a un determinado giro del motor, el ángulo girado por el elemento de carga del HD.

El conocimiento del par transmitido por el HD es fundamental para saber si el sistema tiene capacidad suficiente para mover elemento de carga acoplado al HD. Por esta razón se considera como segunda variable de entrada el par motor ( $\tau_m$ ), y como segunda variable de salida el par transmitido ( $\tau_l$ ).

Estas variables son perfectamente válidas para evaluar el error cinemático, ya que éste resulta ser la diferencia ente la variable de salida ( $\theta_l$ ), y el ángulo de posición que se obtiene aplicando la ecuación (1) del sistema ideal para el elemento de salida que corresponda. En resumen, las variables de estado obtenidas son:

A. Variables de Entrada ( $u$ ):

A.1. Par motor ( $v = \tau_m$ )

A.2. Posición angular del eje motor ( $w = \theta_m$ )

B. Variables de Salida ( $y$ ):

B.1. Posición angular del eje de salida ( $j = x_1 = \theta_l$ )

B.2. Par transmitido ( $i = \tau_l(\tau_m) = vN$ )

C. Variables de Estado ( $x$ ):C.1. Posición angular del eje de salida. ( $x_1 = \theta_l$ )C.2. Velocidad angular del eje de salida. ( $x_2 = \dot{\theta}_l$ )C.3. Componente pura del error cinemático. ( $x_3 = \theta_p$ )C.4. Velocidad angular del motor. ( $x_4 = \dot{\theta}_m$ )

Renombrando las variables en las ecuaciones dinámicas (15) y (16), se llega a las expresiones (26) y (27), que expresan las ecuaciones dinámicas del sistema en función de las variables de estado, entradas y salidas del sistema.

$$\left(\frac{-K}{N}\right)x_1 + \left(B_{ml} - \frac{B_{sp}}{N}\right)x_2 + \left(\frac{-K}{N}\right)x_3 + \left(B_m + B_{ml} + \frac{B_{sp}}{N^2}\right)x_4 + \left(\frac{K}{N^2}\right)w + J_m \dot{x}_4 - v = 0 \quad (26)$$

$$Kx_1 + (B_l + B_{ml} + B_{sp})x_2 + Kx_3 + \left(B_{ml} - \frac{B_{sp}}{N}\right)x_4 + J_l \dot{x}_2 - \frac{K}{N}w - vN = 0 \quad (27)$$

Despejando las variables dependientes del tiempo, de las expresiones (26) y (27), se pueden escribir las ecuaciones de estado del sistema (28), (29), (30) y (31).

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (28)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{K}{J_l}x_1 - \frac{(B_l + B_{ml} + B_{sp})}{J_l}x_2 - \frac{K}{J_l}x_3 - \frac{\left(B_{ml} - \frac{B_{sp}}{N}\right)}{J_l}x_4 + \frac{vN}{J_l} + \frac{Kw}{NJ_l} \quad (29)$$

$$\dot{x}_3 = 0 \quad (30)$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{\left(\frac{-K}{N}\right)}{J_m}x_1 - \frac{\left(B_{ml} - \frac{B_{sp}}{N}\right)}{J_m}x_2 - \frac{\left(\frac{-K}{N}\right)}{J_m}x_3 - \frac{\left(B_m + B_{ml} + \frac{B_{sp}}{N^2}\right)}{J_m}x_4 - \frac{\left(\frac{K}{N^2}\right)}{J_m}w + \frac{v}{J_m} \quad (31)$$

Como se verá más adelante, puesto que el sistema es lineal, es posible expresarlo en forma matricial tal y como se muestra en la ecuación (32).

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (32)$$

donde:

$$[\dot{x}] = [\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2 \quad \dot{x}_3 \quad \dot{x}_4]^T \quad (33)$$

$$[x]_{4 \times 1} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4)^T \quad (34)$$

Tabla 2. Relación entre tensión de alimentación y velocidad angular del eje.

Tensión de alimentación (V)	Velocidad angular del eje motor (rpm)
6,5	310
12	560
18	840
24	1120

$$[A]_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-K}{J_l} & \frac{(B_l + B_{ml} + B_{sp})}{J_l} & \frac{-K}{J_l} & \frac{(B_{ml} - \frac{B_{sp}}{N})}{J_l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(-K)}{J_m} & \frac{(B_{ml} - \frac{B_{sp}}{N})}{J_m} & \frac{(-K)}{J_m} & \frac{(B_m + B_{ml} + \frac{B_{sp}}{N^2})}{J_m} \end{pmatrix} \quad (35)$$

$$[B]_{4 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{N}{J_l} & \frac{K}{NJ_l} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{J_m} & \frac{-K}{N^2 J_m} \end{pmatrix} \quad (36)$$

$$[u]_{2 \times 1} = (v \ w)^T \quad (37)$$

La ecuación que representa las salidas del sistema en forma matricial viene dada por:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (38)$$

donde:

$$[C]_{2 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (39)$$

$$[D]_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (40)$$

Con las expresiones (32), (34-40), el sistema real de un HD queda representado mediante un modelo matemático. Para generar el modelo, se configuran bloques programados en MATLAB®, con los datos de la Tabla 1, variando la alimentación del sistema según la Tabla 2.

Después de realizar la simulación y de hallar un estimado de  $\theta_s$ , este valor se sumará al error puro ( $\theta_p$ ), según la ecuación (5), y se conseguirá el error cinemático total aproximado ( $\Delta\theta$ ). Con este proce-

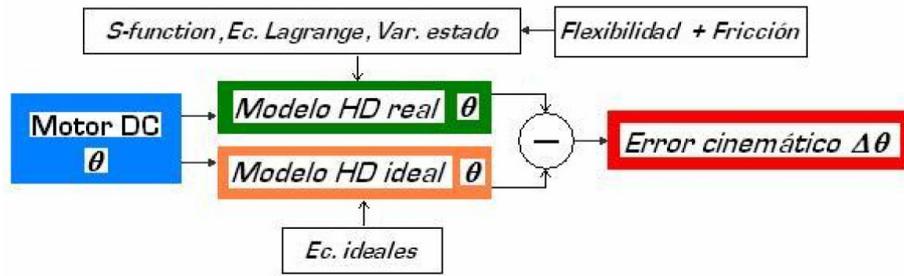


Fig. 7. Diagrama de bloques de los modelos del HD en SIMULINK®.

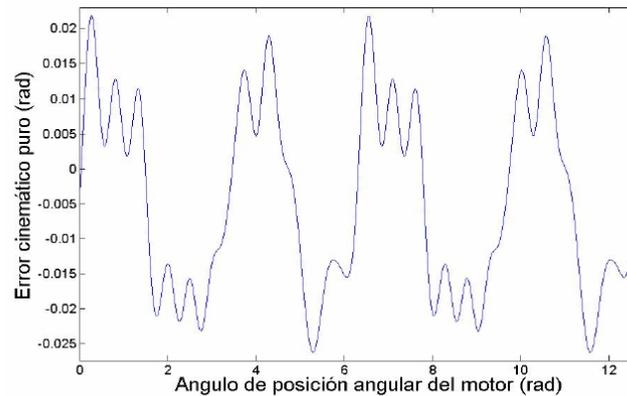


Fig. 8. Representación del error cinemático puro a 310 rpm.

dimiento se obtienen el error debido a la flexibilidad ( $\theta_s$ ), y al error puro ( $\theta_p$ ), de manera separada a través de SIMULINK®. Este es el modelo real del error cinemático.

Mediante la comparación de la ecuación ideal del mecanismo (1) y la simulación del conjunto motor-HD real con la herramienta SIMULINK® (véase Fig. 7), se obtiene la diferencia entre la posición de salida que proporcionan ambos bloques, que obviamente corresponde al valor del error cinemático debido a la flexibilidad. Las simulaciones son realizadas con distintas condiciones de contorno, variando la alimentación del motor como se indica en la Tabla 2.

#### 4. RESULTADOS

De acuerdo a lo planteado en el apartado anterior, en la Fig. 8 se observa la componente de error puro ( $\theta_p$ ), hallada por integración numérica de los datos experimentales a través del desarrollo de Fourier [5]; el sistema consiste básicamente en un HD que rota a una velocidad de 310 rpm.

Para evaluar la otra componente del error, debida a los efectos de la flexibilidad ( $\theta_s$ ), se procede a efectuar la simulación del modelo lineal con la herramienta SIMULINK®, en la Fig. 9 se presentan los errores cinemáticos secundarios, para distintas rpm y con respecto al ángulo de rotación del motor, cabe destacar que cada curva describe un comportamiento periódico, y que existe un desfase entre ellas.

En la Fig. 10 se ilustra con mayor detalle el efecto de la flexibilidad en la posición de los modelos estudiados, el modelo real, que incluye los efectos de la flexibilidad; está representado por una línea curva corresponde a la rotación del elemento de carga, y la línea recta corresponde al modelo ideal dado por la ecuación (1). Cabe destacar que estas dos curvas no presentan efectos de fricción asociados al error puro ( $\theta_p$ ).

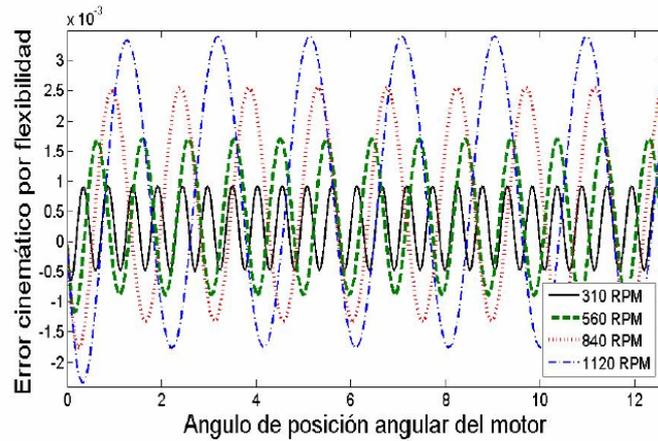


Fig. 9. Representación de los errores cinemáticos por flexibilidad a varias rpm.

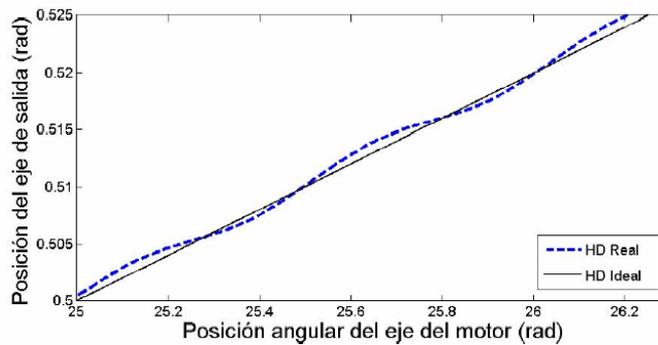


Fig. 10. Representación de la posición angular para los modelos a 1120 rpm.

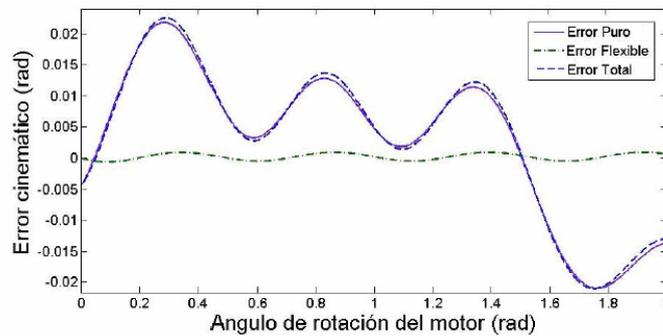


Fig. 11. Representación de las componentes del error cinemático a 310 rpm.

El error cinemático total se representa en la Fig. 11, y resulta de la suma del error cinemático puro presentado en la Fig. 8, y el error cinemático debido a la flexibilidad presentado en la Fig. 9, ambos para una velocidad de rotación de 310 rpm.

Los resultados presentados hasta ahora concuerdan con los obtenidos por otros investigadores en el pasado reciente, quienes obtienen valores máximos del error cinemático total en el rango de dos y tres centésimas de radian. Para validar el modelo obtenido, se verifica la frecuencia predominante del error cinemático total  $\Delta\theta = \theta_p + \theta_s$  mostrado en la Fig. 11, aplicando la FFT (Fast Fourier Transform) o transformada rápida de Fourier, resultando los valores detallados en la Fig. 12.

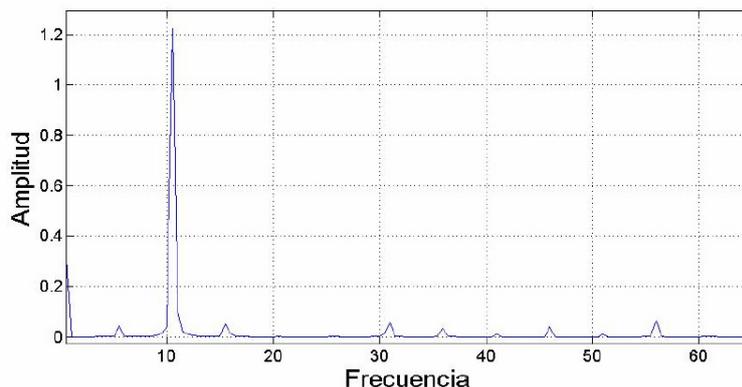


Fig. 12. Representación de la FFT de las señales mostradas en la Fig. 10.

Se obtienen una frecuencia de 10,25 Hz, que corresponde aproximadamente al doble de la frecuencia de rotación del motor (310 rpm, 5,16 Hz), y que concuerda precisamente con los resultados arrojados por los estudios experimentales de Tuttle [2,11].

## 5. CONCLUSIONES

Se ha logrado modelar el sistema dinámico del HD de forma razonable, mediante un modelo matemático basado en el formalismo de Lagrange, y variables de estado con MATLAB® y SIMULINK®. Se observa que, al linealizar el sistema, y aproximar el error puro ( $\theta_p$ ) del Harmonic Drive HDC-40 [3], con 15 coeficientes de Fourier hallados experimentalmente, se obtiene un valor muy cercano correspondiente al error cinemático total real, y se comprueba que la frecuencia predominante en el error, es la correspondiente al doble de la velocidad de giro del motor, ambos resultados obtenidos en estudios experimentales anteriores por autores como Ghorbel *et al.* [5], Gandhi *et al.* [8] y Tuttle [2,11]. También se observa que los efectos debidos a la flexibilidad aumentan a altas velocidades de rotación y que, a bajas velocidades de rotación (310 rpm), constituyen hasta un 5% del error cinemático total. Por medio de estos resultados, es posible incorporar un HD a un sistema mecánico y predecir en un grado alto su error cinemático asociado.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer sinceramente la financiación proporcionada por el Gobierno Español a través del proyecto DPI 2006-15443-C02-02 y a J.M. Moreno por su colaboración.

## REFERENCIAS

- [1] Muser, C.W., *Strain Wave Gearing*. United States Patent, No 2,906,143
- [2] Tuttle, T.D., "Understanding and modeling the behavior of a Harmonic Drive Gear Transmission", MIT Technical Report 135, MIT Artificial intelligence laboratory (1992)
- [3] Harmonic Drive Technologies. Nebtesco Inc., Peabody, MA, EUA. <http://www.harmonic-drive.com/products/index.htm>
- [4] Harmonic Drive gearing & motion control. HD systems Inc. Hauppauge, NY. <http://www.hdsi.net>
- [5] Ghorbel, F., Gandhi, P., Alpeter, F., "On the kinematic error in harmonic Drive Gears", *Transactions of ASME, Journal of Mechanical Design*, **123**, 90-97 (2001)

- [6] Gandhi, P., Ghorbel, F., “Closed-loop compensation of kinematic error in harmonic drives for precision control applications”, *IEEE Transactions on control systems technology*, **10**(6), 759-768 (2002)
- [7] Castejón, C., Meneses, J., Lorca, P.J., Rubio, H., Rubio, L, García Prada, J.C., “Modelado y simulación de una cadena cinemática de un grado de libertad. Aplicación al diseño de robots”. *Anales de Ingeniería Mecánica*, **15**, 2987-2993 (2004)
- [8] Hoon, S., “Improvement of the dynamic properties of a steel-composite hybrid FlexSpline of a Harmonic Drive”, *Composite Structures*, **38**(1-4), 251-260 (1997)
- [9] Jeon, H., Hoon, S., “A study on stress and vibration analysis of a steel and hybrid FlexSpline for Harmonic Drive”, *Composite Structures*, **47**, 827-833 (1999)
- [10] Gandhi, P.S., Ghorbel, F., “High speed precision tracing with Harmonic Drives systems using integral manifold control design”, *International Journal of Control*, **78**(2), 112-122 (2005)
- [11] Tuttle, T.D., Seering, W.P., “Kinematic error, compliance and friction in a Harmonic Drive gear transmission” *ASME Design Technical Conference*, 19th Design Automation Conference. Albuquerque, NM, 319-324 (1993)
- [12] Kennedy, C., Desay, J., “Modeling and Control of the Mitsubishi PA -10 Robot Arm Harmonic Drive System”, *IEEE/ASME Transactions Mechatronics*, **10**(3), 263-274 (2005)
- [13] Symon, K., *Mechanics* (Third Edition), University of Wisconsin. Adisson-Wesley (1971)

### **KINEMATIC ERROR ANALYSIS IN HARMONIC DRIVE TRANSMISSIONS USING LAGRANGE EQUATIONS AND STATE VARIABLES**

**Abstract** – Harmonic Drive transmissions are widely used in modern design applications as robotics, aerospace and military industry, medical equipment or printing presses, due to advantages as positional precision, high torque capabilities, low weight and volume, near zero backlash, versatility and high efficiency. Nevertheless, like all mechanical devices, it has disadvantages as the kinematic error, little known parameter, which produces system resonances and basically depends of friction, compliance and assembly imperfections. In order to integrate an Harmonic Drive in a robotic system, it is necessary to know the kinematic error during rotation; this article deal with a mathematical model about the Harmonic Drive dynamical behavior, based on Lagrange formalism, and a novel representation by means variable states of a lineal system in SIMULINK®, obtaining an acceptable simulation of Harmonic Drive kinematic error and its integration into an electromechanical system.

**Keywords** – Harmonic Drive, Kinematic error, State space model.

