



UTILIZACIÓN DE UN ALGORITMO DE MÍNIMOS CUADRADOS PONDERADOS PARA LA DETERMINACIÓN DEL EXPONENTE DE ENDURECIMIENTO POR DEFORMACIÓN

ARIEL E. MATUSEVICH^{1,2}, REINALDO A. MANCINI¹, JULIO C. MASSA²

¹ Instituto Nacional de Tecnología Industrial
Laboratorio de Ensayos Mecánicos, Centro Regional Córdoba
Av. Vélez Sarsfield 1561, 5000 Córdoba, Argentina

² Universidad Nacional de Córdoba
Departamento de Estructuras, Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales
Casilla de Correo 916, 5000 Córdoba, Argentina

(Recibido 17 de agosto de 2011, para publicación 8 de octubre de 2011)

Resumen – En este trabajo se propone una nueva metodología para la determinación del exponente n de endurecimiento por deformación en metales dúctiles. Dicho exponente surge de la relación empírica entre la tensión verdadera y la deformación plástica verdadera, conocida como ecuación de Hollomon, que describe el comportamiento plástico de muchos metales. El parámetro n se puede obtener de un ensayo de tracción convencional, mediante transformaciones apropiadas de los datos de tensión ingenieril y deformación ingenieril y el ajuste por mínimos cuadrados de una recta. La norma ASTM E 646, que establece el método de ensayo para la determinación del exponente n , utiliza el método de mínimos cuadrados estándar para el ajuste de dicha recta (modelo de regresión lineal simple); esa metodología asume que las abscisas están exentas de error, lo cual no es correcto. En este trabajo se propone utilizar un algoritmo de mínimos cuadrados ponderados WTLS (*Weighted Total Least Squares*) que considera errores tanto en ordenadas como en abscisas. Utilizando curvas de ensayo reales, se comparan los valores obtenidos para el exponente n y para su incertidumbre estándar utilizando regresión lineal simple y el algoritmo de mínimos cuadrados ponderados. La metodología aquí propuesta ha sido incorporada como una función en el software INcerTI, diseñado para el cálculo de parámetros e incertidumbres en el ensayo de tracción, desarrollado recientemente en el Instituto Nacional de Tecnología Industrial en Córdoba, Argentina.

Palabras clave – Exponente n , conformado de chapas metálicas, tracción, mínimos cuadrados.

1. INTRODUCCIÓN

La siguiente expresión empírica, conocida como ecuación de Hollomon [1] relaciona la tensión verdadera (σ) y la deformación plástica verdadera (ϵ_p) en la región de deformación plástica uniforme:

$$\sigma = K (\epsilon_p)^n \quad (1)$$

donde los parámetros K y n se conocen como coeficiente de resistencia y exponente de endurecimiento por deformación, respectivamente. La ecuación (1) describe la deformación plástica de muchos metales y es muy utilizada debido a su simplicidad. Otras expresiones debidas a Ludwik, Swift y Voce son también muy conocidas; un análisis sobre la aplicabilidad estas expresiones puede encontrarse en [2].

El exponente n es una propiedad relacionada con la capacidad de estiramiento de un metal durante un proceso de conformado. Mientras más alto es este valor menor es la tendencia del material a causar deformaciones localizadas, lo que posibilita un mejor conformado. También brinda una medida del incremento de la resistencia del material debido a la deformación plástica [3]. Los valores de n , para metales dúctiles a temperatura ambiente, varían generalmente entre 0,02 y 0,5 [4]. Valores típicos de los parámetros K y n para diferentes metales pueden encontrarse en [4].

Tomando logaritmos a ambos miembros de (1)

$$\ln(\sigma) = \ln \left[K (\varepsilon_p)^n \right] \rightarrow \ln(\sigma) = \ln(K) + n \ln(\varepsilon_p) \quad (2)$$

y haciendo el siguiente cambio de variables:

$$y = \ln(\sigma), \quad x = \ln(\varepsilon_p) \quad (3)$$

se aprecia que la ecuación (2) representa una recta $y = a + bx$, con ordenada al origen $a = \ln(K)$ y pendiente $b = n$. Por lo tanto, los parámetros K y n pueden obtenerse mediante una regresión lineal de datos $y-x$.

Los valores de tensión verdadera σ y de deformación verdadera total (ε_T) en el rango de deformación plástica uniforme, pueden determinarse mediante transformaciones apropiadas de los datos de tensión ingenieril (s) y de deformación ingenieril (e) resultantes de un ensayo de tracción convencional. Para obtener la deformación verdadera plástica, debe restarse la deformación verdadera elástica (ε_E) a cada valor de ε_T calculado. La norma ASTM E 646 [5], que establece el método de ensayo para la determinación del exponente n , utiliza en los cálculos ε_T en lugar de ε_p . Como este proceder ha recibido críticas, la versión vigente de esa norma está actualmente en proceso de revisión [6].

La técnica de ajuste actualmente usada para determinar el exponente n a partir de los datos experimentales es el método de mínimos cuadrados convencional aplicado al modelo de regresión lineal, tal como se indica en [5]. Sin embargo, la utilización de esta técnica de ajuste implica asumir que se cumplen ciertos requisitos. Uno de estos requisitos es la ausencia de errores en los datos de abscisas, lo cual no es correcto en nuestro caso; la variable de abscisas es función de la elongación de la probeta, cuya medición no está libre de incertidumbre. Por esta razón, en este trabajo se propone utilizar un algoritmo de mínimos cuadrados ponderados, conocido como WTLS (*Weighted Total Least Squares*) [7], que considera errores en ambas variables. Esta nueva metodología ha sido incorporada como una función en el software INcerTI [8], que se utiliza en el Laboratorio de Ensayos Mecánicos de INTI-Córdoba [9].

El trabajo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2, se repasan las expresiones que permiten transformar la zona de deformación plástica uniforme de la curva ingenieril ($s-e$) en valores verdaderos ($\sigma-\varepsilon_T$). En la sección 3 se expone, en forma resumida, la metodología que brinda la norma ASTM E 646 para la determinación del exponente n . En la sección 4 se presenta el método de cálculo propuesto. En la sección 5, utilizando curvas de ensayo reales, se contrastan los resultados que se obtienen al calcular el exponente n y su incertidumbre estándar de dos maneras diferentes: (i) usando el método estándar de mínimos cuadrados y (ii) mediante la metodología aquí propuesta que utiliza mínimos cuadrados ponderados. Finalmente, se analizan los resultados obtenidos y se exponen las conclusiones del trabajo.

2. TENSIÓN VERDADERA Y DEFORMACIÓN VERDADERA

En esta sección se repasan las expresiones que permiten calcular la tensión verdadera y la deformación verdadera total a partir de datos de la tensión ingenieril y la deformación ingenieril obtenidos en un ensayo de tracción. Para el desarrollo de estas expresiones se asume que la probeta se deforma sin un cambio apreciable de volumen y que la deformación se encuentra uniformemente distribuida a lo largo de su longitud calibrada. Estas suposiciones son válidas en la región de deformación plástica uniforme del diagrama ingenieril de tensión versus deformación (excluyendo la zona de fluencia discontinua, si existiera) hasta el comienzo de la estricción de la probeta, donde se registra la máxima tensión ingenieril. Un análisis minucioso de estas expresiones puede encontrarse en [10].

2.1. Tensión verdadera

Durante la fluencia y el régimen de deformación plástica subsiguiente, el material se deforma sin un cambio apreciable de volumen ya que los incrementos en longitud son compensados con disminuciones del área de la sección transversal. La constancia de volumen implica

$$AL = A_0 L_e \quad (4)$$

En la ecuación (4), A_0 es el área inicial de la sección transversal de la probeta y L_e es la longitud inicial de extensómetro, mientras que A y L representan el área instantánea de la sección transversal y la longitud instantánea del extensómetro, respectivamente. Expresando L en la ecuación (4) como la suma de L_e y la elongación Δ_L , se obtiene la siguiente expresión para el área instantánea:

$$A = A_0 \frac{L_e}{L} = A_0 \frac{L_e}{L_e + \Delta_L} \quad (5)$$

La tensión verdadera, cociente entre la carga (F) y el área instantánea, puede calcularse utilizando (5)

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F}{A_0} \left(\frac{L_e + \Delta_L}{L_e} \right) \quad (6)$$

Notar que la tensión verdadera σ dada en (6) también puede expresarse en función de la tensión ingenieril s y la deformación ingenieril e

$$s = \frac{F}{A_0}, \quad e = \frac{\Delta_L}{L_e} \quad \rightarrow \quad \sigma = s(1+e) \quad (7)$$

2.2. Deformación verdadera

Para calcular la deformación verdadera total ε_T , se considera que un incremento de deformación $d\varepsilon_T$ puede tomarse como un aumento incremental del desplazamiento dL dividido por la longitud instantánea L . Integrando se obtiene

$$d\varepsilon_T = \frac{dL}{L} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_T = \int_{L_e}^L \frac{1}{L} dL = \ln(L) - \ln(L_e) = \ln \frac{L}{L_e} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_T = \ln \left(\frac{L_e + \Delta_L}{L_e} \right) \quad (8)$$

Para obtener ε_p debemos restar ε_E a la deformación verdadera total, como se indica en [10]

$$\varepsilon_p = \varepsilon_T - \varepsilon_E = \varepsilon_T - \frac{\sigma}{E} \quad (9)$$

En la ecuación (9) se asume que el metal se descarga siguiendo una recta cuya pendiente es el módulo de elasticidad inicial E [10]. La norma ASTM E 646 utiliza ε_T en lugar de ε_p para el cálculo del exponente n ; la próxima edición de la norma, cuyo borrador se encuentra actualmente en preparación [6], incorporará probablemente la utilización de la expresión (9).

3. CÁLCULO DEL EXPONENTE DE ENDURECIMIENTO POR DEFORMACIÓN SEGÚN ASTM E 646

Para determinar el exponente n se somete una probeta de dimensiones normalizadas a un ensayo de tracción convencional [5]. De la curva s - e resultante, se elige un tramo continuo y monótono creciente de la región plástica; típicamente, dicho tramo corresponde a rangos de deformación de 5% - 20% ó 15% - 20%. Luego, los datos s - e seleccionados se transforman en valores σ - ε_T mediante las expresiones (6) y (8). Posteriormente, partiendo de m pares de datos (x, y) dados por la expresión (3), se ajusta un modelo de regresión lineal simple. El exponente n y su incertidumbre estándar u_n se determinan a través de las siguientes expresiones, donde las sumatorias indicadas van de 1 a m

$$n = \frac{m \sum xy - \sum x \sum y}{m \sum x^2 - (\sum x)^2} \quad \rightarrow \quad u_n = \sqrt{\frac{m(\sum y^2 - b \sum xy) - (\sum y - b \sum x) \sum y}{(m-2)[m \sum x^2 - (\sum x)^2]}} \quad (10)$$

3.1. Probetas

Las probetas utilizadas para la determinación del exponente n son de sección transversal rectangular, similares a las probetas usadas en ensayos de tracción de chapas según ASTM E 8 [11]. El ancho de la sección reducida de la probeta, de acuerdo a ASTM E 646, debe ser paralelo dentro de una tolerancia de ± 0.025 mm. En cambio, en el caso de las probetas para ensayos de tracción convencionales se permite un pequeño ahusamiento entre los extremos y el centro de la sección reducida para facilitar que la rotura de la probeta ocurra en la región central.

4. UTILIZACIÓN DE UN ALGORITMO DE MÍNIMOS CUADRADOS PONDERADOS

Para que sea válida la utilización del método de mínimos cuadrados convencional (regresión lineal simple) deben cumplirse fundamentalmente tres requisitos:

1. Que no exista correlación entre ordenadas y abscisas.
2. Que los valores de las abscisas se encuentren exentas de error.
3. Que el error asociado a la variable dependiente (ordenada) se encuentre normalmente distribuido con media cero y varianza uniforme.

Si los requisitos (2) y (3) no se cumplen, debe aplicarse otro método de ajuste. Una alternativa es utilizar un método de mínimos cuadrados ponderados que posea requisitos de aplicación más amplios. En tales casos, los parámetros a y b de la recta de ajuste $Y=a+bX$ se obtienen mediante la minimización numérica de la siguiente función de las variables a y b [12]:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^m \left[\frac{(x_k - X_k)^2}{u_{x,k}^2} + \frac{(y_k - Y_k)^2}{u_{y,k}^2} \right] \quad (11)$$

donde (y_k, x_k) denotan m pares de datos con incertidumbres estándar $(u_{y,k}, u_{x,k})$ mientras que (Y_k, X_k) son los puntos de la recta de ajuste que dependen de a y de b . Los factores de ponderación dependen de las incertidumbres estándar de los puntos experimentales y por lo tanto, la eficacia del método radica en estimar correctamente dichas incertidumbres.

4.1. Determinación del exponente n y su incertidumbre aplicando el método WTLS

En este trabajo se propone usar el algoritmo WTLS (*Weighted Total Least Squares*), desarrollado por Krystek y Anton [7]. Dicho método es válido en casos donde las ordenadas y las abscisas tienen errores normalmente distribuidos, con varianza que puede ser uniforme o no.

El algoritmo WTLS cambia la parametrización de la recta; utiliza como parámetros al ángulo α que forma la recta con el eje de abscisas y a la distancia p de la recta al origen de coordenadas, según se indica en la Fig. 1.

$$Y = a + bx \quad \rightarrow \quad Y \cos \alpha - X \sin \alpha - p = 0 \quad (12)$$

donde $a = p / \cos \alpha$ y $b = \tan \alpha$.

Introduciendo la restricción dada por (12) en (11), Krystek y Anton [7] probaron que el problema de minimización en dos dimensiones (α, p) se puede reducir a una dimensión (α) .

La metodología que se presenta a continuación, en las ecuaciones desde (13) hasta (18), es una aplicación del algoritmo WTLS al caso de la determinación del coeficiente de endurecimiento n y su incertidumbre asociada. En todas las sumatorias el índice k se extiende desde 1 hasta m , que es el número de puntos experimentales a los cuales se ajusta la recta.

Para obtener el valor α hay que encontrar el mínimo de la siguiente función:

$$f(\bar{\alpha}) = [\bar{C} - \bar{D} \cos(2\bar{\alpha} - \bar{\varphi})] \bar{G} \xrightarrow{\text{minimizando}} \alpha = \bar{\alpha}_{\text{óptimo}} \quad (13)$$

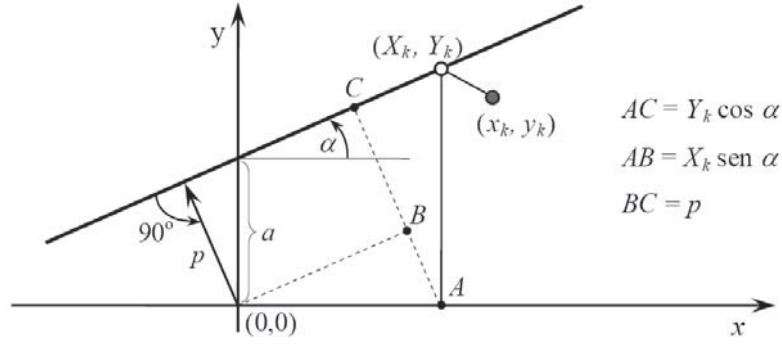


Fig. 1. Línea recta parametrizada por el ángulo respecto a la abscisa y la distancia al origen de coordenadas.

donde los parámetros \bar{C} , \bar{D} , $\bar{\varphi}$, y \bar{G} , que dependen del valor tentativo $\bar{\alpha}$, se calculan en el siguiente orden:

$$\begin{aligned} \bar{g}_k &= u_{x,k}^2 \sin^2 \bar{\alpha} + u_{y,k}^2 \cos^2 \bar{\alpha} & \bar{G} &= \sum (1/\bar{g}_k) & \bar{w}_k &= 1/(\bar{g}_k \bar{G}) & \bar{x} &= \sum \bar{w}_k x_k & \bar{y} &= \sum \bar{w}_k y_k \\ S_x &= \sum \bar{w}_k (x_k - \bar{x})^2 & S_y &= \sum \bar{w}_k (y_k - \bar{y})^2 & S_{xy} &= \sum \bar{w}_k (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) \\ \bar{C} &= S_x + S_y & \bar{D} &= \sqrt{(S_x - S_y)^2 + 4(S_{xy})^2} & \bar{\varphi} &= \tan^{-1} [2S_{xy} / (S_x - S_y)] \end{aligned} \quad (14)$$

La solución de (13) se puede encontrar por tanteos partiendo del valor b^* , provisto por el método de cuadrados mínimos convencional para la pendiente de la recta definida por m puntos.

$$b^* = (m \sum x_k y_k - \sum x_k \sum y_k) / (m \sum x_k^2 - (\sum x_k)^2) \rightarrow \alpha^* = \tan^{-1}(b^*) \quad (15)$$

Una vez obtenido el ángulo α se calcula la distancia al origen p

$$p = \cos \alpha \sum w_k y_k - \sin \alpha \sum w_k x_k \quad (16)$$

donde $w_k = 1 / [g_k \sum (1/g_k)]$, siendo $g_k = u_{x,k}^2 \sin^2 \alpha + u_{y,k}^2 \cos^2 \alpha$.

La incertidumbre u_α se computa con la expresión (17):

$$u_\alpha = \sqrt{\frac{2R}{RT - S^2}} \quad (17)$$

donde R , S y T se obtienen como sigue:

$$\begin{aligned} g_k &= u_{x,k}^2 \sin^2 \alpha + u_{y,k}^2 \cos^2 \alpha & h_k &= 2(u_{x,k}^2 - u_{y,k}^2) \sin \alpha \cos \alpha & q_k &= 2(u_{x,k}^2 - u_{y,k}^2) (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ v_k &= y_k \cos \alpha - x_k \sin \alpha - p & s_k &= -y_k \sin \alpha - x_k \cos \alpha \\ R &= \sum \frac{2}{g_k} & S &= -2 \sum \left(\frac{s_k}{g_k} - \frac{v_k h_k}{g_k^2} \right) & T &= \sum \left(\frac{2(s_k^2 - v_k^2 - v_k p)}{g_k} - \frac{4v_k s_k h_k + v_k^2 q_k}{g_k^2} + \frac{2v_k^2 h_k^2}{g_k^3} \right) \end{aligned}$$

Retornando a la variable b (pendiente de la recta) y teniendo en cuenta que el valor de esa pendiente es el exponente n , se tiene

$$n = b = \tan \alpha \rightarrow u_n = u_b = \frac{db}{d\alpha} u_\alpha = \frac{u_\alpha}{\cos^2 \alpha} \quad (18)$$

donde se ha tenido en cuenta la ley de propagación de la incertidumbre de (21). En el apartado siguiente se exponen algunos conceptos y definiciones importantes sobre el cálculo de incertidumbres de medición.

Luego, en el apartado 4.3 se describe cómo evaluar las incertidumbres asociadas a las variables x e y , lo que posibilita la aplicación del algoritmo WTLS.

4.2. Conceptos importantes sobre la evaluación de incertidumbres de medición

Las definiciones y conceptos que se exponen a continuación, están basados en la guía sobre incertidumbre de medición, “*Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*”, una de las principales referencias internacionales en esta materia [13].

Mensurando: cantidad objeto de una medición.

Incetidumbre: parámetro asociado al resultado de una medición que caracteriza la dispersión de valores que pueden atribuirse en forma razonable al mensurando.

Incetidumbre estándar: incetidumbre del resultado de una medición expresada como una desviación estándar.

Incetidumbre estándar combinada: incetidumbre del resultado de una medición cuando este resultado es obtenido a partir de los valores de otras magnitudes.

Sea, por ejemplo, un mensurando M , función de m variables de entrada x_1, x_2, \dots, x_m , medidas con incertidumbres estándar $u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_m}$

$$M = f(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (19)$$

Se puede demostrar que la incertidumbre estándar combinada del mensurando M es función de las dispersiones u_{x_i} y las covarianzas u_{x_i, x_j} , a través de la siguiente expresión [14, 15]:

$$u_M = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial M}{\partial x_i} u_{x_i} \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m \frac{\partial M}{\partial x_i} \frac{\partial M}{\partial x_j} u_{x_i, x_j}} \quad (20)$$

La ecuación (20) está basada en una aproximación en series de Taylor de primer orden de la ecuación (19) y se conoce como “ley de propagación de incertidumbres”. Notar que la expresión (20) se simplifica cuando las variables de entrada no se encuentran correlacionadas, ya que en este caso las covarianzas u_{x_i, x_j} son nulas.

$$u_M = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial M}{\partial x_i} u_{x_i} \right)^2} \quad (21)$$

Factor de cobertura: es un número que multiplicado por la incertidumbre estándar combinada, produce un intervalo (incertidumbre expandida) alrededor del resultado de la medición que se espera abarque un porcentaje especificado (i.e. 95%) de la distribución de valores que pueden atribuirse al mensurando.

Incetidumbre expandida: es la que resulta de multiplicar la incertidumbre estándar combinada por un factor de cobertura k :

$$U = k u_M \quad (22)$$

4.3. Determinación de las incertidumbres estándar asociadas a las variables x e y

Teniendo en cuenta el valor de σ dado en (6) y de ε_T dado en (8), las coordenadas x e y de los puntos usados para ajustar la recta están dados por las siguientes expresiones:

$$x = \ln(\varepsilon_T) = \ln \left[\ln \left(\frac{L_e + \Delta_L}{L_e} \right) \right] \quad y = \ln(\sigma) = \ln \left[\frac{F}{A_0} \left(\frac{L_e + \Delta_L}{L_e} \right) \right] \quad (23)$$

Aplicando la ley de propagación de incertidumbres expresada en la ecuación (21), ya que las variables de entrada no se encuentran correlacionadas, se obtiene

$$u_x = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \Delta_L} u_{\Delta_L} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial L_e} u_{L_e} \right)^2} \quad u_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \Delta_L} u_{\Delta_L} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial L_e} u_{L_e} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial F} u_F \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial A_0} u_{A_0} \right)^2} \quad (24)$$

Notar que la incertidumbre estándar combinada asociada a x depende de dos variables (Δ_L, L_e) mientras que en el caso de y depende de cuatro variables (Δ_L, L_e, F, A_0). Las derivadas parciales indicadas en la ecuación (24) están dadas por las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial x}{\partial \Delta_L} = \frac{1}{(L_e + \Delta_L) \ln\left(\frac{L_e + \Delta_L}{L_e}\right)} \quad \frac{\partial x}{\partial L_e} = \frac{-\Delta_L}{L_e (L_e + \Delta_L) \ln\left(\frac{L_e + \Delta_L}{L_e}\right)} \quad (25)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \Delta_L} = \frac{1}{L_e + \Delta_L} \quad \frac{\partial y}{\partial L_e} = \frac{-\Delta_L}{L_e (L_e + \Delta_L)} \quad \frac{\partial y}{\partial A_0} = \frac{-1}{A_0} \quad \frac{\partial y}{\partial F} = \frac{1}{F} \quad (26)$$

A continuación se describe como evaluar las incertidumbres parciales expresadas en (24), siguiendo los lineamientos de la guía para expresión de incertidumbres de medición [13].

4.3.1. Incertidumbre en la medición de la elongación

La incertidumbre en la medición de la elongación se obtiene del certificado de calibración del extensómetro utilizado en el ensayo. En dicho certificado, la incertidumbre se encuentra tabulada para diferentes rangos de elongación.

4.3.2 Incertidumbre en la medición de la longitud inicial del extensómetro

Asumiendo, en forma conservadora, un error de $\pm 0,5\%$ en la medición de la longitud inicial del extensómetro, se puede adoptar el siguiente valor para la incertidumbre asociada a L_e :

$$u_{L_e} = 0,005 L_e / \sqrt{3} \quad (27)$$

donde se ha considerado una distribución de probabilidad uniforme.

4.3.3 Incertidumbre en la medición de la carga

La incertidumbre estándar en la medición de las fuerzas está tabulada, para distintos rangos de cargas, en el certificado de calibración de la celda de carga utilizada en el ensayo

$$u_F = U_F / k_F \quad (28)$$

donde U_F es la incertidumbre expandida de calibración de la celda de carga y k_F es el factor de cobertura indicado en el informe de calibración.

4.3.4 Incertidumbre en la medición del área de la sección transversal inicial de la probeta

Las probetas utilizadas en el ensayo son de sección transversal rectangular (ver sección 3.1). El proceso de medición del área de la sección transversal de la probeta consiste en medir el ancho (b) y el espesor (h), utilizando instrumentos de medición apropiados, y en base a los valores medios de estas medidas calcular el área. De acuerdo a la expresión (21), u_{A_0} resulta

$$A_0 = bh \rightarrow u_{A_0} = \sqrt{\left(\frac{\partial A_0}{\partial b} u_b\right)^2 + \left(\frac{\partial A_0}{\partial h} u_h\right)^2} = \sqrt{(h u_b)^2 + (b u_h)^2} \quad (29)$$

A modo de ejemplo, supongamos que el ancho de la probeta ha sido medido n veces (con $n \geq 3$) usando un calibre. La componente aleatoria de la incertidumbre asociada a la medición de b se obtiene a través de la desviación estándar del promedio de las mediciones, que denotamos como δ_b^* .

$$\bar{b}_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_{i_k} \rightarrow \delta_b = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (b_{i_k} - \bar{b}_i)^2} \rightarrow \delta_b^* = t \frac{\delta_b}{\sqrt{n}} \quad (30)$$

donde δ_b es la desviación estándar de las mediciones b_i y t es el factor de la distribución de Student que corresponde a un nivel de confianza de 68,27 %. Se tendrán también componentes de incertidumbre sistemáticas debidas al calibre utilizado. Del certificado de calibración del instrumento se obtienen: (i) la incertidumbre expandida U_{CAL} resultante de la calibración, con su factor de cobertura k_{CAL} y (ii) el máximo error de indicación del instrumento E_{IND} . Estos valores se expresan como incertidumbres estándar a través de las siguientes expresiones:

$$u_{CAL} = U_{CAL} / k_{CAL}, \quad u_{IND} = E_{IND} / \sqrt{3} \quad (31)$$

Notar que las expresiones en (31) son similares a (27) y (28). Para obtener u_b se combinan en forma cuadrática las incertidumbres estándar indicadas en las expresiones (30) y (31)

$$u_b = \sqrt{\left(t \delta_b / \sqrt{n}\right)^2 + \left(U_{CAL} / k_{CAL}\right)^2 + \left(E_{IND} / \sqrt{3}\right)^2} \quad (32)$$

La incertidumbre estándar combinada u_h se evalúa en forma análoga a u_b .

5. EJEMPLOS DE ANÁLISIS

En esta sección se muestran los resultados de tres ensayos de un acero que se utiliza en procesos de conformado. Las tres probetas ensayadas, designadas como A, B y C, fueron obtenidas a 0°, 45° y 90° respecto a la dirección de laminación del material. En la Tabla 1 se listan las medidas de las secciones transversales de las probetas conjuntamente con las incertidumbres estándar asociadas, calculadas usando la metodología descrita en el apartado 4.3.4.

En la Fig. 2 se muestran las curvas s - e correspondientes a los ensayos de tracción realizados sobre las probetas A, B y C. Los resultados para las probetas A y B son bastante similares, mientras que el comportamiento de la probeta C es algo distinto, aunque las diferencias son pequeñas.

El número de puntos experimentales registrados en un ensayo depende de la velocidad de deformación y de la frecuencia de adquisición de datos seleccionada; en general, las máquinas modernas registran típicamente entre mil y tres mil valores de carga y elongación. Dichos puntos experimentales poseen dispersión, por lo que su tratamiento debe basarse en fundamentos estadísticos sólidos. De manera informal se habla de la “curva” carga versus elongación, pero en realidad se tienen registros de dos series temporales correspondientes a la elongación y a la carga que, debido a la aleatoriedad, no son monótonas crecientes ni aún en el período lineal. A modo de ejemplo, en la Fig. 2 se hizo una ampliación de una zona del gráfico para mostrar en detalle que la curva está compuesta por puntos discretos de carácter aleatorio obtenidos en ensayos. En la zona ampliada cada curva contiene aproximadamente 50 puntos, y para todo el gráfico se tienen alrededor de 3000 puntos para cada curva.

Para ilustrar las transformaciones involucradas en la determinación del exponente n se han indicado en la curva resultante del ensayo de tracción de la probeta C, los puntos P y Q (ver Fig. 2) que definen los extremos del intervalo $[0,0512 < e < 0,1444]$. Tanto los datos e - s del ensayo de la probeta C como los valores verdaderos $\varepsilon_T - \sigma$ obtenidos mediante las expresiones (8) y (6), se encuentran graficados en la Fig. 3; notar que los puntos P y Q se transforman en P* y Q* que delimitan la región $[0,05 < \varepsilon_T < 0,135]$.

Tabla 1. Medidas de las secciones transversales de las probetas ensayadas.

Designación de la probeta	Ancho: $b \pm u_b$ [mm]	Espesor: $h \pm u_h$ [mm]	Área: $A_0 \pm u_{A_0}$ [mm ²]
A (0° - Longitudinal)	12,48 ± 0,02	1,056 ± 0,002	13,18 ± 0,03
B (45° - Diagonal)	12,51 ± 0,02	1,057 ± 0,002	13,22 ± 0,03
C (90° - Transversal)	12,50 ± 0,02	1,039 ± 0,002	12,99 ± 0,03

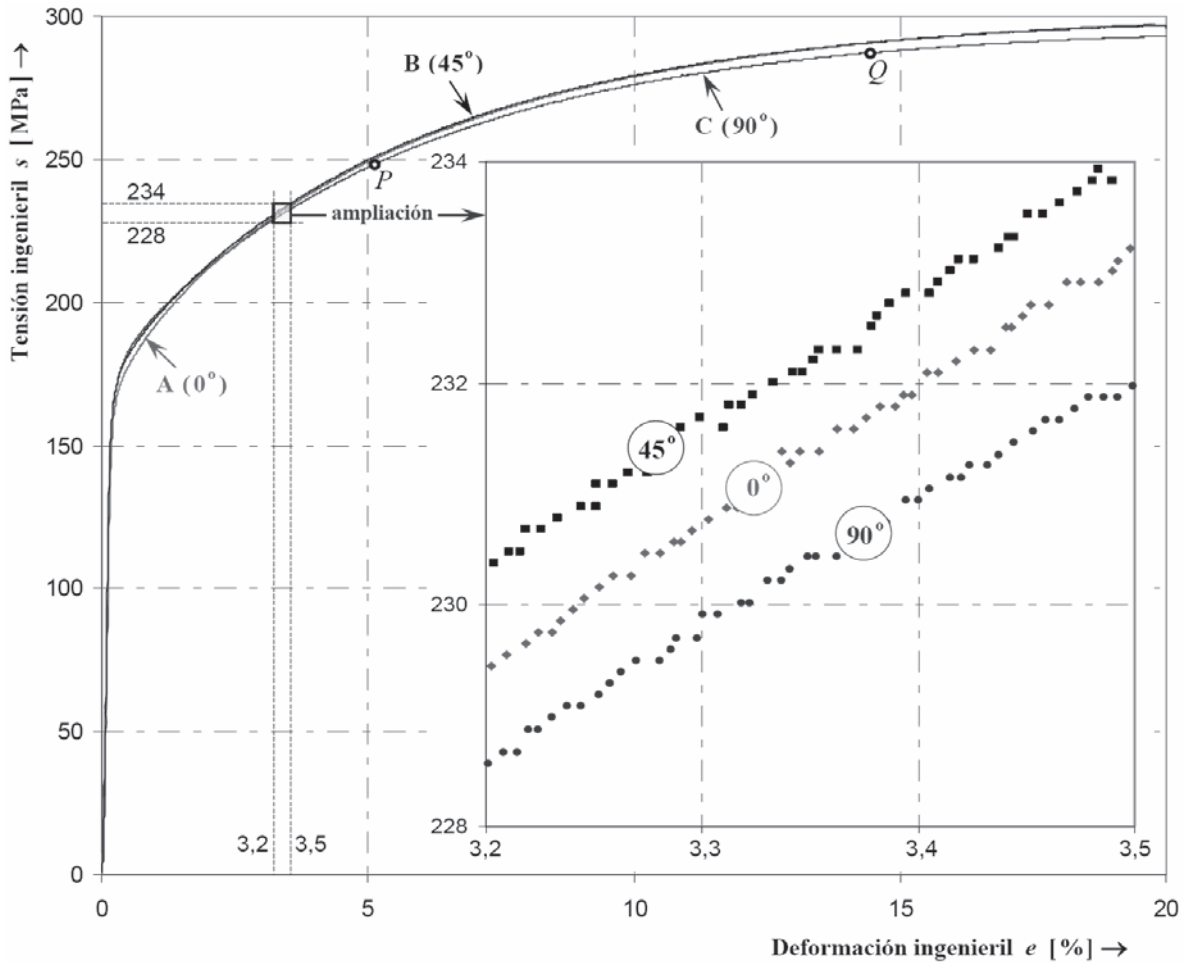


Fig. 2. Curvas tensión-deformación $s-e$ de los ensayos de tracción realizados para determinar el exponente n .

Al tomar logaritmos, los datos $\epsilon_T - \sigma$ de la probeta C se convierten en los valores graficados en la Fig. 4, que corresponden a la parte sombreada de la Fig. 3.

En la Fig. 4, donde se muestran las curvas $\ln(\sigma)$ versus $\ln(\epsilon_T)$ para los probetas A, B y C, se puede verificar una relación prácticamente lineal entre las variables $\ln(\sigma)$ y $\ln(\epsilon_T)$. El gráfico corresponde a deformaciones verdaderas en el rango $[-3 < \ln(\epsilon_T) < -2]$, o sea entre el 5% y el 13,5%. El rango para las ordenadas graficadas $[5,55 < \ln(\sigma) < 5,8]$ está asociado a tensiones verdaderas entre 257 MPa y 330 MPa. También se muestra en esta figura una ampliación de una zona del gráfico para mostrar la distribución aleatoria de los resultados del ensayo. Notar que los puntos P^{**} y Q^{**} , indicados en la Fig. 4 para el ensayo de la probeta C, son los transformados de los puntos P^* y Q^* de la Fig. 3, los cuales a su vez están relacionados con los puntos P y Q indicados en la Fig. 2 y en la Fig. 3.

La Tabla 2 contiene los resultados para el exponente n y su incertidumbre estándar, obtenidos mediante el método de mínimos cuadrados convencional. En la tabla 3 se presentan los resultados que brinda el método de mínimos cuadrados ponderados (WTLS). En todos los casos se utilizaron en los cálculos, intervalos de deformación ingenieril entre el 5% y el 15%, o sea $[0,05 < e < 0,15]$.

Con el fin de comparar ambos métodos, los resultados en las tablas 2 y 3 se han expresado con 6 cifras decimales. La cantidad correcta de cifras significativas con que debe informarse el resultado de una medición depende de la estimación de la incertidumbre asociada [16]. Si se utiliza el criterio de informar la incertidumbre estándar con una sola cifra significativa, los resultados deben expresarse tal como se indica en la tabla 4. El método convencional, al asumir que la variable x carece de error, aparenta ser más exacto que el algoritmo de mínimos cuadrados ponderados, lo cual no es correcto.

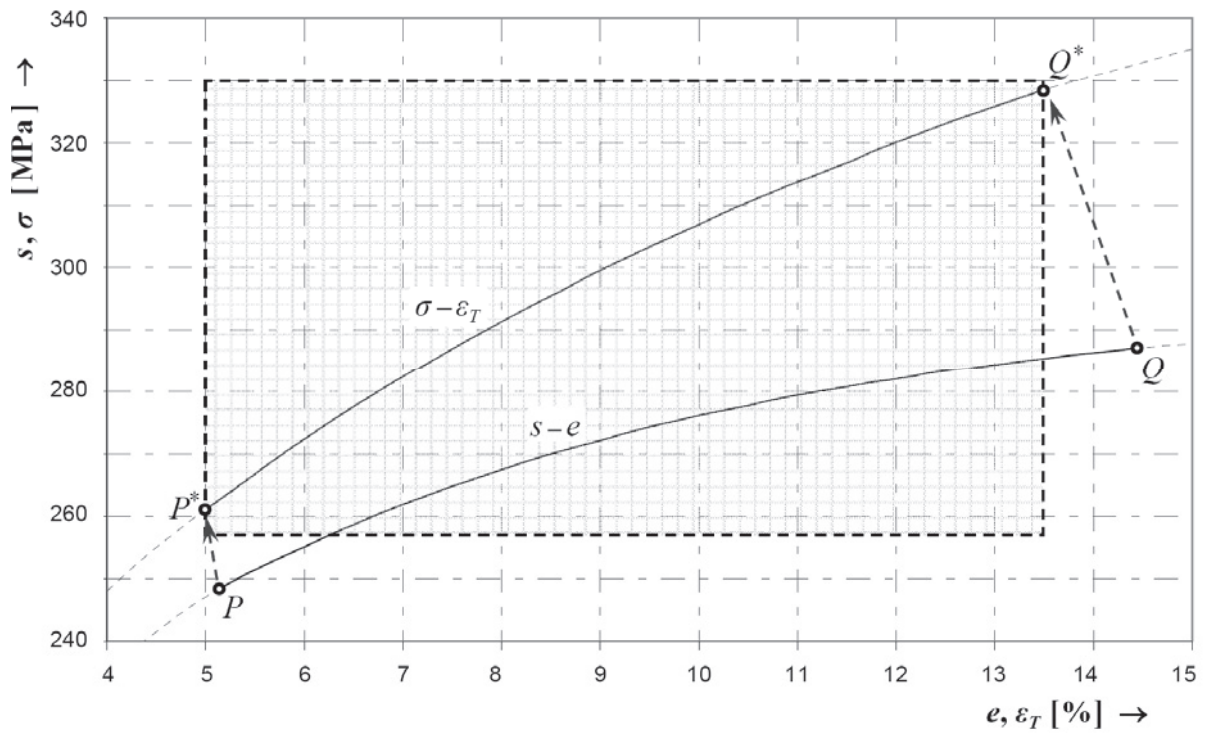


Fig. 3. Curva tensión-deformación ingenieril $s-e$ y su transformada $\sigma-\epsilon_T$ para el ensayo de la probeta C.

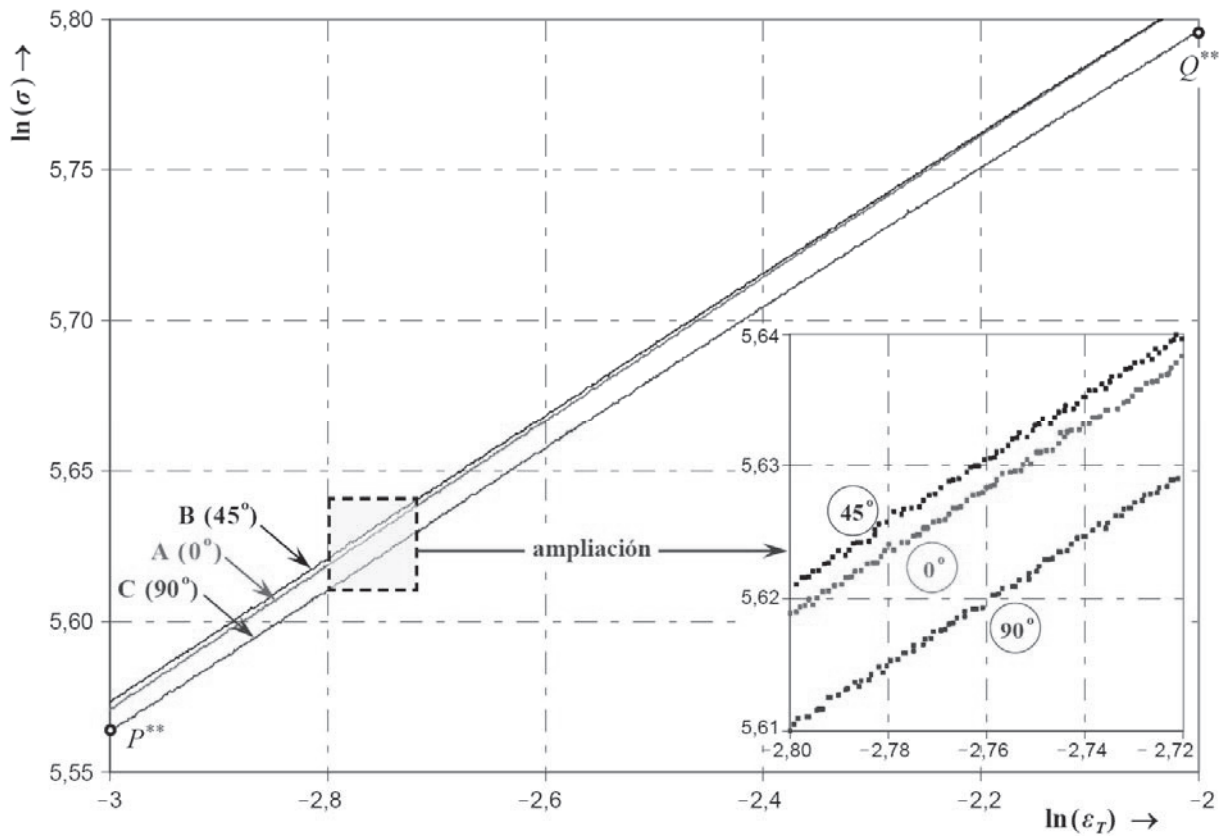


Fig. 4. Curvas $\ln(\sigma)$ versus $\ln(\epsilon_T)$ para los ensayos de las probetas A, B y C (rango de deformación ϵ_T del 5% al 13,5%).

Tabla 2. Resultados para el exponente n y su incertidumbre estándar usando mínimos cuadrados estándar.

Designación de la probeta	Exponente n	Incertidumbre estándar	Incertidumbre estándar %	Rango de deformación %	Número de puntos
A (0° – Longitudinal)	0,237057	0,000042	0,02	5–15	1498
B (45° – Diagonal)	0,234470	0,000051	0,02	5–15	1487
C (90° – Transversal)	0,232666	0,000052	0,02	5–15	1487

Tabla 3. Resultados para el exponente n y su incertidumbre estándar usando mínimos cuadrados ponderados.

Designación de la probeta	Exponente n	Incertidumbre estándar	Incertidumbre estándar %	Rango de deformación %	Número de puntos
A (0° – Longitudinal)	0,237047	0,000230	0,10	5–15	1498
B (45° – Diagonal)	0,234458	0,000219	0,09	5–15	1487
C (90° – Transversal)	0,232658	0,000254	0,11	5–15	1487

Tabla 4. Resultados informados con las cifras significativas que imponen las incertidumbres estándar correspondientes.

Designación de la probeta	Exponente n (método estándar)	Exponente n (algoritmo WTLS)
A (0° – Longitudinal)	0,23706 ± 0,00004	0,2371 ± 0,0002
B (45° – Diagonal)	0,23447 ± 0,00005	0,2345 ± 0,0002
C (90° – Transversal)	0,23267 ± 0,00005	0,2327 ± 0,0002

Los resultados obtenidos para el exponente de endurecimiento por deformación (n) muestran que las propiedades para el proceso de conformado son mejores en el sentido longitudinal ($n_0 \cong 0,237$) y se van degradando levemente para ángulos crecientes ($n_{45} \cong 0,235$ y $n_{90} \cong 0,233$), siendo mínimas en el sentido transversal (probeta C).

6. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Los resultados presentados en las tablas 2 y 3 muestran que existe una plena concordancia entre los resultados para el exponente n obtenidos mediante regresión lineal simple y utilizando el algoritmo de mínimos cuadrados ponderados. Sin embargo, no sucede lo mismo en el caso de las incertidumbres estándar asociadas a los valores de n calculados.

Las incertidumbres estándar estimadas con el método de mínimos cuadrados convencional son de un orden de magnitud menor que las obtenidas con el algoritmo WTLS, y esto crea una expectativa de falsa exactitud en los valores calculados del exponente de endurecimiento por deformación.

En conclusión, el algoritmo WTLS brinda una estimación más realista de la incertidumbre estándar asociada al parámetro n y por lo tanto, permite informar el parámetro calculado con una cantidad correcta de cifras significativas. El mérito del método propuesto es que reconoce la dispersión de los valores medidos (tanto en x como en y) y pone al descubierto que el método convencional subestima la dispersión al no considerar a x como variable aleatoria.

REFERENCIAS

- [1] Hollomon, J., "Tensile deformation", *Trans AIME*, **32**, 268-290 (1945)
- [2] Kleemola, H.J., Nieminen, M.A., "On the strain-hardening parameters of metals", *Metallurgical Transactions*, **5**, 1863-1866 (1974)
- [3] Gedney, R., "Sheet metal formability", *Advances Materials & Processes*, **160**, 33-36 (2002)
- [4] Metals Handbook Volume 8 (Ninth Edition), American Society for Metals (1988)
- [5] ASTM E 646, Standard Test Method for Tensile Strain-Hardening Exponents (n -Values) of Metallic Sheet Materials (2007)
- [6] Grupo de trabajo ASTM WK34111, <http://www.astm.org/DATABASE.CART/WORKITEMS/WK34111.htm> (2011)
- [7] Krystek, M., Anton, M., "A weighted total least squares algorithm for fitting a straight line", *Measurement Science Technology*, **18**, 3438-3442 (2007).
- [8] Matusевич, A., Mancini, R., Massa, J., "Desarrollo de un postprocesador de datos experimentales para estimar parámetros e incertidumbres en el ensayo de tracción", *Memorias del Primer Congreso Argentino de Ingeniería Mecánica* (2008)
- [9] Instituto Nacional de Tecnología Industrial – Centro Regional Córdoba, <http://www.inti.gov.ar/cordoba/>.
- [10] Dieter, G., *Mechanical Metallurgy*, McGraw-Hill, New York (1986)
- [11] ASTM E 8, Standard Test Methods for Tension Testing of Metallic Materials (2009)
- [12] Deming, W.E., *Statistical Adjustment of Data*, Dover New York (1984)
- [13] BIPM, IEC, IFCC, ISO, IUPAC, IUPAP, OIML, *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, Geneva, Switzerland. ISBN 92-67-10188-9, First Edition (1993)
- [14] Kline, S.J., McClintock, F.A., "Describing uncertainties in single-sample experiments", *Mechanical Engineering*, **75**(1), 3-8 (1953)
- [15] Coleman, H.W., Steele, W.G., *Experimentation and Uncertainty Analysis for Engineers*, Second Edition, Wiley, New York (1999)
- [16] Maiztegui, A., Gleiser, J., *Mediciones de Laboratorio*, Taller Gráfico de José Solsona (2000)

WEIGHTED-TOTAL-LEAST-SQUARES ALGORITHM IN THE COMPUTATION OF THE TENSILE STRAIN-HARDENING EXPONENT

Abstract – This paper presents a new method for the computation of the tensile strain-hardening exponent of metals. This parameter arises from the empirical relation between true stress and true-plastic strain, known as Hollomon equation, which describes the plastic flow of many metals. The exponent n can be determined from an ordinary tension test through appropriate transformations of stress-strain data and the least-squares fitting of a straight line. The procedure for the computation of n values, specified in ASTM E 646 standard, stipulates the use of the ordinary-least-squares method (OLS) for the fitting of this line; this method assumes that abscissas are free of uncertainty, which is not correct. In this work we propose the utilization of a Weighted-Total Least-Squares algorithm (WTLS), which takes into account uncertainties in both variables. Making use of real-tension-test curves we compare the results obtained for n and its standard uncertainty, using OLS and WTLS techniques. The proposed method has been computer implemented as a function of INcerTI, software designed for the computation of tension-test parameters and their uncertainties, recently developed at the National Institute of Industrial Technology in Córdoba, Argentina.

Keywords – Tensile strain-hardening exponent, Sheet metal forming, Tension test, Least squares.