



OPTIMIZACIÓN DE POSICIONAMIENTO DE SENSORES Y ACTUADORES PIEZOELÉCTRICOS EN UNA PLACA TOTALMENTE LIBRE A TRAVÉS DEL ANÁLISIS DE VALORES SINGULARES

AGUINALDO SOARES DE OLIVEIRA, JOSÉ JULIANO LIMA DE JUNIOR

Universidad Federal de Itajubá
Av. BPS, Barrio Pinheirinho, Brasil, C.P. 37500-903

(Recibido 5 de abril de 2004, para publicación 3 de junio de 2004)

Resumen – Los actuadores y sensores piezoeléctricos han recibido mucha atención por parte de los investigadores. La razón de esto es porque estos dispositivos presentan el efecto de la piezoelectricidad. Este efecto consiste en la conversión, de energía mecánica en eléctrica y viceversa. Este efecto es muy útil en el control activo de vibraciones, AVC, y sus resultados son más eficientes que los de control pasivo. Las estructuras inteligentes son unidades compuestas por actuadores, sensores, controladores y estructura. En un buen proyecto de estructura inteligente, el posicionamiento de sensores y actuadores piezoeléctricos son una parte fundamental, porque el mal posicionamiento puede causar la pérdida de la observación y control del sistema. Este trabajo propone una técnica de posicionamiento de sensores y actuadores piezoeléctricos, a través del índice obtenido de la descomposición en valores singulares de la matriz de entrada [B]. Los valores obtenidos de este índice son comparados con la simulación realizada en elementos finitos para una placa totalmente libre, donde se puede verificar el desempeño de este índice.

1. INTRODUCCION

El control activo de vibraciones es hoy una realidad, pues los resultados obtenidos son efectivamente mejores que los de control pasivo [1]. El control activo de vibraciones utilizando materiales piezoeléctricos es un tópico de mucho interés por parte de los investigadores, [2]. Esto es porque los materiales piezoeléctricos son leves, resistentes y pueden funcionar como actuadores y sensores debido a que presentan la propiedad de piezoelectricidad, [3] y [4]. Propiedad que permite la conversión de energía mecánica en eléctrica y viceversa [5] y [6]. Hoy, esos sistemas integrando estructuras, sensores, actuadores y controladores son conocidos como estructuras inteligentes [7]. Entre los materiales que presentan la piezoelectricidad tenemos las cerámicas, PZT (Titanato Zirconato de Plomo) y las películas plásticas, PVDF (Fluorido de Polivinilideno) [8]. Las cerámicas poseen alta rigidez, siendo más aplicadas como actuadores. En cuanto que los polímeros son más maleables y pueden ser producidos en formas geométricas complejas, siendo por esta razón utilizada como sensores [8], [9] y [10]. El control activo de vibraciones mecánicas usando la tecnología de estructuras inteligentes tiene aplicaciones en muchas áreas, desde óptica activa hasta fuselaje de aviones. Los actuadores de PZT son empleados también en el control acústico en estructuras activas (ASAC), con la finalidad de reducir el ruido de compartimientos y en el control activo de vibraciones mecánicas (AVC), [11] y [12], [13].

El estudio de posicionamiento de sensores y actuadores piezoeléctricos es parte fundamental en un buen proyecto de estructuras inteligentes. El mal posicionamiento de sensores y actuadores sobre una estructura, en la cual se desea controlar activamente las vibraciones mecánicas, provocará la pérdida de la observación y control del sistema, [14]. El estudio de posicionamiento de actuadores y sensores piezoeléctricos es un proceso de optimización de estos componentes sobre una estructura flexible. En el trabajo de [12], es realizado un estudio de posicionamiento de actuadores PZT empleando en el control acústico en estructuras flexibles, utilizando un método de optimización a través de algoritmos genéticos (GAS). El desempeño de la configuración optimizada obtenida es satisfactorio para controlar frecuencias en un rango de 100 Hz a 500 Hz en una estructura flexible. Otros estudios de posicionamiento de actuadores y sensores

piezoeléctricos son los trabajos de: [15] y [16], donde es propuesta la descomposición en valores singulares (SVD) de la matriz de entrada [B]. De este método la energía de activación es minimizada, de manera de obtener un índice que cuantifica las posiciones donde la energía abastecida por el controlador a los actuadores es mínima para excitar un determinado modo. La función SVD minimiza la suma de los cuadrados de los ganancias de los actuadores. Si todos los actuadores son del mismo tipo, entonces esta suma del cuadrado del ganancia de los actuadores está relacionada directamente a la energía requerida para excitar un determinado modo. En el trabajo de [21], son realizadas simulaciones del posicionamiento de n actuadores piezoeléctricos en una viga bi-apoyada y cantiliver. El trabajo de [17], visa la optimización del posicionamiento de actuadores y sensores teniendo en vista la estabilidad y el desempeño del controlador. En el trabajo de [17], se considera como medida ideal para manosear el grado de control y observación del sistema el menor autovalor de las matrices gramianas, donde se demuestra que el autovalor mínimo alcanza el máximo en puntos que coinciden con la deflexión máxima y es cero donde la viga no sufre ninguna deformación. El modelaje también es una parte importante en un proyecto de estructuras inteligentes. En este tópico podemos citar el trabajo de [18] donde es realizado una modelaje usando la teoría viga Timoshenko con PZT colados en la estructura. Las frecuencias naturales y los modos asociados con movimiento flexible son computados para varias variantes de PZT distribuidos sobre la estructura soporte. En el trabajo de [18] los efectos del posicionamiento y del cisallamiento de las características modales son demostrados usando como ejemplo una viga cantilever. En este trabajo son consideradas solamente las propiedades pasivas de los PZT y también la perfecta adhesión de esté con la estructura soporte.

En el presente trabajo, es realizado un modelaje, en elementos finitos, de una placa totalmente libre con actuadores y sensores piezoeléctricos incorporados, en el espacio de estado. La matriz de valores singulares [S] es obtenida de la descomposición en valores singulares de la matriz de entrada [B]. Esta descomposición abastece un índice que cuantificará el factor de control del sistema [16] y [19].

2. DISCRETIZACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS

Como se muestra en la figura 1, los campos de desplazamiento u , v , w pueden ser expresados por las hipótesis de Kirchoff como [8], [9] e [10]:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1)$$

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2)$$

$$w = w(x, y) \quad (3)$$

donde: x e y son coordenadas del sistema cartesiano localizado en la superficie media de la placa y z es la dirección a lo largo de la espesura de la placa [20].

Debido a la desconsideración del efecto de cisallamiento el campo de deformación puede ser escrito en términos de los desplazamientos como:

$$\{\varepsilon\} = -z \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}^T \quad (4)$$

Se considera cuatro nudos en el elemento de la placa rectangular basado en la teoría clásica de placa [21], donde cada nudo posee tres grados, a saber: desplazamiento \bar{w} en la dirección z ; rotación $\bar{\theta}_x$ con relación al eje x y rotación $\bar{\theta}_y$, con relación al eje y . La función de desplazamiento w es:

$$w(x_i, y_i) = d_1 + d_2 x_i + d_3 y_i + d_4 x_i^2 + d_5 x_i y_i + d_6 y_i^2 + d_7 x_i^3 + d_8 x_i^2 y_i + d_9 x_i y_i^2 + d_{10} y_i^3 + d_{11} x_i^3 y_i + d_{12} x_i y_i^3 \quad (5)$$

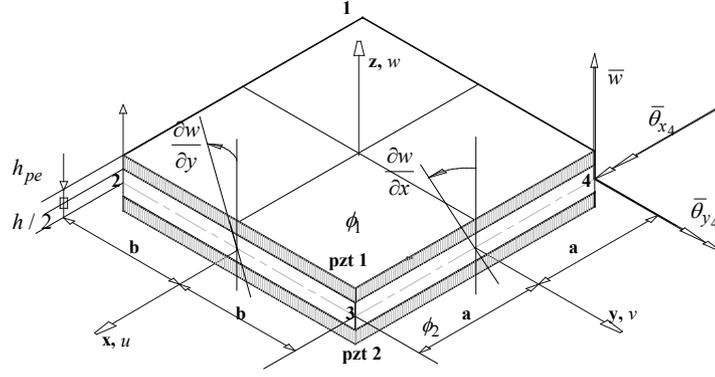


Fig. 1. Elemento de placa.

donde:

$$\begin{aligned} i &= 1 \dots 4 \\ x_1 &= -a & y_1 &= -b & x_2 &= a & y_2 &= b \\ x_3 &= a & y_3 &= b & x_4 &= -a & y_4 &= b \end{aligned} \quad (6)$$

El campo de desplazamiento transversal es expresado, como:

$$w = \{P\}^T \{d\} \quad (7)$$

El vector $\{q_i\}$ es definido como el campo de desplazamiento nodal, en el elemento rectangular, como:

$$\{q_i\} = \{\bar{w}_1 \quad \bar{\theta}_{x_1} \quad \bar{\theta}_{y_1} \quad \dots \quad \bar{w}_4 \quad \bar{\theta}_{x_4} \quad \bar{\theta}_{y_4}\}^T \quad (8)$$

3. ECUACIÓN VARIACIONAL PARA MEDIOS PIEZOELÉCTRICOS

El comportamiento del material piezoeléctrico, donde existen efectos eléctricos y mecánicos puede ser escrito en la forma matricial, como [8]:

$$\begin{aligned} \iiint_V \rho \{\delta u\}^T \{\ddot{u}\} dV + \iiint_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \iiint_V \{\delta E\}^T \{D\} dV = \\ \iiint_V \{\delta u\}^T \{\bar{f}_v\} dV + \iint_{S_F} \{\delta u\}^T \{\bar{f}_s\} ds - \iint_{S_q} \delta \phi \sigma_q dS \end{aligned} \quad (9)$$

La ecuación constructiva de la piezoelectricidad lineal es:

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [c^E] \{\varepsilon\} - [e] \{E\} \\ \{D\} &= [e]^T \{\varepsilon\} - [\xi^\varepsilon] \{E\} \end{aligned} \quad (10)$$

siendo que:

$$\begin{aligned} [e] &= [c^E] [d] \\ [\xi^\varepsilon] &= [\xi^\sigma] - [d]^T [c^E] [d] \end{aligned} \quad (11)$$

donde: $\{\sigma\}$ - tensor de tensión mecánica; $\{\varepsilon\}$ - tensor de deformación; $\{E\}$ - vector de campo; $\{D\}$ - vector de desplazamiento eléctrico; $[c^E]$ - matriz de elasticidad para campo eléctrico constante; $[e]$ - matriz de constantes de tensiones piezoeléctricas; $[\xi^\varepsilon]$ - tensor de constantes dieléctricas para deformación constante $[\xi^\sigma]$ - matriz de constantes dieléctricas para tensión mecánica constante; $[d]$ - matriz de constantes de de-

formaciones piezoeléctricas. Substituyendo la ecuación (10) en la (9), se obtiene la ecuación del principio variacional electromecánico para medios piezoeléctricos:

$$\begin{aligned} & \iiint_V \rho \{\delta u\}^T \{\ddot{u}\} dV + \iiint_V \{\delta \varepsilon\}^T [c^E] \{\varepsilon\} dV - \iiint_V \{\delta \varepsilon\}^T [e]^T \{E\} dV - \iiint_V \{\delta E\}^T [e] \{\varepsilon\} dV \\ & - \iiint_V \{\delta E\}^T [\xi] \{E\} dV = \iiint_V \{\delta u\}^T \{\bar{f}_V\} dV + \iint_{S_f} \{\delta u\}^T \{\bar{f}_S\} dS - \iint_{S_q} \delta \phi \sigma_q dS \end{aligned} \quad (12)$$

Utilizando el principio de Hamilton y principio variacional electromecánico para medios piezoeléctricos en elementos finitos y aplicando al caso de una placa rectangular, se obtiene las matrices de masa de la estructura sin o con el elemento piezoeléctricos incorporado:

$$[m_{st}] = \rho_{st} h \iint_{A_{st}} [N_w]^T [h_{st}] [N_w] dA_{st} \quad (13)$$

$$[m_{pe}] = \rho_{st} h_c \iint_{A_{pe}} [N_w]^T [h_{pe}] [N_w] dA_{pe} \quad (14)$$

donde: el índice st indica estructura y pe indica elemento piezoeléctrico. Las matrices de rigidez estructural y piezoeléctrica son:

$$[k_{qq}] = \iint_{A_{pe}} [B_K]^T [c_k^{pe}] [B_k] dA_{pe} \quad (15)$$

$$[k_{q\phi}] = h_b^2 \iint_{A_{pe}} [B_k]^T [e] [B_\phi] dA_{pe} \quad (16)$$

$$[k_{\phi q}] = h_b^2 \iint_{A_{pe}} [B_\phi]^T [e]^T [B_k] dA_{pe} \quad (17)$$

$$[k_{\phi\phi}] = -h_c \iint_{A_{pe}} [B_\phi]^T [\xi^{\varepsilon}] [B_\phi] dA_{pe} \quad (18)$$

Finalmente los vectores de fuerza y carga eléctrica externa son:

$$\{f_s\} = \iint_{A_{pe}} [N_w]^T \{\bar{f}_s\} dA \quad (19)$$

$$\{q_s\} = - \iint_{A_{pe}} [N_\phi]^T \sigma_q dA_{pe} \quad (20)$$

Cada una de esas matrices de elementos son montadas de forma para obtener el sistema de matrices globales:

$$[M_{qq}] \{\ddot{q}_i\} + [K_{qq}] \{q_i\} + [K_{q\phi}] \{\phi_i\} = \{F_s\} \quad (21)$$

$$[K_{\phi q}] \{q_i\} + [K_{\phi\phi}] \{\phi_i\} = \{Q_s\}$$

En los sensores piezoeléctricos no existe voltaje aplicado (QS=0). Entonces el potencial eléctrico generado por los sensores:

$$\{\phi_s\} = -[K_{\phi\phi}]^{-1} [K_{\phi q}] \{q_i\} \quad (22)$$

Substituyendo la ecuación (22) en la ecuación (21), se tiene el sistema global de ecuaciones para una placa con actuador piezoeléctrico:

$$[M_{qq}] \{\ddot{q}_i\} + [K_{qq}^*] \{q_i\} = \{F_s\} + \{F_{el}\} \quad (23)$$

donde:

$$[K_{qq}^*] = [K_{qq}] - [K_{q\phi}] [K_{\phi\phi}]^{-1} [K_{\phi q}] \quad (24)$$

$$\{F_{el}\} = -[K_{q\phi}] \{\phi_a\} \quad (25)$$

4. ÍNDICE DE CONTROL

El concepto de controlabilidad de un sistema tiene origen en la teoría de control. Él es usado para determinar si el sistema puede ser controlado existiendo un controlador. Basado en la forma del rank de las matrices del sistema $[A]$ y $[B]$ se puede establecer si el sistema puede ser controlado. Usando la matriz $[S]$, obtenida en la descomposición en valores singulares, se puede establecer una medida cuantitativa de la controlabilidad de un sistema. Este índice o medida indica la cantidad de energía necesaria en el actuador para controlar una entrada dada. El sistema descrito en la ecuación (23) puede ser colocado en la forma clásica del espacio de estado, como:

$$\{\dot{x}\} = [A] \{x\} + [B] \{u\} \quad (26)$$

$$\{y\} = [C] \{x\}$$

donde:

$$[B] = \begin{bmatrix} [0] \\ [M_{qq}]^{-1} \{F_{el}\} \end{bmatrix}, \quad \{y\} = \{\phi_s\} \quad y \quad [C] = \left(\left([0]_i - [K_{\phi\phi}]_S^{-1} [K_{\phi q}]_S \right) \quad [0] \right) \quad (27)$$

Normalmente una estructura, en vibraciones, trabaja en un rango de frecuencia. Entonces se debe hacer un análisis usando la representación modal de la formulación de espacio de estado. Por tanto las dimensiones de las matrices del espacio de estado van a depender del número de modos a ser analizados y del número de actuadores colocados en la estructura. De la ecuación (26), la fuerza de control aplicada puede ser escrita como:

$$\{f_c\} = [B] \{u\} \quad (28)$$

donde $\{u\}$ es un vector potencial eléctrico. Tenemos que:

$$\{f_c\}^T \{f_c\} = \{u\}^T [B]^T [B] \{u\} \quad (29)$$

$$[B] = [M][S][N] \quad (30)$$

$$[M], [N] \in R^n$$

$$[M]^T [M] = [N]^T [N] = [I]$$

Del análisis de valores singulares, donde el mayor valor de σ_1^2 indica la posición óptima del actuador, viene:

$$[S] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_k \end{bmatrix} \quad (31)$$

5. ANÁLISIS NUMÉRICO

Es realizada una simulación numérica de una placa con dimensiones $1,5 \times 1,0 \times 0,075$ m y $E = 210$ GPa, $\rho = 7800$ kg/m³, siendo primeramente excitada los modos 7° y 8°, y posteriormente entre los mismos 7° y 8° modos, usándose un actuador. Las figuras presentan el comportamiento de este índice para los dos casos citados. El valor máximo, en esos gráficos, indica la mejor posición para el actuador.

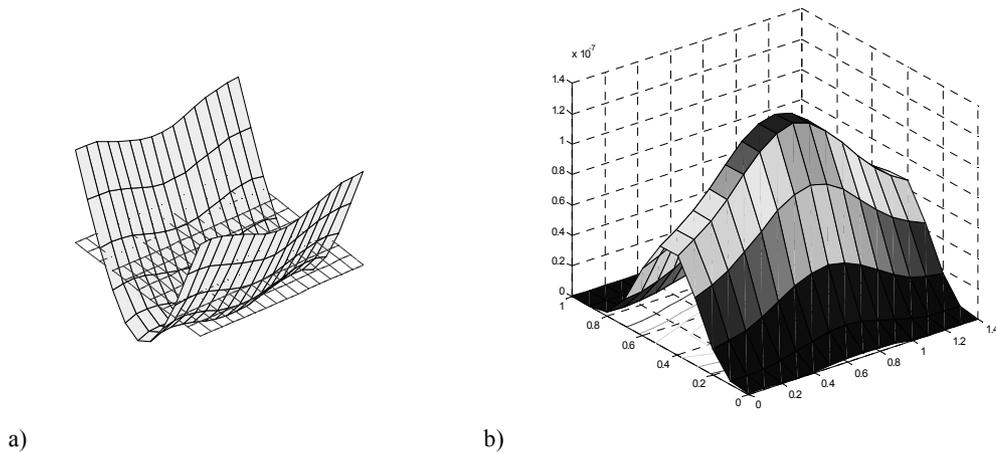


Fig. 2. (a) Placa totalmente libre excitada en el 7° modo; (b) valores singulares para esta condición.

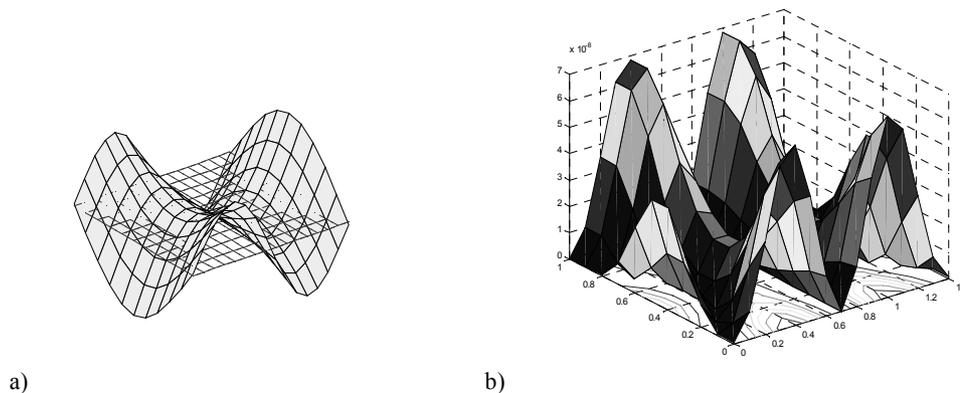


Fig. 3. (a) Placa totalmente libre excitada en el 8° modo; (b) valores singulares para esta condición.

6. CONCLUSIONES

En este artículo se estudia el desempeño de un índice para cuantificar la controlabilidad de un sistema, en este caso una placa totalmente libre, y con esto determinar el posicionamiento óptimo de actuadores de forma a minimizar el esfuerzo del controlador. El cuadrado del valor singular indica la posición del actuador, de forma a maximizar la energía de control para una entrada dada. Por lo tanto el uso de este índice, sobre la matriz de control, sirve como medida para esa cuantificación presentando resultados satisfactorios. Este estudio muestra que el índice presenta buena sensibilidad de forma que indica la posición

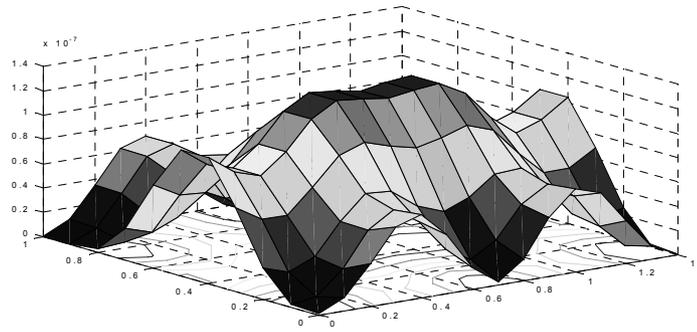


Fig. 4. Valores singulares para una placa totalmente libre excitada entre los modos 7^o y 8^o.

óptima del actuador, de forma fácil. En el estudio [16] presento el índice para vigas, entonces este artículo extiende este análisis para el caso de placas.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Capes, coordinación de perfeccionamiento de personal de enseñanza superior, a la Fapemig, fundación al amparo a la investigación de Minas Gerais y a la Unifei, Universidad Federal de Itajubá, por el soporte financiero y técnico.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Clark, R. L., Fleming, M. R., Fuller, C. R., (1993), Piezoelectric Actuators for Distributed Vibration Excitation of Thin Plates: a Comparison Between Theory and Experiment, *Journal of Vibration and Acoustic*, v115, n3, pp 332 – 339.
- [2] Abreu Gustavo Luiz C. M., Ribeiro J. F., (2003), Spatial H_{∞} , Control of Flexible Beam Containing Piezoelectric Sensors and Actuators, *Anais do XVII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, COBEM 2003*, São Paulo, Brasil, 11p.
- [3] Banks, H. T., Smith, R. C., Wang, Y., (1995), The Modeling of Piezoceramic Path Interactions with Shells, Plates and Beam, *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. LIII, n.2, pp. 353-381.
- [4] Cady, W. G., (1946), *Piezoelectricity – An Introduction to the Theory and Applications of Electromechanical Phenomena in Crystal*, McGraw-Hill, 806p.
- [5] Tzou, H. S., Tseng, C. I., (1991), Distributed Vibration Control and Identification of Coupled Elastic/Piezoelectric Systems: Finite Element Formulation and Applications, *Mechanical System and Signal Processing*, v.5, n 3, pp 215 – 231.
- [6] Tzou, H. S., Fu, H. Q., (1994), A Study of Segmentation of Distributed Piezoelectric Sensors and Actuators, Part I: Theoretical Analysis, *Journal of Sound and Vibrations*, vol. 171, n. 2, pp. 247-259.
- [7] Crawley, E. F., de Luis, J. (1987), Use of Piezoelectric Actuators as Element of Intelligent Structures, *AIAA journal*, v25, n 10, pp 1373 – 1385.
- [8] Lima Jr. J. J., (1999), Modelagem de sensores e atuadores piezoelétricos com aplicações em controle ativo de estruturas, Tese de doutorado – Unicamp, Campinas - Brasil, 1999,207p.
- [9] Lima Jr. J. J. de, Arruda, J.R. de F., (1999), Viga Ativa Usando Atuadores e Sensores Piezoelétricos Incorporados, *Anais do XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, COBEM 99*, Águas de Lindóia, Brasil, 9p.
- [10] Lima Jr. J. J. de, Arruda, J. R. F., (1997), Finite Element Modeling of Piezoceramic Sensors and Actuators”, *Anais do XVIII CILAMCE, Congresso Ibero – Americano de Métodos Computacionais para Engenharia*, Brasília, Vol. 1, pp. 751-757.

- [11] Lee Y. S., Elliott S. J., (2000), Active Position Control of Flexible Smart Beam Using Internal Model control, *Journal of Sound and Vibrations*, vol. 242, n. 5, pp. 767-791.
- [12] Li D. S., Cheng L., Gosselin C. M., (2003), Optimal design of PZT actuators in active structural acoustic control of a cylindrical Shell with a floor partition, *Journal of Sound and Vibrations*, vol. 269, n. 2004, pp. 569-588.
- [13] Pai P.F., Wen B., Naser A. S., Schulz M. J., (1998), Structural Vibration Control Using Pzt Patches and Non-Linear Phenomena, *Journal of Sound and Vibrations*, vol. 252, n. 2, pp. 273-296.
- [14] Costa e Silva, V. M., Arruda, J.R. (1997), Otimização do Posicionamento Piezocerâmicos em Estruturas Flexíveis Usando Algoritmo Genético, *Anais do XIV, COBEM 97, Bauru, SP, COB. 489, 8p.*
- [15] Friswell M. I., (2000), On The Design of Modal Actuators and Sensor, *Journal of Sound and Vibrations*, vol. 241, n. 3, pp. 361-372.
- [16] Wang, Q., (2001), A Controllability Index For Optimal Desing Piezoelectric Actuators in Vibration Control of Beam Structures, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 242(3), pp. 507-518.
- [17] Giovanneti, L. F. de A., (2001), Posicionamento de Sensores e Atuadores em Estruturas Ativas do Tipo Viga, *Relatório de Iniciação Científica, PIBIC FAPEMIG, Projeto TEC 341/98, 106p.*
- [18] Maxwell N. D., Asokanthan S. F., (2002), Modal chacteristics of a flexible beam with multiple distributed actuators, *Journal of Sound and Vibrations*, vol. 269, n. 2004, pp. 19-31.
- [19] Oliveira, A. S. de, Lima Jr J. J., (2003), Estudo de posicionamento de sensores e atuadores piezelétricos em uma placa bi-apoiada através da análise de valor singular, *Congresso Ibero Americano de Engenharia Mecânica – Cibem, Universidade de Coimbra, Portugal.*
- [20] Novozhilov, V. V.,(1970), *Thin Shell Theory* trad. By P. G. Lowe, second edition, Groninger Wolters-Noordhoff, 422p.
- [21] Bathe, K. J., (1996), *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1051p.

PIEZOELECTRIC SENSORS AND ACTUATORS PLACEMENT OPTIMIZATION IN A FREE TOTALLY PLATE THROUGH SINGULAR ANALYSIS VALUE

Abstract – The piezoelectric actuator and sensor have received lot of attention from researchers. The reason for this, it is because these devices present the piezoelectricity effect. This effect is the conversion between mechanical energy in electric energy and vice versa. So this effect is very useful in active vibration control, AVC, and its results are more effective than passive vibration control. The intelligent structures are the units compound by: actuator, sensor, controller and structures. Intelligent structure good design, the actuators and sensors placement are a fundamental part, because misplacement can cause lack of controllability and observability system. So this paper intends to propose actuators placement technique, through index obtained from singular value decomposition of input matrix [B]. The obtained values of this index are compared with the simulation done in finite elements for a totally free plate, where we check the performance of this index.