



CÁLCULO DE LOS FACTORES DE INTENSIFICACIÓN DE TENSIONES MEDIANTE TÉCNICAS ÓPTICAS DE CAMPO COMPLETO

JOSÉ MANUEL VASCO OLMO, FRANCISCO ALBERTO DÍAZ GARRIDO, RUBÉN DORADO VICENTE, RAFAEL LÓPEZ GARCÍA

Universidad de Jaén

Departamento de Ingeniería Mecánica y Minera, Escuela Politécnica Superior de Jaén
Campus las Lagunillas s/n, Edificio A3, Dependencia 919, 23071 Jaén, España

(Recibido 10 de diciembre de 2011, para publicación 10 de febrero de 2012)

Resumen – La fotoelasticidad digital y la correlación digital de imágenes (DIC) son técnicas ópticas experimentales de campo completo que se emplean para el análisis de tensiones y deformaciones en elementos mecánicos. En el presente trabajo, estas dos técnicas son comparadas a través de la determinación, en probeta planas, de los factores de intensificación de tensiones (SIFs) y el T -stress (σ_{0x}). Se ha ensayado a tracción una probeta de policarbonato con grieta centrada (MT: *Middle-Tension*), tomando imágenes para distintos valores de carga. Mediante la técnica de fotoelasticidad se calculan los SIFs a partir del campo de franjas isocromático en las inmediaciones del vértice de la grieta. El mapa isocromático se obtiene indirectamente mediante un procesamiento de las imágenes recogidas, que conlleva un desenvolvimiento de fase de las mismas. Por otro lado, la aplicación de la técnica de DIC a las imágenes del ensayo proporciona de forma directa el campo de desplazamientos, a partir del cual también pueden determinarse los SIFs (K_I , K_{II}) y σ_{0x} . En el caso de fotoelasticidad, la relación entre el orden de franja y los factores de intensificación de tensiones no es lineal, por ello se ha empleado un ajuste por mínimos cuadrados para su determinación. Para DIC, basta resolver un sistema de ecuaciones lineales ya que la relación entre los desplazamientos y los SIFs es lineal. Los resultados obtenidos a través de ambas técnicas se comparan con los calculados de forma teórica, mostrándose un gran nivel de concordancia que pone de manifiesto el potencial de la metodología empleada.

Palabras clave – Factor de intensificación de tensiones, fotoelasticidad digital, correlación digital de imágenes, mecánica de la fractura.

1. INTRODUCCIÓN

El objetivo de la mecánica de la fractura [1] es proporcionar respuestas de forma cuantitativa a problemas específicos referentes a grietas contenidas en elementos mecánicos o estructurales. Dentro del campo de la mecánica de la fractura existen distintos enfoques, siendo objeto de estudio del presente trabajo la mecánica de la fractura lineal elástica (LEFM).

En la LEFM [2] se ha asumido tradicionalmente que el campo de tensiones alrededor del vértice de una grieta puede ser caracterizado a través de los factores de intensificación de tensiones (SIFs), K_I y K_{II} para los modos de carga I y II respectivamente. Estos parámetros fueron introducidos por Irwin [3] y dependen de la geometría del modelo y del modo y magnitud de la carga aplicada. De esta forma, siguiendo el modelo de Westergaard [2], las siguientes expresiones definen el campo de tensiones alrededor del vértice de una grieta, para el caso de placa infinita, en términos de los factores de intensificación de tensiones y las coordenadas polares de los puntos (r y θ), asumiendo como origen el vértice de la grieta

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{Bmatrix} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Irwin, sin embargo, observó que cuando una grieta crecía en una placa de ancho finito, ésta podía alcanzar una longitud suficiente tal que las ecuaciones anteriores (1), no eran precisas. Así, mostró que era necesaria una corrección para placa finita, introduciendo un término de tensión constante para la tensión normal σ_x , este término es el *T-stress* (σ_{0x}), quedando el campo de tensiones como sigue:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{Bmatrix} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{Bmatrix} + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\sigma_{0x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Investigaciones posteriores [4] a las llevadas a cabo por Irwin han puesto de manifiesto el importante papel que desempeña el *T-stress* en muchos fenómenos observados en mecánica de la fractura, tales como el tamaño y la forma de la zona plástica que se da en el vértice de una grieta, el crecimiento de grieta por fatiga, el cierre prematuro de grieta, y otros más.

La fotoelasticidad es una técnica óptica experimental de campo completo que se emplea para el análisis de tensiones en elementos mecánicos. Existen distintos modos de implementarla, en transmisión y en reflexión, siendo el primer tipo objeto de estudio en este trabajo. El principio físico de la fotoelasticidad es la birrefringencia [5], propiedad que presentan ciertos materiales transparentes no cristalinos, que son ópticamente isotrópicos bajo condiciones normales, pero que pasan a ser doblemente refractivos o birrefringentes cuando son sometidos a sollicitaciones de carga. De esta forma, si un material birrefringente es cargado e iluminado a su misma vez, la onda de luz incidente es dividida en dos componentes, introduciendo un retardo relativo entre ambas. Así, la ecuación fundamental de la fotoelasticidad [6] establece una relación entre la diferencia de tensiones principales y el retardo relativo δ en términos del orden de franja N .

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{Nf_\sigma}{t} \quad (3)$$

donde: $N = \frac{\delta}{2\pi}$ es el orden de franja, f_σ es el valor de franja del material y t es el espesor del modelo.

Los primeros autores que aplicaron la técnica de fotoelasticidad en el campo de la mecánica de la fractura fueron Post y Wells [7]-[8]. Sin embargo, Irwin [9] fue el primero en proponer una metodología para la determinación de los factores de intensificación de tensiones a partir de datos tomados de franjas isocromáticas. Posteriormente, muchos otros autores han desarrollado métodos y procedimientos alternativos para determinar los factores de intensificación de tensiones a partir de imágenes fotoelásticas [10]-[11]. Uno de los avances más importantes en el cálculo de estos factores a partir del análisis de imágenes fotoelásticas fue llevado a cabo por Sanford y Dally [10] a través de su método *Multi-Point Over Deterministic* (MPOD), siendo los primeros en proponer un método general para la determinación de los SIFs en problemas en modo mixto y el *T-stress*, ya que los métodos propuestos en trabajos anteriores sólo estudiaban problemas en modo I o II. Este método se ha convertido en un procedimiento estándar para la determinación de parámetros de fractura, extendiéndose a otras técnicas experimentales como termoelasticidad [12]. Otro avance importante en la determinación de los factores de intensificación de tensiones empleando la técnica de fotoelasticidad fue realizado por Nurse y Patterson [13], que desarrollaron un método basado en los potenciales complejos de Muskhelishvili [14]. Esta técnica presenta un excelente grado

de exactitud para problemas de fractura en modo I, modo II y modo mixto, sin embargo, no presenta la determinación del T -stress. Recientemente, Christopher *et al.* [15] han propuesto un nuevo modelo matemático, basado en los potenciales complejos de Muskhelishvili [14], para describir el campo de tensiones alrededor del vértice de una grieta y que considera los efectos de contacto que se dan entre las caras de la grieta. De esta forma, postularon que el enclave plástico existente en las inmediaciones del vértice y de los flancos de la grieta ejerce un conjunto de fuerzas que repercuten en la distribución de tensiones observada en los alrededores de la misma, introduciendo nuevos factores de intensificación de tensiones que tienen en cuenta los efectos de contacto que se establecen entre las caras de la grieta. Actualmente se está trabajando en torno a este nuevo modelo matemático que describe el campo de tensiones en las proximidades del vértice de la grieta [16].

En el presente trabajo se compara la fotoelasticidad con un método basado en la correlación digital de imágenes (DIC): técnica óptica experimental de campo completo empleada en la medición de deformaciones y desplazamientos en elementos mecánicos. DIC trabaja analizando una secuencia de imágenes digitales de un modelo o una probeta desde un estado inicial (indeformada) hasta un estado final (deformada) [17]. Los campos de desplazamientos y deformaciones pueden determinarse de forma directa en 2D y 3D, en función de si estos campos se encuentran en el plano o fuera del mismo respectivamente.

Actualmente, en mecánica experimental, la popularidad de la técnica de correlación digital de imágenes se ha visto notablemente incrementada debido a que realiza mediciones sin contacto y presenta una implementación relativamente sencilla [18]. Sutton *et al.* [19] y Quinta da Fonseca [20] trabajaron a partir de los campos de deformaciones, sin embargo, estos campos son calculados por diferenciación numérica de los campos de desplazamientos, lo que lleva aparejado la inevitable introducción de ruido y la consiguiente aparición de errores en los resultados. Recientemente, se han desarrollado metodologías que combinan la técnica de correlación digital de imágenes con el método MPOD [21]-[23] para determinar los factores de intensificación de tensiones a partir del campo de desplazamientos. Yoneyama *et al.* [21] propusieron un método en el que los factores de intensificación de tensiones eran tratados a través de series de expansión trigonométricas, mientras que López-Crespo *et al.* [22]-[23] llevaron a cabo la determinación de estos factores a través de un procedimiento basado en los potenciales complejos de Muskhelishvili [14]. Por último, Yates *et al.* [24] han presentado una metodología que resume posibles aplicaciones sobre la caracterización del vértice de la grieta mediante DIC. Estas aplicaciones incluyen: la determinación de los factores de intensificación de tensiones y el T -stress para grietas sometidas a fatiga, los efectos del cierre de grieta a través del estudio de los SIFs, la caracterización del ángulo de apertura de grieta (CTOA) a partir de los campos de desplazamientos y el comportamiento a fractura de materiales anisotrópicos usando DIC-3D. Para la determinación de los factores de intensificación de tensiones y el T -stress emplearon términos de expansión de los desplazamientos según el modelo de Williams [25].

En el presente artículo se lleva a cabo la comparación de las dos técnicas mencionadas en los párrafos anteriores a través de la determinación de los factores de intensificación de tensiones y el T -stress. Para ello, se han capturado y analizado una serie de imágenes durante ensayos de tracción llevados a cabo para distintos valores de carga (1.5, 2, 3 y 4 kN) en una probeta de policarbonato con grieta centrada (MT: Middle-Tension). Para la realización del análisis se ha seleccionado un número determinado de puntos sobre la imagen en estudio en las proximidades del vértice de la grieta.

Para el cálculo a través de fotoelasticidad se ha empleado el método MPOD [10] de Sanford y Dally, puesto que permite la determinación del T -stress además de los SIFs. Para el empleo de este método es necesario conocer el orden de franja de los puntos seleccionados en el análisis. Para ello, se emplea el método de variación de fase (*phase-stepping*) de Patterson y Wang [26], en el que se utiliza un polariscopio circular iluminado con luz monocromática, capturando seis imágenes correspondientes a distintas posiciones del analizador y de la segunda lámina cuarto de onda. La combinación de estas seis imágenes da lugar a una única imagen que ha de ser desenvuelta (*unwrapping*) por medio de algoritmos específicos de procesado de imágenes [27].

Mediante DIC se obtiene el campo de desplazamientos de forma directa a través de un proceso de seguimiento de imágenes, por lo que no es necesario ningún proceso de desenvolvimiento de la imagen como en el caso de fotoelasticidad. Esto supone una ventaja ya que se evita la introducción de errores como consecuencia del procesado de la imagen. Sin embargo, posee otras desventajas que serán discutidas posteriormente.

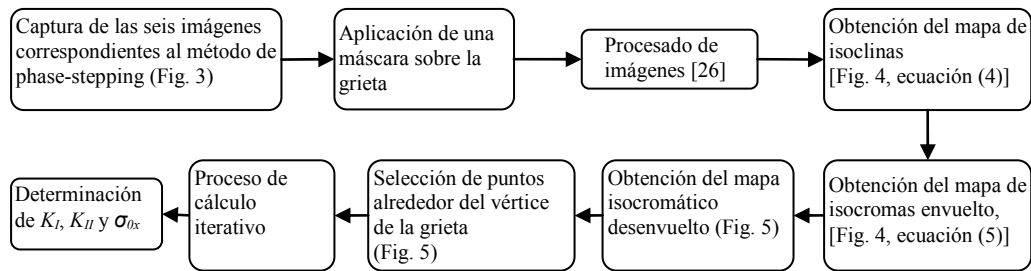


Fig. 1. Procedimiento seguido para la técnica de fotoelasticidad.

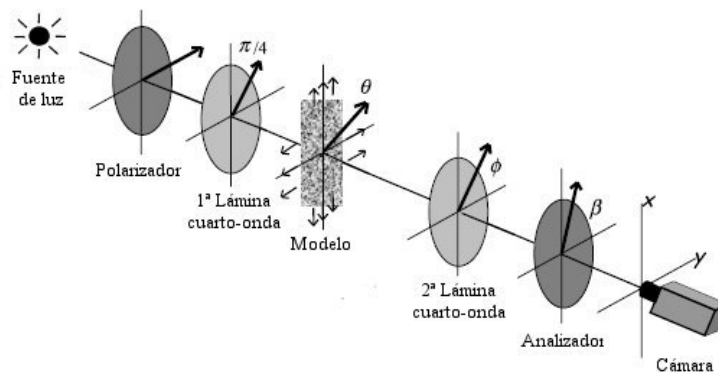


Fig. 2. Esquema de un polariscopio circular en transmisión.

En el presente trabajo, además de comparar entre sí los resultados obtenidos mediante ambas técnicas, éstos son comparados a su misma vez con los calculados de forma teórica, mostrándose un gran nivel de coincidencia que pone de manifiesto el potencial de las dos técnicas empleadas.

2. METODOLOGÍA Y PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

En el presente artículo, para llevar a cabo el análisis mediante ambas técnicas se han empleado distintos parámetros de estudio. Así, para fotoelasticidad el parámetro de estudio es el orden de franja, mientras que para correlación digital de imágenes los parámetros empleados son los campos de desplazamientos, tanto horizontales como verticales.

2.1. Metodología empleada en fotoelasticidad

El procedimiento seguido en fotoelasticidad se muestra en el siguiente diagrama (Fig. 1)

Para la técnica de fotoelasticidad, tres son los métodos más comúnmente utilizados en el análisis de franjas [28]: el método de análisis del contenido espectral, el método basado en las transformaciones de Fourier y el método de variación de fase o *phase-stepping*. Para este último existen distintas variantes, siendo el método de los seis pasos o seis imágenes de Patterson y Wang [26] uno de los más empleados y el que se ha seguido para el análisis de franjas del problema. En este método se suele emplear luz monocromática circularmente polarizada, que se obtiene a partir de la utilización de un polariscopio circular (Fig. 2 [28])

El método consiste en capturar seis imágenes (Fig. 3) en el que los ángulos de los elementos de salida del polariscopio circular (segunda lámina cuarto de onda y analizador) se rotan para generar saltos de fase

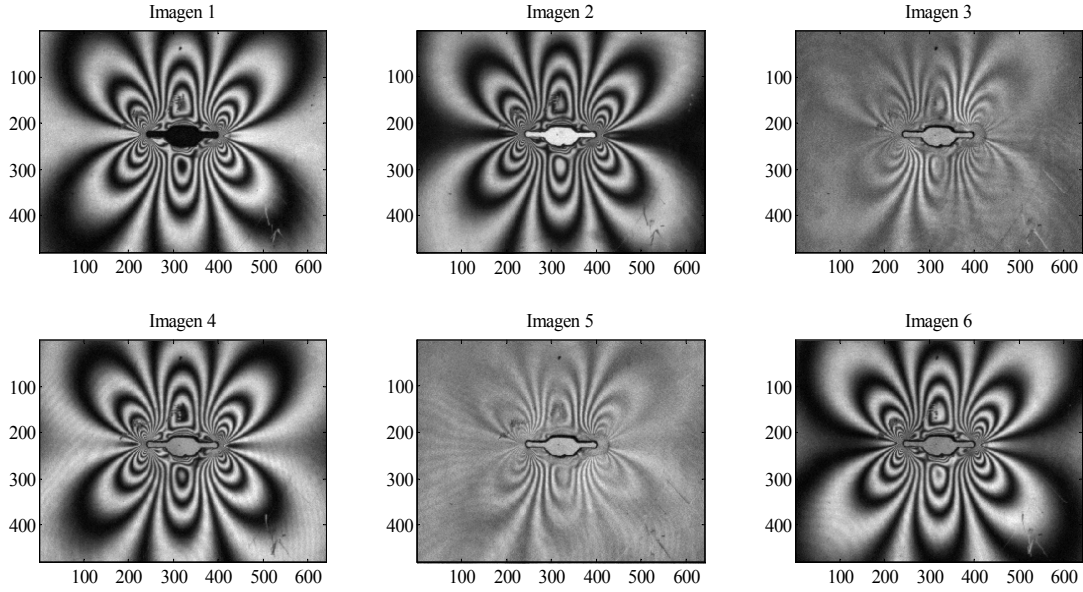


Fig. 3. Imágenes capturadas siguiendo la secuencia de la Tabla 1, para una carga de 3 kN.

Tabla 1. Posiciones de la segunda lámina $\lambda/4$ y del analizador, e intensidad de la luz para cada imagen

Imagen	Ángulo de la segunda lámina $\lambda/4$ φ (rad)	Ángulo del analizador β (rad)	Intensidad de la luz
1	0	$\pi/4$	$i_1 = i_m - i_v \cos \delta$
2	0	$-\pi/4$	$i_2 = i_m + i_v \cos \delta$
3	0	0	$i_3 = i_m - i_v \sin \delta \sin 2\theta$
4	$\pi/4$	$\pi/4$	$i_4 = i_m + i_v \sin \delta \cos 2\theta$
5	$\pi/2$	$\pi/2$	$i_5 = i_m + i_v \sin \delta \sin 2\theta$
6	$3\pi/4$	$3\pi/4$	$i_6 = i_m - i_v \sin \delta \cos 2\theta$

entre las distintas imágenes. La tabla 1 muestra las distintas posiciones de la segunda lámina cuarto de onda ($\lambda/4$) y del analizador, así como la intensidad de la luz para cada una de las imágenes.

En la tabla 1, i_m es un término de intensidad que tiene en cuenta la luz externa entrante en el polariscopio, i_v es la intensidad observada cuando el eje rápido de todos los elementos están alineados, δ es el retardo relativo (rad) y θ es el ángulo de las isoclinas (rad)

La intensidad de cada una de las seis imágenes capturadas está modulada, por tanto, estas imágenes han de ser procesadas para obtener una imagen continua del retardo en cada uno de los puntos de la probeta analizada.

El modelo se basa en la mecánica de la fractura lineal elástica, por consiguiente, se ha de aplicar una máscara, tanto en las inmediaciones del vértice de la grieta como en los flancos de la misma. El motivo es eliminar del análisis la zona plástica existente y a su misma vez eliminar zonas en las que el sistema óptico no dispone de resolución suficiente.

El primer paso del procesado de las imágenes es determinar el mapa de isoclinas, ecuación (4), que representan el ángulo que forman las direcciones de las tensiones principales con respecto a una dirección fija de referencia. En la Fig. 4 se muestra el mapa de isoclinas obtenido para la carga de 3 kN, de igual modo se procedió para el resto de niveles de carga.

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{i_5 - i_3}{i_4 - i_6} \quad (4)$$

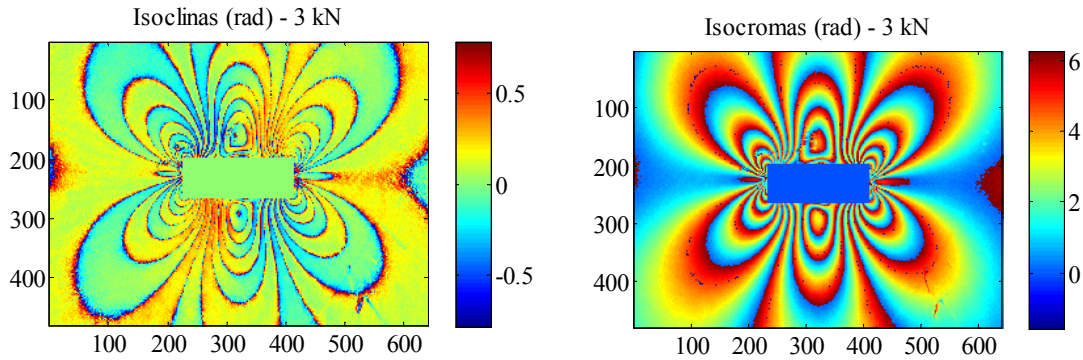


Fig. 4. Campo de isoclinas (rad) y mapa de franjas isocromático envuelto (rad) para 3 kN de carga.

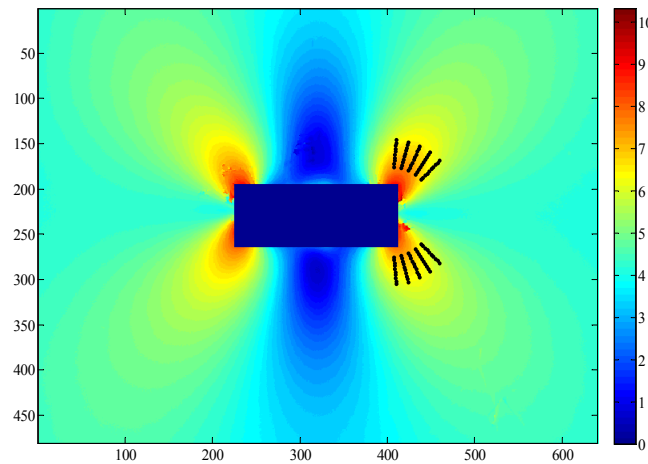


Fig. 5. Orden de franja y selección de puntos alrededor del vértice de la grieta para 3 kN de carga mediante fotoelasticidad.

El siguiente paso consiste en obtener, a partir del mapa de isoclinas, el mapa de isocromas, (5), que representan el retardo relativo en cada uno de los puntos del modelo. En la Fig. 4 se muestra el mapa de franjas isocromático envuelto para la carga de 3 kN, procediendo de forma similar para el resto de niveles de carga.

$$\delta = \tan^{-1} \frac{(i_5 - i_3) \sin 2\theta + (i_4 - i_6) \cos 2\theta}{i_1 - i_2} \quad (5)$$

Sin embargo, como el mapa isocromático presenta una serie de saltos abruptos ($-\pi/2$ y $\pi/2$) debido a la aplicación de la función inversa de la tangente, para la obtención de un mapa de retardo continuo es necesario el desenvolvimiento de la fase, conocido como *unwrapping*. En este trabajo se ha empleado un algoritmo desarrollado por Siegmann *et al.* [27], que actúa procesando áreas para llevar a cabo la demodulación del mapa de isoclinas y utiliza distintos mapas de calidad para guiar el proceso de *unwrapping*. En la Fig. 5 se muestra el orden de franja o mapa isocromático desenvuelto para el nivel de carga de 3 kN, procediéndose de forma similar para el resto de niveles de carga.

Una vez obtenido el mapa de franjas isocromático desenvuelto, se procede a la selección de un conjunto de puntos alrededor del vértice de la grieta, que se emplearán para el análisis. Para ello, la posición del vértice de grieta ha de ser identificada, seleccionándola directamente sobre la imagen 1 correspondiente al método de *phase-stepping*.

El tamaño de la región en la que se encuentran los puntos de interés fue definido por Nurse y Patterson [13] como una malla anular de radio interior igual a 10 veces el radio del vértice de la grieta y de radio exterior aproximadamente igual a 0.4 veces la longitud de la grieta. En este trabajo, la selección de puntos

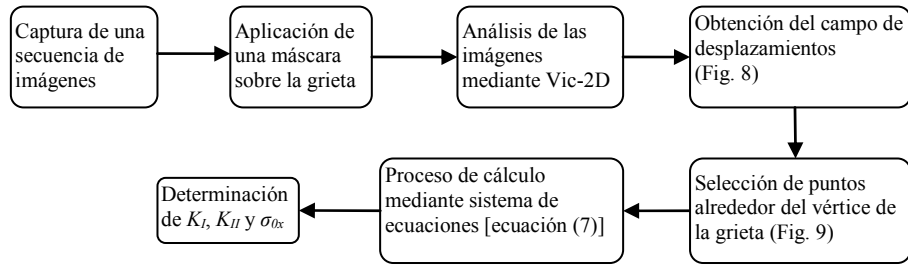
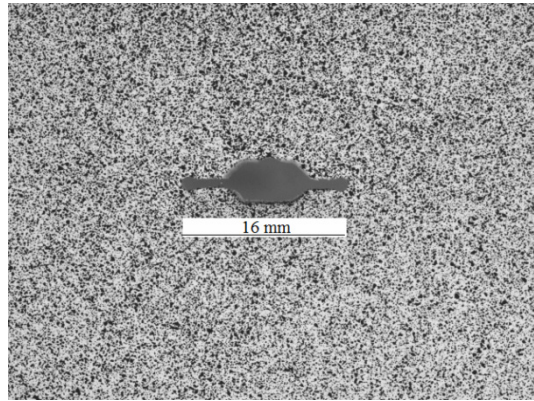


Fig. 6. Procedimiento seguido en la técnica de correlación digital de imágenes.

Fig. 7. Modelo con la aplicación de *speckle* aleatorio.

se ha centrado en los lóbulos característicos alrededor del vértice de la grieta (Fig. 5). En esta figura se muestra la captura de puntos que se ha llevado a cabo para el nivel de carga de 3 kN, procediéndose de igual modo para los demás niveles de carga.

Los puntos seleccionados son los que se emplearán para la determinación de los factores de intensificación de tensiones a través del método MPOD [10]. Para ello, se desarrolla una ecuación no lineal, (6), que relaciona el campo de tensiones en términos de K_I , K_{II} y σ_{0x} (de acuerdo con el modelo de Westergaard [2]) con las coordenadas polares (r , α) de los puntos seleccionados, asumiendo como origen el vértice de la grieta, y con el orden de franja de cada uno de los puntos seleccionados. Sustituyendo en (3) la diferencia de tensiones principales, obtenidas a partir de las tensiones (normales y tangencial) definidas en (2), se obtiene (6).

$$\left(\frac{Nf_{\sigma}}{t}\right)^2 = \frac{1}{2\pi} \left[(K_I \sin \alpha + 2K_{II} \cos \alpha)^2 + (K_{II} \sin \alpha)^2 \right] + \frac{2\sigma_{0x}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\alpha}{2} \left[K_I \sin \alpha (1 + 2 \cos \alpha) + (1 + 2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha) \right] + \sigma_{0x}^2 \quad (6)$$

Para la obtención de la solución se ha de llevar a cabo un procedimiento numérico iterativo, empleando un ajuste por mínimos cuadrados no lineal.

2.2. Metodología empleada en correlación digital de imágenes

A diferencia de lo descrito para la técnica de fotoelasticidad, a través de DIC se obtienen de forma directa los campos de desplazamientos, tanto horizontales como verticales, por lo que no es necesario llevar a cabo el procesado de la imagen empleado en la técnica anterior. Además, la relación entre los desplazamientos y los factores de intensificación de tensiones es lineal, por lo que la obtención de estos factores se lleva a cabo mediante la resolución de un sistema de ecuaciones lineales. Por consiguiente, el proceso seguido (Fig. 6) es similar al empleado para fotoelasticidad con la salvedad del procesado y de la resolución para la determinación de los factores de intensificación de tensiones.

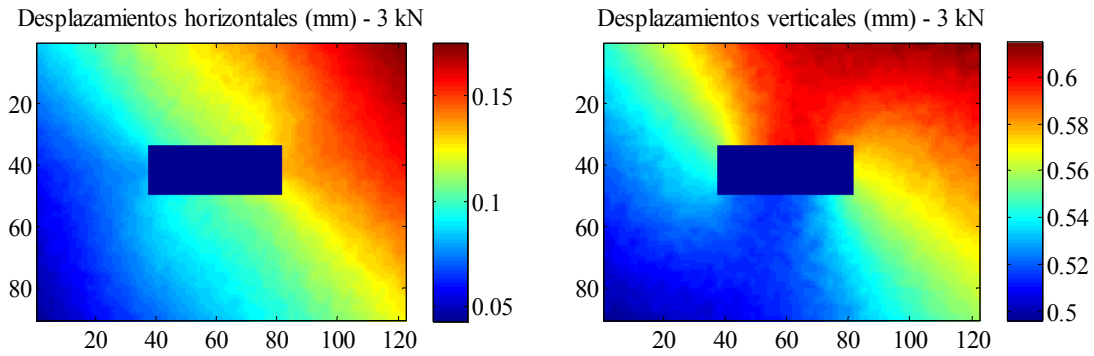


Fig. 8. Campos de desplazamientos horizontales (mm) y verticales para 3 kN de carga.

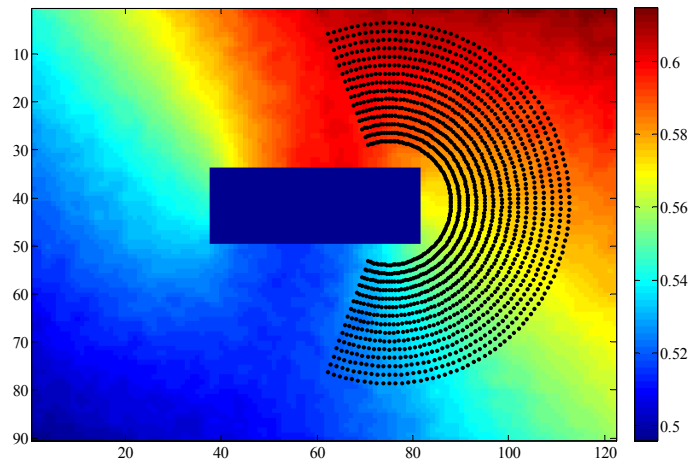


Fig. 9. Selección de puntos alrededor del vértice de la grieta para 3 kN de carga mediante DIC.

En esta técnica se lleva a cabo la captura de una secuencia de imágenes desde un estado inicial (indeformada) hasta un estado final (deformada), empleando para ello el mismo modelo que en el caso anterior con la aplicación aleatoria de puntos negros sobre fondo blanco (*speckle*) en la superficie del modelo (Fig. 7). Al igual que en el caso de fotoelasticidad, se ha de aplicar una máscara sobre la grieta para eliminar la zona plástica existente alrededor de la misma. Seguidamente se lleva a cabo la obtención de forma directa del campo de desplazamientos, tanto horizontales como verticales (Fig. 8), a través del análisis de la secuencia de imágenes capturadas empleando el software Vic-2D 2009 (*Correlated Solutions*). En la Fig. 8 se han representado los campos de desplazamientos para el nivel de carga de 3 kN, de forma similar se procedió para el resto de niveles de carga.

La selección de puntos (Fig. 9) alrededor del vértice de la grieta se ha realizado mediante una malla anular identificando la posición del vértice directamente sobre la primera imagen de la secuencia tomada. La región con forma de anillo, en la que se encuentran los puntos seleccionados, fue definida por Nurse y Patterson [13]. Como se observa en la Fig. 9, la selección de puntos no se ha centrado en lóbulos como en el caso de fotoelasticidad ya que la configuración del campo de desplazamientos es distinta a la del orden de franja, por tanto, se ha procedido a realizar un determinado barrido de ángulos alrededor del vértice de la grieta.

Mediante la técnica de DIC, dos son las ecuaciones, ecuación (7), una para cada campo de desplazamientos, que se emplean para la determinación de los factores de intensificación de tensiones. Estas expresiones, de acuerdo con el modelo de Westergaard [2], relacionan el campo de desplazamientos con los términos K_I , K_{II} y σ_{0x} y con las coordenadas polares (r , α) de los puntos seleccionados, asumiendo como origen el vértice de la grieta. En estas ecuaciones se han incluido una serie de coeficientes para compen-

sar la traslación y rotación del sólido rígido. Esta corrección se ha de llevar a cabo debido a los movimientos (de traslación y rotación) que experimenta el modelo durante la realización de los ensayos, y que el software detecta como desplazamientos propios de los puntos que conforman el *speckle*.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} &= \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \cos \frac{\alpha}{2} \left(k - 1 + 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \\ \sin \frac{\alpha}{2} \left(k + 1 - 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right) \end{Bmatrix} + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \sin \frac{\alpha}{2} \left(k + 1 + 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \right) \\ - \cos \frac{\alpha}{2} \left(k - 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) \end{Bmatrix} + \\ &+ \frac{\sigma_{0x}}{8\mu} r \begin{Bmatrix} (k+1) \cos \alpha \\ (k-3) \sin \alpha \end{Bmatrix} + a_0 + b_0 + \begin{Bmatrix} -Rr \cos \alpha \\ Rr \sin \alpha \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (7)$$

donde: $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ es el módulo de elasticidad tangencial del material del modelo (MPa), ν es el coeficiente de Poisson del material del modelo, $k = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ para tensión plana y $k = 3-4\nu$ para deformación

plana, a_0 es un coeficiente que tiene en cuenta la traslación horizontal del sólido rígido, b_0 es un coeficiente que tiene en cuenta la traslación vertical del sólido rígido y R es un coeficiente que tiene en cuenta la rotación del sólido rígido

El cálculo de los factores de intensificación de tensiones, el *T-stress* y los coeficientes de compensación del sólido rígido se ha llevado a cabo a través de la resolución de un sistema de ecuaciones lineales combinando los dos campos de desplazamientos.

3. DESCRIPCIÓN DE LOS ENSAYOS

Para la comparación de ambas técnicas se realizó una serie de ensayos a tracción para distintos niveles de carga empleando una probeta de policarbonato con grieta centrada (MT: *Middle-Tension*) y un espesor de 6 mm (Fig. 10).

Para la realización de los ensayos se empleó un banco hidráulico biaxial (Fig. 11) de elaboración propia con una carga máxima a tracción de 15 kN. Los niveles de carga a los que se sometió el modelo fueron 1.5, 2, 3 y 4 kN. De esta forma, en fotoelasticidad, para cada uno de estos niveles de carga, se tomaron las seis imágenes correspondientes al método de *phase-stepping* de Patterson y Wang [26]; mientras que en

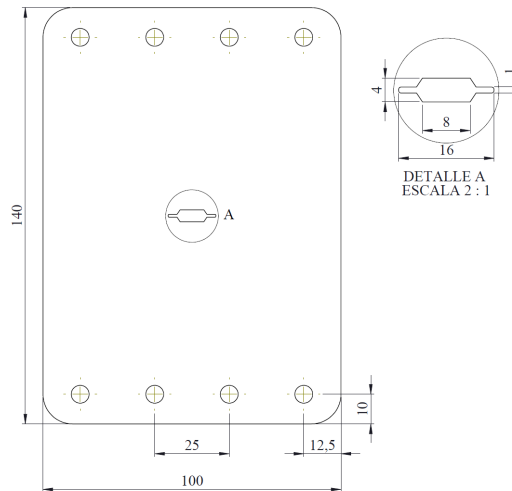


Fig. 10. Geometría y dimensiones del modelo empleado.

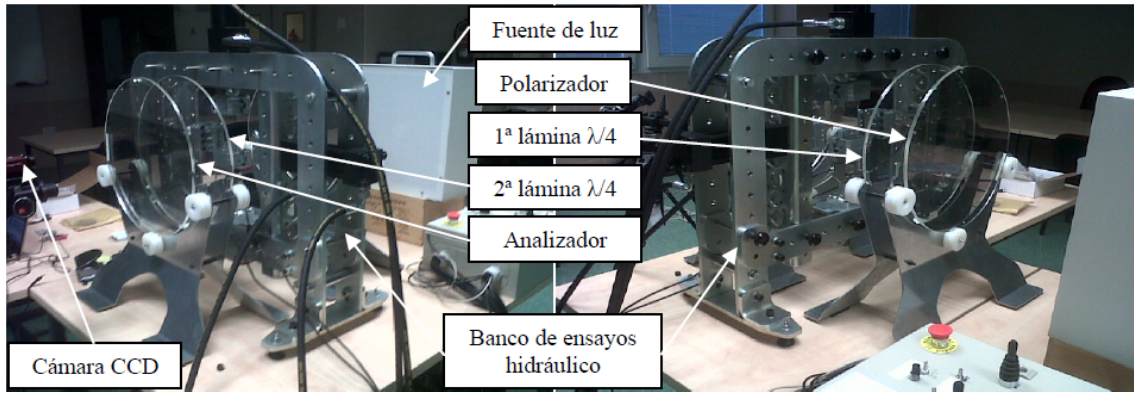


Fig. 11. Banco de ensayos hidráulico empleado en ambas técnicas y equipo empleado en fotoelasticidad (polariscopio circular y fuente de luz monocromática).

DIC, se capturó una secuencia de imágenes desde un estado inicial, correspondiente a una carga de 0 kN hasta un estado final, correspondiente a los distintos niveles de carga establecidos.

Las imágenes se tomaron empleando una cámara CCD AVT Marlin F-146 IRF controlada por un ordenador portátil Dell-Vostro 3500 Intel Core i3, a través de una tarjeta de video (FWB-EC3402). Además, se empleó una lente Edmund Optics 25 mm/F1.4 – F17 para aumentar la resolución espacial en la región cercana al vértice de la grieta.

Para la técnica de fotoelasticidad se empleó un polariscopio circular en transmisión iluminado con una fuente de luz monocromática (Fig. 11).

El proceso de cálculo iterativo llevado a cabo en fotoelasticidad para la determinación de los factores de intensificación de tensiones se implementó en una rutina en MATLAB R2008a[®]. Los resultados experimentales obtenidos mediante ambas técnicas fueron comparados entre sí, y a su misma vez se compararon con los calculados de forma teórica empleando la siguiente expresión [1]

$$K_I = \left[1 + 0.256 \left(\frac{a}{W} \right) - 1.152 \left(\frac{a}{W} \right)^2 + 12.2 \left(\frac{a}{W} \right)^3 \right] \sigma \sqrt{\pi a}, \quad (8)$$

donde: σ es la tensión aplicada sobre la probeta (MPa), a es la mitad de la longitud de la grieta (m) y W es el ancho de la probeta (m).

Como se indicó en secciones anteriores, para un correcto ajuste de las soluciones, además de los SIFs, también se obtuvo el T -stress, que fue comparado con correlaciones empíricas disponibles en la literatura para la misma geometría del modelo [29]. Así, a partir del gráfico (correspondiente a una lámina rectangular con grieta centrada) en el que se representa el término de T -stress, normalizado según la ecuación (9) en función de la longitud de la grieta (a/W) para distintas geometrías (H/W), puede deducirse el valor de σ_{0x} para los niveles de carga aplicados. En esta expresión a es la mitad de la longitud de la grieta y W es la mitad del ancho de la probeta.

$$f\left(\sigma_{0x}, \sigma, \frac{a}{W}\right) = \frac{\sigma_{0x}}{\sigma} \left(1 - \frac{a}{W}\right) \quad (9)$$

De esta forma, para la geometría del modelo de estudio se obtuvo un valor para el T -stress normalizado de 0.8, deduciéndose a partir de este valor una expresión, ecuación (10), para el cálculo del T -stress en función de la tensión aplicada y la relación a/W .

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{W} = 0.16 \\ \frac{H}{W} = 1.4 \end{array} \right\} \frac{\sigma_{0x}}{\sigma} \left(1 - \frac{a}{W}\right) = 0.8 \Rightarrow \sigma_{0x} = 0.8 \frac{\sigma}{\left(1 - \frac{a}{W}\right)} \quad (10)$$

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los resultados experimentales, para fotoelasticidad y DIC, se han obtenido a través de un ajuste por mínimos cuadrados y por resolución de un sistema de ecuaciones lineal respectivamente. Para evaluar la calidad de la solución se estudian dos parámetros estadísticos: la media y la varianza del error entre los valores teóricos $f_{i,t}$ y los experimentales $f_{i,exp}$ [13].

$$\mu = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \frac{f_{i,t} - f_{i,exp}}{f_{i,t}} \quad s^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{f_{i,t} - f_{i,exp}}{f_{i,t}} - \mu \right)^2, \quad (11)$$

donde n es el número de puntos seleccionados.

En la Fig. 12 se muestran los valores de los factores de intensificación de tensiones y el $T-stress$ obtenidos mediante ambas técnicas para los distintos niveles de carga. Los resultados obtenidos para K_I han sido comparados con los calculados de forma teórica a partir de la ecuación (8). Además de esto, como el modo de carga aplicado ha sido el I, los valores de K_{II} tienen que ser próximos a cero. Por otro lado, los valores obtenidos para el $T-stress$ han sido comparados con los calculados de forma teórica a partir de la ecuación.

Los resultados experimentales muestran un excelente nivel de concordancia con los valores calculados de forma teórica. Existe una pequeña dispersión en los datos que puede deberse a distintos aspectos, siendo más importante en el caso de la evaluación del $T-stress$ obtenido mediante fotoelasticidad para los niveles de carga de 3 y 4 kN. Uno de estos aspectos puede ser atribuido a la presencia de ruido en las imágenes tomadas, mientras que errores en la localización del vértice de la grieta, que se realizó marcando directamente sobre la imagen, puede ser otra razón en la existencia de esta pequeña dispersión en los datos. No obstante, los resultados obtenidos pueden ser considerados como altamente satisfactorios.

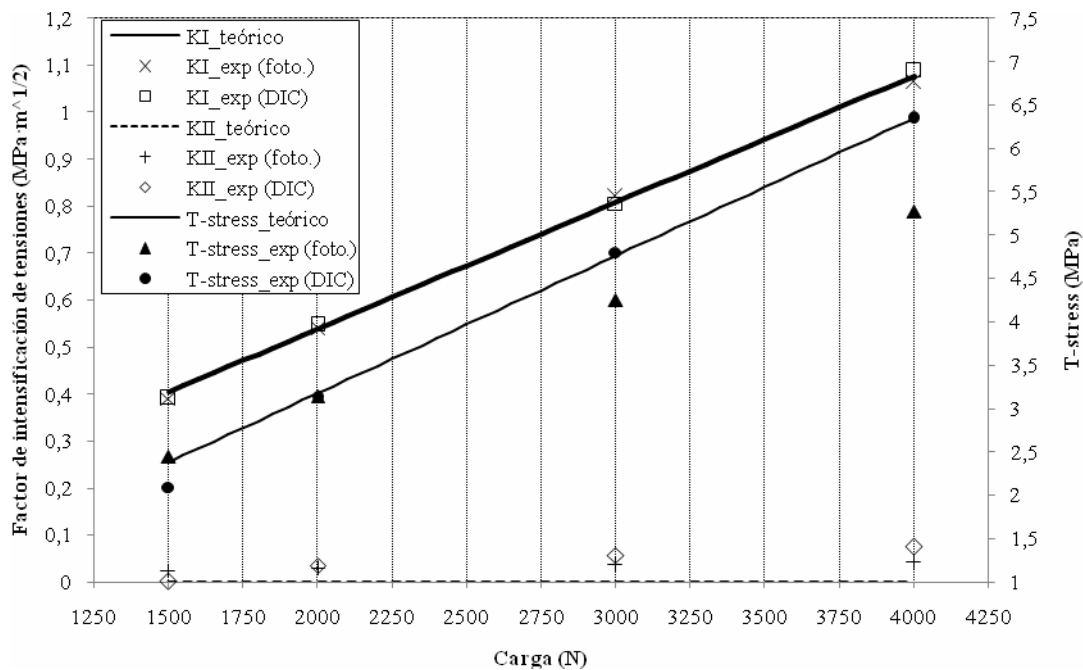


Fig. 12. Factores de intensificación de tensiones y $T-stress$ (experimentales y teóricos) obtenidos mediante ambas técnicas para los distintos niveles de carga.

Tabla 2. Media y varianza de la solución para los distintos niveles de carga en ambas técnicas.

Técnica		FOTOELASTICIDAD		DIC	
Parámetro estadístico		Media	Varianza	Media	Varianza
Carga (kN)	1.5	-0,00033	0,00023	-0,02106	0,00490
	2	-0,00036	0,00028	-0,02141	0,00537
	3	-0,00048	0,00024	-0,02820	0,00939
	4	-0,00052	0,00025	-0,03304	0,01299

Tabla 3. Ventajas y desventajas observadas en ambas técnicas.

Técnica	Ventajas	Desventajas
<i>Fotoelasticidad</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Equipo más barato • Modelos de cálculo de K_I, K_{II} contrastados 	<ul style="list-style-type: none"> • Necesidad de polariscopio • Obtención indirecta del orden de franja → <i>Unwrapping</i> • Relación no lineal entre SIFs y orden de franja → Resolución mediante métodos numéricos
<i>DIC</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Obtención directa de los campos de desplazamientos • Relación lineal entre factores y desplazamientos → Resolución mediante sistema de ecuaciones lineales • Medidas dinámicas 	<ul style="list-style-type: none"> • Compensación de la traslación y rotación del sólido rígido • Modelos de cálculo de K_I, K_{II} menos contrastados

A pesar de esta pequeña dispersión existente, la calidad de la solución está avalada por valores muy pequeños de la media y de la varianza (Tabla 2) para los distintos niveles de carga en ambas técnicas.

5. CONCLUSIONES

En el presente artículo se ha llevado a cabo la determinación de los factores de intensificación de tensiones en probetas planas mediante dos técnicas ópticas de campo completo: fotoelasticidad y correlación digital de imágenes. Para el ajuste de ambas técnicas se ha introducido el término del *T-stress* debido al importante papel que desempeña este término en muchos fenómenos observados en mecánica de la fractura.

Mediante fotoelasticidad se ha de realizar un procesado de las imágenes capturadas para poder obtener un mapa continuo del orden de franja. Este procesado implica el desenvolvimiento del mapa de fases isocromático, con la consecuente introducción de errores que serán más o menos importantes en función de la geometría a analizar. Para la obtención de los factores de intensificación de tensiones se ha seleccionado un conjunto de puntos en las proximidades del vértice de la grieta. Como la relación entre estos factores y el orden de franja no es lineal, para la resolución de la ecuación (6) se ha llevado a cabo un ajuste por mínimos cuadrados.

Por otro lado, mediante DIC no se ha de realizar el procesado de imágenes al igual que en fotoelasticidad ya que los campos de desplazamientos se obtienen de forma directa. Sin embargo, para obtener un correcto ajuste, la traslación y rotación del sólido rígido han de ser compensadas. Por tanto, al ser lineal la relación entre los factores de intensificación de tensiones y los desplazamientos, la obtención de estos factores se ha realizado mediante la resolución de un sistema de ecuaciones lineales, combinando los dos campos de desplazamientos.

La comparación de ambas técnicas se ha realizado a través del análisis de una serie de imágenes capturadas en diferentes ensayos a tracción para distintos niveles de carga sobre una probeta con grieta central de policarbonato de 6 mm de espesor. En este trabajo se muestra un gran nivel de correspondencia entre los valores obtenidos experimentalmente y los calculados de forma teórica, por lo que se pone de manifiesto el gran potencial de ambas técnicas, demostrando que son de gran aplicabilidad en fenómenos relacionados con la mecánica de la fractura.

Es complicado establecer qué técnica es más idónea, sin embargo, se pueden enumerar una serie de ventajas y desventajas (Tabla 3) observadas para cada una de ellas y, de esta forma, dejar a disposición del lector decidir cuál de ellas emplear en función de sus necesidades.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha llevado a cabo con la financiación de la Junta de Andalucía a través del Proyecto de Investigación de Excelencia TEP 2009-5177, proyecto financiado con Fondos Europeos de Desarrollo Regional (FEDER). Así mismo, los autores quieren agradecer el trabajo realizado por Luis Fernando Mata Campos, sin el cual no hubiera sido posible realizar los ensayos necesarios para la elaboración del artículo.

REFERENCIAS

- [1] Ewals, H.L., Wanhill, R.J.H., *Fracture Mechanics*, Edward Arnold (1989)
- [2] Anderson, T.L., *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*, Taylor and Francis (2005)
- [3] Irwin, G.R., “Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate”, *J. Appl. Mech.*, **24**, 361-364 (1957)
- [4] Larsson, S.G., Carlsson, A.J., “Influence of non-singular stress term and specimen geometry on small scale yielding at crack tips in elastic-plastic materials”, *J. Mech. Phys. Solids*, **21**, 263-277 (1973)
- [5] Cloud, G., *Optical Methods of Engineering Analysis*, Cambridge University Press (1998)
- [6] Ramesh, K., *Digital Photoelasticity. Advanced Techniques and Applications*, Springer (2000)
- [7] Post, D., “Photoelastic stress analysis for an edge crack in a tensile field”, *Proc. SESA*, **12**(1), 99-116 (1954)
- [8] Wells, A., Post, D., “Dynamic stress distribution surrounding a running crack—a photoelastic analysis”, *Proc. SESA*, **16**(1), 69-92 (1958)
- [9] Irwin, G.R., “Discussion of a paper: Dynamic stress distribution surrounding a running crack – a photoelastic analysis”, *Proc. SESA*, **16**(1), 93-96 (1958)
- [10] Sandford, R.J., Dally, J.W., “A general method for determining the mixed-mode stress intensity factors from isochromatics fringe patterns”, *Engineering Fracture Mechanics*, **11**, 621-633 (1979)
- [11] Ramesh, K., Gupta, S., Kelkar, A.A., “Evaluation of stress field parameters in fracture mechanics by photoelasticity—revisited”, *Engineering Fracture Mechanics*, **56**(1), 25-45 (1997)
- [12] Díaz, F.A., Patterson, E.A., Tomlinson, R.A., Yates, J.R., “Measuring stress intensity factors during fatigue crack growth using thermoelasticity”, *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, **27**, 571-583 (2004)
- [13] Nurse, A.D., Patterson, E.A., “Determination of predominantly mode II stress intensity factors from isochromatic data”, *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, **16**(12), 1339-1354 (1993)
- [14] Muskhelishvili, N.I., *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*, Noordhoff International Publishing (1977)
- [15] Christopher, C.J., James, M.N., Patterson, E.A., Tee, K.F., “Towards a new model of crack tip stress fields”, *Int. J. Fract.*, **148**, 361-371 (2007)
- [16] James, M.N., Christopher, C.J., Yanwei, L., Patterson, E.A., “The Plastic ‘inclusion’ as a bridge between local crack plasticity and the global elastic field”, *In: Proc. Int. Conf. Characterization of Crack Tip Stress Fields*, 178-184, Forni di Sopra, Udine, Italy (2011)
- [17] Sutton, M.A., Orteu, J.J., Schreier, H.W., *Image Correlation for Shape, Motion and Deformation Measurements. Basic Concepts, Theory and Applications*, Springer (2009)
- [18] Chu, T.C., Ranson, W.F., Sutton, M.A., Peters, W.H., “Applications of digital-image correlation techniques to experimental mechanics”, *Experimental Mechanics*, **25**(3), 232-244 (1985)
- [19] Sutton, M.A., McNeill, S.R., Helm, J.D., Chao, Y.J., “Advances in two-dimensional and three-dimensional computer vision”, *Topics in Appl. Physics*, **77**, 323-372 (1999)
- [20] Quinta da Fonseca, J.P., Mummery, P.M., Withers, P.J., “Full-field strain mapping by optical correlation of micrographs acquired during deformation”, *J. Microscopy*, **218**, 9-21 (2005)

- [21] Yoneyama, S., Morimoto, Y., Takashi, M., “Automatic evaluation of mixed-mode stress intensity factors utilizing digital image correlation”, *Strain*, **42**, 21-29 (2006)
- [22] López-Crespo, P., Burguete, R.L., Patterson, E.A., Shterenlikht, A., Withers, P.J., Yates, J.R., “Study of a crack at a fastener hole by digital image correlation”, *Experimental Mechanics*, **49**, 551-559 (2008)
- [23] López-Crespo, P., Shterenlikht, A., Patterson, E.A., Withers, P.J., Yates, J.R., “The stress intensity of mixed mode cracks determined by digital image correlation”, *Journal Strain Analysis*, **43**(8), 769-780 (2008)
- [24] Yates, J.R., Zanganeh, M., Tai, Y.H., “Quantifying crack tip displacement fields with DIC”, *Eng. Fract. Mech.*, **77**, 2063-2076 (2010)
- [25] Williams, M.L., “On the stress distribution at the base of a stationary crack”, *J. Appl. Mech.*, **24**, 109-114 (1957)
- [26] Patterson, E.A., Wang, Z.F., “Towards full-field automated photoelastic analysis of complex components”, *Strain*, **27**, 49-56 (1991)
- [27] Siegmann, P., Backman, D., Patterson, E.A., “A robust approach to demodulating and unwrapping phase-stepped photoelastic data”, *Society for Experimental Mechanics*, **45**(39), 278-289 (2005)
- [28] Patterson, E.A., “Digital photoelasticity: principles, practice and potential”, *Strain*, **38**, 278-289 (2002)
- [29] Sherry, A.H., France, C.C., Goldthorpe, M.R., “Compendium of T-stress solutions for two and three dimensional cracked geometries”, *Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.*, **18**, 141-155 (1995)

STRESS INTENSITY FACTORS CALCULATION USING FULL-FIELD OPTICAL TECHNIQUES

Abstract – Digital photoelasticity and digital image correlation (DIC) are experimental full-field optical techniques which are used for the analysis of stresses and strains in mechanical elements. In the current paper, these techniques are compared through the determination, using flat specimens, of stress intensity factors (SIFs) and T-stress (σ_{0x}). A polycarbonate Middle-Tension (MT) specimen under tension has been tested, capturing a series of images for different loads. By photoelasticity technique, SIFs are calculating from isochromatic fringe field near the crack tip. This isochromatic map is obtained indirectly by image processing, which involves a phase image unwrapping procedure. In addition, the application of DIC on the test images provides the displacement field directly, from which SIFs (K_I , K_{II}) and σ_{0x} can also be determined. In photoelasticity, the relation between the fringe order and the stress intensity factors is non-linear, so a least squares fit has been used for their determination. For DIC, simply solving a system of linear equations as the relation between the displacements and SIFs is linear. The obtained results through both techniques are compared with those calculated from theory, showing a high level of agreement that highlights the potential of the used methodology.

Keywords – Stress intensity factor, Digital photoelasticity, Digital image correlation, Fracture mechanics.