



TRATAMIENTO VARIACIONAL DE PLACAS LAMINADAS CON RÓTULAS INTERMEDIAS UTILIZANDO LA TEORÍA DE PRIMER ORDEN

MARÍA V. QUINTANA, RICARDO O. GROSSI

Universidad Nacional de Salta
PROMAS-INIQUI, Facultad de Ingeniería
Av. Bolivia 5150, 4400 Salta, Argentina

(Recibido 10 de junio de 2011, revisado 25 de agosto de 2011, para publicación 30 de agosto de 2011)

Resumen – El problema de vibraciones libres de placas con presencia de rótulas elásticamente restringidas y situadas en puntos intermedios, es de interés en ciertas aplicaciones de la ingeniería. Una línea intermedia con rótulas en una placa, puede ser usada para facilitar la apertura de puertas, la plegadura de portones y para simular ciertas fracturas. La presencia de las rótulas genera condiciones cuyas expresiones analíticas son análogas a las de las condiciones de contorno y complican notablemente la resolución, tanto analítica como numérica, de los problemas correspondientes. Es importante notar que no existen estudios en la literatura, del problema de vibraciones libres de placas gruesas elásticamente restringidas en sus contornos y que además posean rótulas intermedias restringidas elásticamente. El objetivo de este trabajo es la obtención, mediante las técnicas del cálculo de variaciones, de los problemas de contorno que describen el comportamiento estático y dinámico de placas con una línea intermedia con rótulas. En el estudio se consideran placas laminadas moderadamente gruesas modeladas mediante el uso de la teoría de primer orden, la cual permite tener en cuenta los efectos de la inercia rotatoria y de las deformaciones transversales por corte. El uso de la teoría mencionada permite obtener mayor precisión en la determinación de los coeficientes de frecuencia y los modos superiores de vibración, con respecto a los proporcionados por la teoría clásica de placas.

Palabras clave – Placas, rótulas intermedias, cálculo de variaciones, problemas de contorno.

1. INTRODUCCIÓN

La denominada teoría de placas de primer orden, conocida por sus siglas en inglés FSDT, extiende la cinemática de la teoría clásica de placas (CLPT), incluyendo una deformación transversal por corte constante en el espesor de la placa. Además, la teoría FSDT, incorpora los efectos de la inercia rotatoria. El efecto más significativo de incluir las deformaciones transversales por corte, se observa en la predicción de los valores de las deflexiones, frecuencias de vibración y cargas de pandeo. Es conocido que la teoría clásica de placas predice valores numéricos de las deflexiones menores que los exactos y en cambio, produce valores superiores para las frecuencias y las cargas de pandeo, cuando las placas poseen una relación largo-espesor aproximadamente menor o igual a 20. Por esta razón es necesario el uso de una teoría de orden superior para el análisis de placas que son relativamente gruesas.

Existe una gran cantidad de textos y trabajos de investigación sobre la obtención, mediante el cálculo de variaciones, de las ecuaciones diferenciales y las condiciones de contorno que describen el comportamiento estático y dinámico de placas [1-5]. No obstante, todas estas obras tratan el caso de placas isótropas y contornos con apoyos clásicos, es decir simplemente apoyados, rígidamente empotrados y libres. En las referencias [6,7] se trataron problemas de placas anisótropas restringidas elásticamente y con contornos que poseen puntos angulosos. Por otro lado, existe una cantidad limitada de trabajos que contemplan la presencia de líneas intermedias con rótulas en una placa [8-12]. Por ello, el objetivo fundamental de este trabajo es obtener las ecuaciones gobernantes, las condiciones de contorno, y las condiciones de transición, que gobiernan el comportamiento estático y dinámico, de acuerdo con la teoría FSDT, de una pla-

ca anisotropía de forma arbitraria, con contornos elásticamente restringidos y con una línea intermedia con rótulas restringidas contra rotación y traslación.

2. COMPONENTES DE LAS ENERGÍAS DE LA PLACA

Sea una placa moderadamente gruesa de material con contornos elásticamente restringidos contra rotación y traslación y con una línea intermedia con rótulas también restringidas elásticamente, tal como se observa en la Fig. 1. Se supone que la placa está sometida a cargas perpendiculares al plano medio y está constituida por un apilamiento de capas ortótropas, de forma tal que en conjunto forman un esquema de laminación simétrico con respecto al plano medio. Dada la existencia de la línea de rótulas, el contorno ∂R de la placa, queda dividido en las curvas $\Gamma^{(1)}$ y $\Gamma^{(2)}$, donde $\Gamma^{(i)} = \partial R^{(i)} - \Gamma^{(c)}$, $i = 1, 2$ y donde la curva $\Gamma^{(c)} = \{(c, x_2) \in R\}$ es la parte común a los contornos $\partial R^{(1)}$ y $\partial R^{(2)}$. En vista de lo anterior, se supone que, las restricciones rotacionales están caracterizadas por las funciones $c_R^{(i)} = c_R^{(i)}(s)$, $\forall s \in \Gamma^{(i)}$, $i = 1, 2$ y por $c_{R_{12}} = c_{R_{12}}(s)$, $\forall s \in \Gamma^{(c)}$ y en forma análoga, las restricciones traslacionales están definidas por las funciones $c_T^{(i)} = c_T^{(i)}(s)$ y $c_T^{(c)} = c_T^{(c)}(s)$.

Los desarrollos siguientes se basan teniendo en cuenta las hipótesis cinemáticas de la teoría FSDT [13].

2.1. Energía de deformación de la placa

De acuerdo con las hipótesis establecidas anteriormente, la energía de deformación por *flexión transversal* de la placa descrita, se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 U = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \iint_{R^{(i)}} \left\{ D_{11}^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_1} \right)^2 + D_{22}^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_2} \right)^2 + 2D_{12}^{(i)} \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_2} + \right. \\
 & + 2D_{16}^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_1} \right) + 2D_{26}^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_1} \right) + \\
 & + D_{66}^{(i)} \left(\left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_2} \right)^2 + 2 \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_1} \right)^2 \right) + A_{44}^{(i)} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 + 2 \frac{\partial w}{\partial x_2} \phi_{x_2} + \phi_{x_2}^2 \right) + \\
 & \left. + 2A_{45}^{(i)} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \phi_{x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \phi_{x_2} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \phi_{x_1} \phi_{x_2} \right) + A_{55}^{(i)} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 + 2 \frac{\partial w}{\partial x_1} \phi_{x_1} + \phi_{x_1}^2 \right) \right\} dx_1 dx_2,
 \end{aligned} \tag{1}$$

donde $D_{ij}^{(k)} = D_{ij}^{(k)}(x_1, x_2)$, $A_{ij}^{(k)} = A_{ij}^{(k)}(x_1, x_2)$ $k = 1, 2$, son las rigideces flexionales y extensionales de la placa y están dadas por:

$$D_{ij}^{(k)}(x_1, x_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}^{(r)} x_3^2 dx_3, \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{2}$$

$$A_{ij}^{(k)}(x_1, x_2) = K \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij}^{(r)} dx_3, \quad i, j = 4, 5, \tag{3}$$

con $h = h(x_1, x_2)$ y donde K es el factor de corrección por corte, el cual permite tener en cuenta la diferencia entre las fuerzas de cortes reales y las proporcionadas por la teoría FSDT. Además $\bar{Q}_{ij}^{(r)}$ denota a los elementos de la matriz constitutiva de la capa r del laminado simétrico, $w = w(x_1, x_2, t)$ denota la

deflexión transversal de los puntos del plano medio de la placa y las funciones $\phi_{x_2} = \phi_{x_2}(x_1, x_2, t)$ y $\phi_{x_1} = \phi_{x_1}(x_1, x_2, t)$ denotan las rotaciones de la sección transversal alrededor de las coordenadas x_1 y x_2 respectivamente.

Dado que el dominio de la placa esta dividido la función w se define como:

$$w(x_1, x_2, t) = \begin{cases} w^{(1)}(x_1, x_2, t), & \forall (x_1, x_2) \in \bar{R}^{(1)}, \\ w^{(2)}(x_1, x_2, t), & \forall (x_1, x_2) \in \bar{R}^{(2)}. \end{cases}$$

De igual forma se definen $\phi_{x_2} = \phi_{x_2}(x_1, x_2, t)$ y $\phi_{x_1} = \phi_{x_1}(x_1, x_2, t)$.

2.2. Energía de deformación de los vínculos rotacionales y traslacionales

La energía de deformación total asociada a los vínculos elásticos descriptos están dadas por:

$$U_R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma^{(i)}} c_R^{(i)}(s) \phi_n^2 ds + \frac{1}{2} \int_{\Gamma^{(c)}} c_{R_{12}}(s) (\phi_{x_1}(c^+, x_2, t) - \phi_{x_1}(c^-, x_2, t))^2 ds, \quad (4)$$

$$U_T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma^{(i)}} c_T^{(i)}(s) w^2 ds + \frac{1}{2} \int_{\Gamma^{(c)}} c_T^{(c)}(s) w^2 ds, \quad (5)$$

donde c^+ y c^- denotan los límites laterales y ϕ_n la rotación de un punto en la coordenada normal n .

2.3. Energía cinética de la placa

La energía cinética para cualquier instante t , cuando se tiene en cuenta el efecto de la inercia rotatoria y cuando la placa es homogénea, se define mediante la expresión [13]:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \iint_{R^{(i)}} \left[I_0^{(i)} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I_2^{(i)} \left(\left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial t} \right)^2 \right) \right] dx_1 dx_2, \quad (6)$$

donde,

$$I_0^{(i)} = \rho_0 \int_{-h/2}^{h/2} dz = \rho_0 h^{(i)}, \quad I_2^{(i)} = \rho_0 \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{1}{12} \rho_0 (h^{(i)})^3, \quad h^{(i)} = h^{(i)}(x_1, x_2) \quad (7)$$

2.4. Energía potencial de las cargas exteriores

La energía potencial debida a una carga transversal $q = q(x_1, x_2, t)$ que actúa sobre R , en un instante t está dada por:

$$V = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \iint_{R^{(i)}} q^{(i)}(x_1, x_2, t) w dx_1 dx_2, \quad (8)$$

con

$$q(x_1, x_2, t) = \begin{cases} q^{(1)}(x_1, x_2, t), & \forall (x_1, x_2) \in \bar{R}^{(1)}, \\ q^{(2)}(x_1, x_2, t), & \forall (x_1, x_2) \in \bar{R}^{(2)}. \end{cases}$$

3. VARIACIÓN DEL FUNCIONAL DE ENERGÍA

El Principio de Hamilton requiere que entre los instantes de tiempos t_0 y t_1 , en los cuales la posición del sistema mecánico es conocida, se produzca un movimiento que haga estacionario el funcional $F(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_1} \Pi dt$, en el espacio de las funciones admisibles, donde Π es el Lagrangiano correspondiente y está dado por $\Pi = T - V - U - U_R - U_T$, [5].

Si se aplica el Principio de Hamilton y luego se reemplazan las expresiones para las distintas energías que intervienen en el funcional Π y que están dadas por (1), (4)-(6) y (8), resulta:

$$\begin{aligned}
 F(w, \phi_{x_1}, \phi_{x_2}) = & \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\iint_{R^{(i)}} \left(I_0^{(i)} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I_2^{(i)} \left(\left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial t} \right)^2 \right) - D_{11}^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_1} \right)^2 - \right. \right. \right. \\
 & - D_{22}^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_2} \right)^2 - 2D_{12}^{(i)} \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_2} - 2D_{16}^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_1} \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_1} \right) - \\
 & - 2D_{26}^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_1} \right) - D_{66}^{(i)} \left(\left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_2} \right)^2 + 2 \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_2} \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_1} \right)^2 \right) - \\
 & - A_{44}^{(i)} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2 + 2 \frac{\partial w}{\partial x_2} \phi_{x_2} + \phi_{x_2}^2 \right) - 2A_{45}^{(i)} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \phi_{x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \phi_{x_2} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \phi_{x_1} \phi_{x_2} \right) - \\
 & - A_{55}^{(i)} \left(\left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 + 2 \frac{\partial w}{\partial x_1} \phi_{x_1} + \phi_{x_1}^2 \right) + q^{(i)} w \Bigg\} dx_1 dx_2 - \\
 & - \int_{\Gamma^{(i)}} c_R^{(i)}(s) \phi_n^2 ds - \int_{\Gamma^{(i)}} c_T^{(i)}(s) w^2 ds \Bigg] - \int_{\Gamma^{(e)}} c_{R_{12}}(s) [\phi_{x_1}]^2 ds - \int_{\Gamma^{(e)}} c_T^{(e)}(s) w^2 ds \Bigg\} dt,
 \end{aligned} \tag{9}$$

donde $[\phi_{x_1}]$ denota la diferencia $\phi_{x_1}(c^+, x_2, t) - \phi_{x_1}(c^-, x_2, t)$.

Dado que en este caso el funcional involucrado depende de varias funciones, es conveniente introducir la función vectorial $\mathbf{u} = (w, \phi_{x_1}, \phi_{x_2})$. Ahora el funcional (9) depende de \mathbf{u} y se puede escribir $F = F(\mathbf{u})$ expresión que facilita la definición de la variación primera del funcional como una generalización del concepto de derivada direccional de funciones reales de varias variables. Así la derivada del funcional F en el punto \mathbf{u} y en la dirección \mathbf{v} , esta dada por [5].

$$\delta F(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = \left. \frac{dF(\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v})}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \tag{10}$$

En vista de lo anterior, la condición de funcional estacionario requiere que

$$\delta F(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in D_a \tag{11}$$

donde $\mathbf{v} = (v, \eta_{x_1}, \eta_{x_2})$ y D_a es el espacio de las direcciones admisibles de \mathbf{u} para el dominio D del funcional, [14].

Con el fin de hacer los desarrollos matemáticos requeridos en la aplicación de las técnicas del cálculo de variaciones, se establecen las siguientes hipótesis: $I_0^{(i)}, I_2^{(i)} \in C(\bar{R}^{(i)})$, $D_{kl}^{(i)}, A_{kl}^{(i)} \in C^1(\bar{R}^{(i)})$, $q^{(i)}(\bullet, t) \in C(\bar{R}^{(i)})$, $w(\mathbf{x}, \bullet), \phi_{x_1}(\mathbf{x}, \bullet), \phi_{x_2}(\mathbf{x}, \bullet) \in C^2[t_0, t_1]$, $w(\bullet, t), \phi_{x_2}(\bullet, t) \in C(\bar{R})$, y $w(\bullet, t)|_{\bar{R}^{(i)}}, \phi_{x_1}(\bullet, t)|_{\bar{R}^{(i)}}, \phi_{x_2}(\bullet, t)|_{\bar{R}^{(i)}} \in C^2(\bar{R}^{(i)})$, $i = 1, 2$.

Si se introduce el espacio producto $U = \left(C^2 \left(\bar{R}^{(i)} \times [t_0, t_1] \right) \right)^3$ y teniendo en cuenta que el Principio de Hamilton requiere que entre los tiempos t_0 y t_1 las posiciones sean conocidas, el dominio del funcional (9) está dado por

$$D = \left\{ \mathbf{u}; \mathbf{u} \in U, w(\bullet, t), \phi_{x_2}(\bullet, t) \in C(\bar{R}), \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = h_0(\mathbf{x}), \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_1) = h_1(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \bar{R} \right\} \quad (12)$$

Las únicas direcciones admisibles \mathbf{v} en $\mathbf{u} \in D$ son aquellas para las cuales $\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v} \in D$ para ε suficientemente pequeños y $\delta F(\mathbf{u}; \mathbf{v})$ existe. En consecuencia teniendo en cuenta (12), \mathbf{v} es una dirección admisible en \mathbf{u} para D si, y sólo si, $\mathbf{v} \in D_a$ donde

$$D_a = \left\{ \mathbf{v}; \mathbf{v} \in U, v(\bullet, t), \eta_{x_2}(\bullet, t) \in C(\bar{R}), \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_1) = 0, \forall \mathbf{x} \in \bar{R} \right\}. \quad (13)$$

La aplicación de la condición (11) en el funcional (9) conduce a

$$\begin{aligned} \delta F(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = & \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\iint_{R^{(i)}} \left(I_0^{(i)} \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + I_2^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial t} \frac{\partial \eta_{x_1}}{\partial t} + \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial t} \frac{\partial \eta_{x_2}}{\partial t} \right) + \right. \right. \right. \\ & + M_1^{(i)} \frac{\partial \eta_{x_1}}{\partial x_1} + M_2^{(i)} \frac{\partial \eta_{x_2}}{\partial x_2} + H_{12}^{(i)} \left(\frac{\partial \eta_{x_1}}{\partial x_2} + \frac{\partial \eta_{x_2}}{\partial x_1} \right) + \\ & + Q_2^{(i)} \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} + \eta_{x_2} \right) + Q_1^{(i)} \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} + \eta_{x_1} \right) + q^{(i)} v \Big] dx_1 dx_2 \Big] - \\ & - \int_{\Gamma^{(i)}} c_R^{(i)}(s) \phi_n \eta_n ds - \int_{\Gamma^{(i)}} c_T^{(i)}(s) w v ds \Big] - \\ & - \int_{\Gamma^{(c)}} c_{R_{12}}^{(c)}(s) [\phi_{x_1}] [\eta_{x_1}] ds - \int_{\Gamma^{(c)}} c_T^{(c)}(s) w v ds \Big\} dt = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in D_a, \end{aligned} \quad (14)$$

donde:

$$M_1^{(i)} = - \left(D_{11}^{(i)} \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_1} + D_{12}^{(i)} \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_2} + D_{16}^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_1} \right) \right), \quad (15)$$

$$M_2^{(i)} = - \left(D_{22}^{(i)} \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_2} + D_{12}^{(i)} \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_1} + D_{26}^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_1} \right) \right), \quad (16)$$

$$H_{12}^{(i)} = - \left(D_{16}^{(i)} \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_1} + D_{26}^{(i)} \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_2} + D_{66}^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_1} \right) \right), \quad (17)$$

$$Q_2^{(i)} = - \left(A_{44}^{(i)} \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + \phi_{x_2} \right) + A_{45}^{(i)} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \phi_{x_1} \right) \right), \quad (18)$$

$$Q_1^{(i)} = - \left(A_{55}^{(i)} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \phi_{x_1} \right) + A_{45}^{(i)} \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + \phi_{x_2} \right) \right). \quad (19)$$

Ahora es conveniente transformar las integrales que intervienen en la expresión (14). Consideremos en primer lugar la integral

$$J_1^{(i)} = \int_{t_0}^{t_1} \iint_{R^{(i)}} \left(I_0^{(i)} \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + I_2^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial t} \frac{\partial \eta_{x_1}}{\partial t} + \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial t} \frac{\partial \eta_{x_2}}{\partial t} \right) \right) dx_1 dx_2 dt. \quad (20)$$

Dado que $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \bullet), \mathbf{v}(\mathbf{x}, \bullet) \in C^2[t_0, t_1]$ se puede integrar por partes con respecto al tiempo t y si se aplica la condición $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_1) = 0, \forall \mathbf{x} \in \bar{R}$, establecida en (13), se obtiene

$$\begin{aligned} J_1^{(i)} &= \int_{t_0}^{t_1} \iint_{R^{(i)}} \left(I_0^{(i)} \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + I_2^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial t} \frac{\partial \eta_{x_1}}{\partial t} + \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial t} \frac{\partial \eta_{x_2}}{\partial t} \right) \right) dx_1 dx_2 dt = \\ &= \iint_{R^{(i)}} \left(I_0^{(i)} \frac{\partial w}{\partial t} v + I_2^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial t} \eta_{x_1} + \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial t} \eta_{x_2} \right) \right) \Big|_{t_0}^{t_1} dx_1 dx_2 - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \iint_{R^{(i)}} \left(I_0^{(i)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} v + I_2^{(i)} \left(\frac{\partial^2 \phi_{x_1}}{\partial t^2} \eta_{x_1} + \frac{\partial^2 \phi_{x_2}}{\partial t^2} \eta_{x_2} \right) \right) dx_1 dx_2 dt = \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} \iint_{R^{(i)}} \left(I_0^{(i)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} v + I_2^{(i)} \left(\frac{\partial^2 \phi_{x_1}}{\partial t^2} \eta_{x_1} + \frac{\partial^2 \phi_{x_2}}{\partial t^2} \eta_{x_2} \right) \right) dx_1 dx_2 dt \end{aligned} \quad (21)$$

Sea ahora la integral

$$J_2^{(i)} = \int_{t_0}^{t_1} \iint_{R^{(i)}} M_1^{(i)} \frac{\partial \eta_{x_1}}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dt. \quad (22)$$

En este caso es necesario aplicar la fórmula de Green:

$$\iint_R u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx_1 dx_2 = \int_{\partial R} u v n_i ds - \iint_R v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_1 dx_2, \quad u, v \in C^{(1)}(\bar{R}), \quad (23)$$

donde n_i denota la i -ésima componente del vector normal exterior unitario \vec{n} al contorno ∂R .

Si se aplica la fórmula de Green en la integral (22) se obtiene:

$$\begin{aligned} J_2^{(i)} &= \int_{t_0}^{t_1} \iint_{R^{(i)}} M_1^{(i)} \frac{\partial \eta_{x_1}}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_{\partial R^{(i)}} M_1^{(i)} \eta_{x_1} n_1^{(i)} ds - \iint_{R^{(i)}} \frac{\partial M_1^{(i)}}{\partial x_1} \eta_{x_1} dx_1 dx_2 \right] dt. \end{aligned} \quad (24)$$

Procediendo de igual forma que con los restantes términos de (14) resulta

$$\begin{aligned}
\delta F(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = & \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\iint_{R^{(i)}} \left(-I_0^{(i)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial Q_1^{(i)}}{\partial x_1} - \frac{\partial Q_2^{(i)}}{\partial x_2} + q^{(i)} \right) v dx_1 dx_2 + \right. \right. \\
& + \iint_{R^{(i)}} \left(-I_2^{(i)} \frac{\partial^2 \phi_{x_1}}{\partial t^2} + Q_1^{(i)} - \frac{\partial M_1^{(i)}}{\partial x_1} - \frac{\partial H_{12}^{(i)}}{\partial x_2} \right) \eta_{x_1} dx_1 dx_2 + \\
& + \iint_{R^{(i)}} \left(-I_2^{(i)} \frac{\partial^2 \phi_{x_2}}{\partial t^2} + Q_2^{(i)} - \frac{\partial M_2^{(i)}}{\partial x_2} - \frac{\partial H_{12}^{(i)}}{\partial x_1} \right) \eta_{x_2} dx_1 dx_2 \Big] + \\
& + \int_{\partial R^{(i)}} \left(M_1^{(i)} n_1^{(i)} + H_{12}^{(i)} n_2^{(i)} \right) \eta_{x_1} ds + \int_{\partial R^{(i)}} \left(M_2^{(i)} n_2^{(i)} + H_{12}^{(i)} n_1^{(i)} \right) \eta_{x_2} ds + \\
& + \int_{\partial R^{(i)}} \left(Q_1^{(i)} n_1^{(i)} + Q_2^{(i)} n_2^{(i)} \right) v ds - \int_{\Gamma^{(i)}} c_R^{(i)}(s) \phi_n \eta_n ds - \int_{\Gamma^{(i)}} c_T^{(i)}(s) w v ds \Big] - \\
& \left. - \int_{\Gamma^{(c)}} c_{R_{12}}(s) [\phi_{x_1}] [\eta_{x_1}] ds - \int_{\Gamma^{(c)}} c_T^{(c)}(s) w v ds \right\} dt = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in D_a.
\end{aligned} \tag{25}$$

4. PROBLEMAS DE CONTORNO

De acuerdo con la condición de funcional estacionario, establecida por (11), la expresión (25) debe anularse para la función \mathbf{u} que describe el desplazamiento de los puntos del plano medio de la placa, para todas las direcciones admisibles $\mathbf{v} \in D_a$, y en particular, para todas las \mathbf{v} admisibles que satisfacen en cada contorno $\partial R^{(i)}$ las condiciones:

$$v(\mathbf{x}, t)|_{\partial R^{(i)}} = 0, \quad \eta_{x_2}(\mathbf{x}, t)|_{\partial R^{(i)}} = 0, \quad \eta_{x_1}(\mathbf{x}, t)|_{\partial R^{(i)}} = 0, \quad i = 1, 2. \tag{26}$$

Para tales direcciones la condición de funcional estacionario se reduce a:

$$\begin{aligned}
\delta F(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = & \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\iint_{R^{(i)}} \left(-I_0^{(i)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial Q_1^{(i)}}{\partial x_1} - \frac{\partial Q_2^{(i)}}{\partial x_2} + q^{(i)} \right) v dx_1 dx_2 + \right. \right. \\
& + \iint_{R^{(i)}} \left(-I_2^{(i)} \frac{\partial^2 \phi_{x_1}}{\partial t^2} + Q_1^{(i)} - \frac{\partial M_1^{(i)}}{\partial x_1} - \frac{\partial H_{12}^{(i)}}{\partial x_2} \right) \eta_{x_1} dx_1 dx_2 + \\
& + \iint_{R^{(i)}} \left(-I_2^{(i)} \frac{\partial^2 \phi_{x_2}}{\partial t^2} + Q_2^{(i)} - \frac{\partial M_2^{(i)}}{\partial x_2} - \frac{\partial H_{12}^{(i)}}{\partial x_1} \right) \eta_{x_2} dx_1 dx_2 \Big] \Big\} dt = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in D_a.
\end{aligned} \tag{27}$$

Si la función de carga q es continua y se tiene en cuenta que \mathbf{v} es una función arbitraria suficientemente regular y que satisface las condiciones (26), al aplicar el Lema Fundamental del Cálculo de Variaciones [5], se concluye que las funciones w, ϕ_{x_1} y ϕ_{x_2} deben satisfacer las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_1^{(i)}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2^{(i)}}{\partial x_2} - q^{(i)} + I_0^{(i)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \\
\frac{\partial M_1^{(i)}}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{12}^{(i)}}{\partial x_2} - Q_1^{(i)} + I_2^{(i)} \frac{\partial^2 \phi_{x_1}}{\partial t^2} &= 0, \\
\frac{\partial M_2^{(i)}}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{12}^{(i)}}{\partial x_1} - Q_2^{(i)} + I_2^{(i)} \frac{\partial^2 \phi_{x_2}}{\partial t^2} &= 0, \forall \mathbf{x} \in R^{(i)}, i = 1, 2, \forall t \geq 0.
\end{aligned} \tag{28}$$

Si se reemplazan las expresiones (15)-(19) en (28) se obtienen las expresiones analíticas desarrolladas de las ecuaciones diferenciales, esto es:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_1} \left[A_{55}^{(i)} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \phi_{x_1} \right) + A_{45}^{(i)} \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + \phi_{x_2} \right) \right] + \\
&\frac{\partial}{\partial x_2} \left[A_{44}^{(i)} \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + \phi_{x_2} \right) + A_{45}^{(i)} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \phi_{x_1} \right) \right] + q^{(i)} = I_0^{(i)} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\
&\frac{\partial}{\partial x_1} \left[D_{11}^{(i)} \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_1} + D_{12}^{(i)} \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_2} + D_{16}^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_1} \right) \right] + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x_2} \left[D_{16}^{(i)} \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_1} + D_{26}^{(i)} \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_2} + D_{66}^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_1} \right) \right] - \\
&- \left[A_{55}^{(i)} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \phi_{x_1} \right) + A_{45}^{(i)} \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + \phi_{x_2} \right) \right] = I_2^{(i)} \frac{\partial^2 \phi_{x_1}}{\partial t^2}, \\
&\frac{\partial}{\partial x_2} \left[D_{12}^{(i)} \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_1} + D_{22}^{(i)} \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_2} + D_{26}^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_1} \right) \right] + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[D_{16}^{(i)} \frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_1} + D_{26}^{(i)} \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_2} + D_{66}^{(i)} \left(\frac{\partial \phi_{x_1}}{\partial x_2} + \frac{\partial \phi_{x_2}}{\partial x_1} \right) \right] - \\
&- \left[A_{44}^{(i)} \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} + \phi_{x_2} \right) + A_{45}^{(i)} \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \phi_{x_1} \right) \right] = I_2^{(i)} \frac{\partial^2 \phi_{x_2}}{\partial t^2}, \forall \mathbf{x} \in R^{(i)}, i = 1, 2, \forall t \geq 0.
\end{aligned} \tag{29}$$

Las ecuaciones diferenciales de segundo orden (29) describen el comportamiento dinámico y estático ($\partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 = 0$) de la placa en términos de los desplazamientos generalizados. Por otra parte, las expresiones analíticas de las ecuaciones diferenciales (28) resultan en términos de las fuerzas resultantes. Si ahora se quitan las restricciones (26), y se tiene en cuenta que \mathbf{u} satisface las ecuaciones diferenciales (29), la expresión de la condición (25) se reduce a:

$$\begin{aligned}
\delta F(\mathbf{u}; \mathbf{v}) &= \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\int_{\partial R^{(i)}} \left(M_1^{(i)} n_1^{(i)} + H_{12}^{(i)} n_2^{(i)} \right) \eta_{x_1} ds + \int_{\partial R^{(i)}} \left(M_2^{(i)} n_2^{(i)} + H_{12}^{(i)} n_1^{(i)} \right) \eta_{x_2} ds + \right. \right. \\
&+ \int_{\partial R^{(i)}} \left(Q_1^{(i)} n_1^{(i)} + Q_2^{(i)} n_2^{(i)} \right) v ds - \int_{\Gamma^{(i)}} c_R^{(i)}(s) \phi_n \eta_n ds - \int_{\Gamma^{(i)}} c_T^{(i)}(s) w v ds \Big] - \\
&\left. - \int_{\Gamma^{(c)}} c_{R_{12}}(s) [\phi_{x_1}] [\eta_{x_1}] ds - \int_{\Gamma^{(c)}} c_T^{(c)}(s) w v ds \right\} dt = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in D_a.
\end{aligned} \tag{30}$$

Para un adecuado tratamiento de las integrales curvilíneas que intervienen en (30) es conveniente expresar los desplazamientos ϕ_{x_1} y ϕ_{x_2} en función de las funciones ϕ_n y ϕ_s , las cuales describen las rotaciones de un punto alrededor de las coordenadas curvilíneas s y n . Si el vector normal unitario $\vec{n}^{(i)}$ exterior a $\partial R^{(i)}$, está orientado un ángulo α con respecto al eje x_1 , entonces tiene sus cosenos directores dados por: $\vec{n}_1^{(i)} = \cos \alpha$ y $\vec{n}_2^{(i)} = \sin \alpha$. Teniendo en cuenta lo anterior, la transformación de coordenadas entre el sistema cartesiano (x_1, x_2) y el curvilíneo (s, n) esta dada por:

$$\mathbf{e}_1 = \cos \alpha \mathbf{e}_n - \sin \alpha \mathbf{e}_s, \quad \mathbf{e}_2 = \sin \alpha \mathbf{e}_n + \cos \alpha \mathbf{e}_s. \quad (31)$$

donde \mathbf{e}_1 y \mathbf{e}_2 son los vectores unitarios correspondientes a las coordenadas x_1 y x_2 . Las relaciones dadas por (31), establecen que las rotaciones ϕ_{x_1} y ϕ_{x_2} están relacionadas con las ϕ_n y ϕ_s mediante las expresiones:

$$\phi_{x_1} = \cos \alpha \phi_n - \sin \alpha \phi_s, \quad \phi_{x_2} = \sin \alpha \phi_n + \cos \alpha \phi_s. \quad (32)$$

Si en primer lugar se considera la integral

$$\int_{\Gamma^{(c)}} c_{R_{12}}(s) [\phi_{x_1}] [\eta_{x_1}] ds, \quad (33)$$

de acuerdo con las expresiones (32), ésta puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^{(c)}} c_{R_{12}}(s) [\phi_{x_1}] [\eta_{x_1}] ds = & \int_{\Gamma^{(c)}} c_{R_{12}}(s) [\phi_{x_1}] (n_1^{(2)} \eta_n(c^+, x_2, t) - n_2^{(2)} \eta_s(c^+, x_2, t) + \\ & + n_2^{(1)} \eta_s(c^-, x_2, t) - n_1^{(1)} \eta_n(c^-, x_2, t)) ds. \end{aligned} \quad (34)$$

Cuando se considera a la línea $\Gamma^{(c)}$ como parte del contorno del subdominio $R^{(1)}$, el vector normal unitario saliente a $\Gamma^{(c)}$, está dado por (ver Fig. 1):

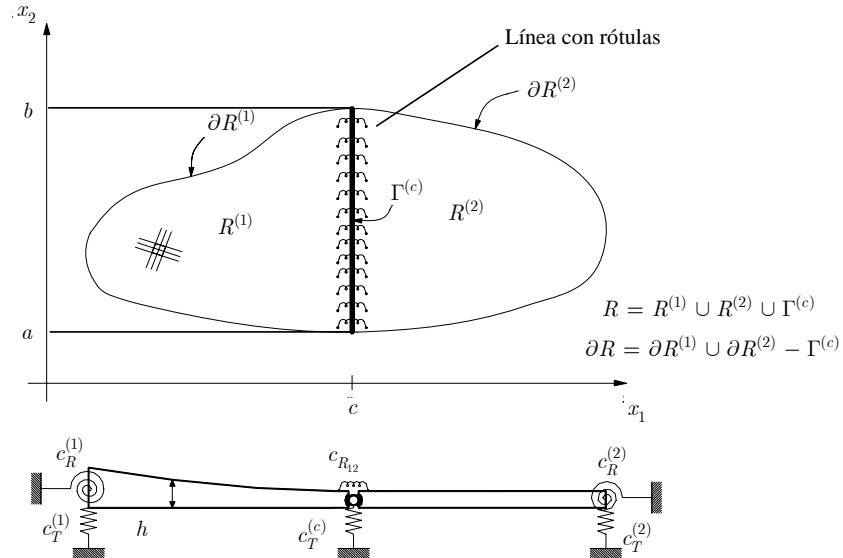


Fig. 1. Parámetros geométricos y mecánicos de una placa con una línea intermedia con rótulas.

$$\vec{n}^{(1)} = (1, 0), \quad (35)$$

y cuando se considera a la línea $\Gamma^{(e)}$ como parte del contorno del subdominio $R^{(2)}$, es:

$$\vec{n}^{(2)} = (-1, 0). \quad (36)$$

El reemplazo de (35) y (36) en la integral (34) conduce a

$$\int_{\Gamma^{(e)}} c_{R_{12}}(s) [\phi_{x_1}] [\eta_{x_1}] ds = - \int_{\Gamma^{(e)}} c_{R_{12}}(s) [\phi_{x_1}] (\eta_n(c^+, x_2, t) + \eta_n(c^-, x_2, t)) ds. \quad (37)$$

Si se reemplaza (37) en (30) y se reagrupan términos, ésta se transforma en:

$$\begin{aligned} \delta F(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = & \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\int_{\Gamma^{(i)}} (M_n^{(i)} - c_R^{(i)}(s) \phi_n) \eta_n ds + \int_{\Gamma^{(i)}} (M_{ns}^{(i)}) \eta_s ds + \right. \right. \\ & + \int_{\Gamma^{(i)}} (Q_n^{(i)} - c_T^{(i)}(s) w) v ds + \int_{\Gamma^{(e)}} (M_n^{(i)} \eta_n + M_{ns}^{(i)} \eta_s + Q_n^{(i)} v) ds \Big] + \\ & \left. + \int_{\Gamma^{(e)}} c_{R_{12}}(s) [\phi_{x_1}] (\eta_n(c^+, x_2, t) + \eta_n(c^-, x_2, t)) ds - \int_{\Gamma^{(e)}} c_T^{(e)}(s) w v ds \right\} dt = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in D_a, \end{aligned} \quad (38)$$

donde $Q_n^{(i)}, M_n^{(i)}, M_{ns}^{(i)}$ están dados por:

$$Q_n^{(i)} = Q_1^{(i)} \vec{n}_1^{(i)} + Q_2^{(i)} \vec{n}_2^{(i)}, \quad (39)$$

$$M_n^{(i)} = M_1^{(i)} (\vec{n}_1^{(i)})^2 + M_2^{(i)} (\vec{n}_2^{(i)})^2 + 2H_{12}^{(i)} \vec{n}_1^{(i)} \vec{n}_2^{(i)}, \quad (40)$$

$$M_{ns}^{(i)} = (M_2^{(i)} - M_1^{(i)}) \vec{n}_1^{(i)} \vec{n}_2^{(i)} + H_{12}^{(i)} \left((\vec{n}_1^{(i)})^2 - (\vec{n}_2^{(i)})^2 \right). \quad (41)$$

Teniendo en cuenta que es posible elegir independientemente a las direcciones v , η_n y η_s y que el intervalo $[t_0, t_1]$ es arbitrario, la condición de funcional estacionario (11) permite obtener las siguientes condiciones de contorno naturales del problema, las cuales establecen requerimientos sobre los momentos flectores y las fuerzas cortantes respectivamente:

$$c_R^{(i)}(s) \phi_n \Big|_{\Gamma^{(i)}} = M_n^{(i)} \Big|_{\Gamma^{(i)}}, \quad i = 1, 2, \quad (42)$$

$$c_T^{(i)}(s) w \Big|_{\Gamma^{(i)}} = Q_n^{(i)} \Big|_{\Gamma^{(i)}}, \quad i = 1, 2, \quad (43)$$

$$M_{ns}^{(i)} \Big|_{\Gamma^{(i)}} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (44)$$

Si se tiene en cuenta que es $\partial R = \Gamma^{(1)} \cup \Gamma^{(2)}$, las expresiones (42), (43) y (44) conducen a las siguientes condiciones de contorno a lo largo de ∂R :

$$c_R(s) \phi_n \Big|_{\partial R} = M_n \Big|_{\partial R}, \quad (45)$$

$$c_T(s) \Big|_{\partial R} = Q_n \Big|_{\partial R}, \quad (46)$$

$$M_{ns} \Big|_{\partial R} = 0, \quad (47)$$

donde Q_n, M_n y M_{ns} están dados por las expresiones (39)-(41) y $M_i, Q_i, i = 1, 2$ y H_{12} están dados por las expresiones (15)-(19) cuando el supraíndice (i) es eliminado.

5. CONDICIONES DE TRANSICIÓN

Al adoptar direcciones admisibles v , η_n y η_s adecuadas, la condición (38) se reduce a

$$\delta F(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma^{(c)}} (M_n^{(i)} \eta_n + M_{ns}^{(i)} \eta_s + Q_n^{(i)} v) ds - \int_{\Gamma^{(c)}} c_{R_{12}}^{(c)}(s) [\phi_{x_1}] (\eta_n(c^+, x_2, t) + \eta_n(c^-, x_2, t)) ds - \int_{\Gamma^{(c)}} c_T^{(c)}(s) w v ds \right\} dt = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in D_a. \quad (48)$$

Se analizan ahora las integrales curvilíneas que intervienen en (48). En el caso de la integral

$$\int_{\Gamma^{(c)}} (M_n^{(1)} \eta_n + M_{ns}^{(1)} \eta_s + Q_n^{(1)} v) ds \quad (49)$$

la línea $\Gamma^{(c)}$ puede ser representada paramétricamente por la función (ver Fig. 1)

$$\alpha(r) = (\alpha_1(r), \alpha_2(r)), \quad r \in [a, b].$$

Dado que el vector normal unitario es $\vec{n}^{(1)} = (1, 0)$, las expresiones (39)-(41) se reducen a:

$$Q_n^{(1)}|_{\Gamma^{(c)}} = Q_1^{(1)}|_{\Gamma^{(c)}} = Q_1(c^-, r, t), \quad (50)$$

$$M_n^{(1)}|_{\Gamma^{(c)}} = M_1^{(1)}|_{\Gamma^{(c)}} = M_1(c^-, r, t), \quad (51)$$

$$M_{ns}^{(1)}|_{\Gamma^{(c)}} = H_{12}^{(1)}|_{\Gamma^{(c)}} = H_{12}(c^-, r, t). \quad (52)$$

Si se reemplaza las expresiones (50)-(52) en la integral curvilínea (49) resultan

$$\int_{\Gamma^{(c)}} M_n^{(1)} \eta_n ds = \int_a^b M_1(c^-, r, t) \eta_n(c^-, r, t) dr, \quad (53)$$

$$\int_{\Gamma^{(c)}} M_{ns}^{(1)} \eta_s ds = \int_a^b H_{12}(c^-, r, t) \eta_s(c^-, r, t) dr, \quad (54)$$

$$\int_{\Gamma^{(c)}} Q_n^{(1)} v ds = \int_a^b Q_1(c^-, r, t) v(c^-, r, t) dr. \quad (55)$$

En el caso de la integral

$$\int_{\Gamma^{(c)}} (M_n^{(2)} \eta_n + M_{ns}^{(2)} \eta_s + Q_n^{(2)} v) ds, \quad (56)$$

si para $\Gamma^{(c)}$ se adopta la representación paramétrica

$$\beta(r) = (\beta_1(r), \beta_2(r)), \quad r \in [0, b-a].$$

se obtienen las siguientes expresiones de los términos de la integral curvilínea (56)

$$\int_{\Gamma^{(c)}} M_n^{(2)} \eta_n ds = \int_0^{b-a} M_1(c^+, b-r, t) \eta_n(c^+, b-r, t) dr = \int_a^b M_1(c^+, r, t) \eta_n(c^+, r, t) dr, \quad (57)$$

$$\int_{\Gamma^{(c)}} M_{ns}^{(2)} \eta_s ds = \int_a^b H_{12}(c^+, r, t) \eta_s(c^+, r, t) dr, \quad (58)$$

$$\int_{\Gamma^{(c)}} Q_n^{(1)} v ds = - \int_a^b Q_1(c^+, r, t) v(c^+, r, t) ds. \quad (59)$$

Finalmente de (48), (53)-(55) y (57)-(59) y mediante un procedimiento análogo al usado en la determinación de las ecuaciones (42)-(44) resultan las siguientes condiciones:

$$c_{R_{12}}(x_2)(\phi_{x_1}(c^+, x_2, t) - \phi_{x_1}(c^-, x_2, t)) = -M_1(c^+, x_2, t) = -M_1(c^-, x_2, t), \quad (60)$$

$$H_{12}(c^-, x_2, t) + H_{12}(c^+, x_2, t) = 0, \quad (61)$$

$$c_T^{(c)}(x_2)w(c, x_2, t) = Q_1(c^-, x_2, t) - Q_1(c^+, x_2, t) \quad (62)$$

Las expresiones (45)-(47) corresponden a las condiciones de contorno y las expresiones (60)-(62) corresponden a las condiciones de transición del problema. Dado que $w(\bullet, t), \phi_{x_2}(\bullet, t) \in C(\bar{R})$, existe continuidad de estos desplazamientos en el punto (c^+, x_2) y esto genera las condiciones adicionales de transición

$$w(c^-, x_2, t) = w(c^+, x_2, t) = w(c, x_2, t), \forall x_2 \in [a, b], \quad (63)$$

$$\phi_{x_2}(c^-, x_2, t) = \phi_{x_2}(c^+, x_2, t) = \phi_{x_2}(c, x_2, t), \forall x_2 \in [a, b]. \quad (64)$$

De esta forma, todas las condiciones de transición del problema pueden ser expresadas como

$$w(c^-, x_2, t) = w(c^+, x_2, t) = w(c, x_2, t), \quad (65)$$

$$\phi_{x_2}(c^-, x_2, t) = \phi_{x_2}(c^+, x_2, t) = \phi_{x_2}(c, x_2, t), \quad (66)$$



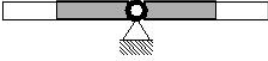

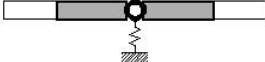

$$c_{R_{12}}(x_2)(\phi_{x_1}(c^+, x_2, t) - \phi_{x_1}(c^-, x_2, t)) = -M_1(c^+, x_2, t) = -M_1(c^-, x_2, t), \quad (67)$$

$$H_{12}(c^-, x_2, t) + H_{12}(c^+, x_2, t) = 0, \quad (68)$$

$$c_T^{(c)}(x_2)w(c, x_2, t) = Q_1(c^-, x_2, t) - Q_1(c^+, x_2, t). \quad (69)$$

Es conocido que para operadores diferenciales de orden $2m$, las condiciones de contorno que incluyen la función u y sus derivadas de orden no mayor que $m - 1$, se llaman *estables* o *geométricas*, y aquellas que incluyen derivadas de orden superior a $m - 1$, se llaman *inestables* o *naturales*. Si esta clasificación se extiende a las condiciones de transición, se concluye que si $0 \leq c_{R_{12}}, c_T^{(c)} < \infty$, las condiciones de transición (67)-(69) son naturales. Realizando el mismo análisis para las condiciones (65) y (66), se concluye que son estables. La clasificación establecida tiene particular importancia cuando se utiliza el método de Ritz para resolver problemas de autovalores porque es bien conocido que las funciones de aproximación deben satisfacer solamente las condiciones de contorno estables del problema [15]. En este trabajo se aplica esta propiedad al tratamiento de las condiciones de transición, dado que en los ejemplos analíticos solamente fueron tenidas en cuenta las condiciones de transición estables.

Si se adoptan diferentes valores y/o valores límites de las funciones $c_{R_{12}}$ y $c_T^{(c)}$ en las ecuaciones (67) y (69) se pueden generar diferentes situaciones. A continuación se detallan algunos de los casos más relevantes:

	No hay rótula interna y la articulación es perfectamente rígida
 $c_{R_{12}} = \infty, c_T^{(c)} = 0.$	$\phi_{x_1}(c^+, x_2, t) = \phi_{x_1}(c^-, x_2, t),$ $Q_1(c^-, x_2, t) = Q_1(c^+, x_2, t).$
	Rótula interna y la articulación es perfecta
 $c_{R_{12}} = 0, c_T^{(c)} = 0.$	$M_1(c^-, x_2, t) = M_1(c^+, x_2, t) = 0,$ $Q_1(c^-, x_2, t) = Q_1(c^+, x_2, t).$
	Rótula interna soportada por un apoyo rígido
 $c_{R_{12}} = 0, c_T^{(c)} = \infty.$	$w(c, x_2, t) = 0,$ $M_1(c^-, x_2, t) = M_1(c^+, x_2, t) = 0.$
	No hay rótula interna. Punto intermedio soportado por un apoyo rígido
 $c_{R_{12}} = \infty, c_T^{(c)} = \infty$	$w(c, x_2, t) = 0,$ $\phi_{x_1}(c^+, x_2, t) = \phi_{x_1}(c^-, x_2, t).$
	Rótula interna soportada por una restricción traslacional
 $c_{R_{12}} = 0, 0 < c_T^{(c)} < \infty$	$M_1(c^-, x_2, t) = M_1(c^+, x_2, t) = 0,$ $Q_1(c^-, x_2, t) - Q_1(c^+, x_2, t) = c_T^{(c)}(x_2) w(c, x_2, t).$
	Rótula interna restringida elásticamente contra rotación
 $0 < c_{R_{12}} < \infty, c_T^{(c)} = 0.$	$Q_1(c^-, x_2, t) = Q_1(c^+, x_2, t),$ $M_1(c^+, x_2, t) = M_1(c^-, x_2, t) =$ $= -c_{R_{12}}(x_2) (\phi_{x_1}(c^+, x_2, t) - \phi_{x_1}(c^-, x_2, t)).$
	Rótula interna restringida elásticamente contra rotación y soportada por un apoyo rígido
	$w(c, x_2, t) = 0,$

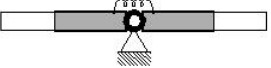
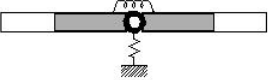
 <p>$0 < c_{R_{12}} < \infty, c_{T_c} = \infty.$</p>	$M_1(c^+, x_2, t) = M_1(c^-, x_2, t) =$ $= -c_{R_{12}}(x_2)(\phi_{x_1}(c^+, x_2, t) - \phi_{x_1}(c^-, x_2, t))$
Rótula interna restringida elásticamente contra rotación y soportada por una restricción traslacional	
 <p>$0 < c_{R_{12}} < \infty, 0 < c_T^{(c)} < \infty.$</p>	$Q_1(c^-, x_2, t) - Q_1(c^+, x_2, t) = c_T^{(c)}(x_2)w(c, x_2, t).$ $M_1(c^+, x_2, t) = M_1(c^-, x_2, t) =$ $= -c_{R_{12}}(x_2)(\phi_{x_1}(c^+, x_2, t) - \phi_{x_1}(c^-, x_2, t)).$
<p>En todos los casos valen las condiciones de transición dadas por:</p> $w(c^-, x_2, t) = w(c^+, x_2, t) = w(c, x_2, t),$ $\phi_{x_2}(c^+, x_2, t) = \phi_{x_2}(c^-, x_2, t) = \phi_{x_2}(c, x_2, t),$ $H_{12}(c^-, x_2, t) + H_{12}(c^+, x_2, t) = 0, x_2 \in [a, b]$	

Tabla 1. Coeficientes de frecuencias $\Omega_i = \omega_i(l^2/\pi^2)\sqrt{\rho h/D_{22}}$, de una placa cuadrada SSSS, ortótropa,

$$(E_1/E_2 = 25, \mu_{12} = 0,25, G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0,5; G_{23}/E_2 = 0,2; k = 5/6).$$

c/l	h/l		Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
0.5	0.01	Presente	1.8456	5.0528	10.2368	17.7072	20.0710	21.1406
		[11]	1.8427	5.0487	10.0904	17.0579	20.0710	21.1406
	0.1	Presente	1.7213	4.4507	8.2121	11.7257	12.4929	12.7018
		[11]	1.7213	4.4507	8.1312	11.7257	12.4071	12.4929
0.3	0.1	Presente	1.8099	4.5538	8.2983	9.4361	10.5345	12.7707
		[11]	1.8099	4.5537	8.2246	9.4361	10.5344	12.4765
	0.01	Presente	1.9605	5.2046	10.3815	13.6660	15.1985	17.8330
		[11]	1.9567	5.1994	10.2356	13.6649	15.1913	17.1857
0.1	0.01	Presente	2.6661	6.0018	9.7783	10.9750	12.3748	17.1243
		[11]	2.6525	5.9892	9.7685	10.8336	12.3418	17.6070
	0.1	Presente	2.2646	5.0247	7.3776	8.6300	9.1138	12.0519
		[11]	2.2640	5.0240	7.3773	8.5561	9.1127	12.0043

6. EJEMPLOS ANALÍTICOS

En la Tabla 1 se muestra una comparación de los valores de los coeficientes de frecuencia $\Omega_i = \omega_i (l^2 / \pi^2) \sqrt{\rho h / D_{22}}$, $i = 1, \dots, 6$, para una placa cuadrada, ortótropa, simplemente apoyada en todos sus lados y para tres posiciones distintas de la línea de rótulas. l denota la longitud de la placa y h su altura. Los parámetros característicos del material están dados por: relación de Poisson $\mu_{12} = 0,25$, relación de módulos de elasticidad $E_1 / E_2 = 25$, módulos de corte $G_{12} / E_2 = 0,5$; $G_{13} / E_2 = 0,5$; $G_{23} / E_2 = 0,2$. En todos los casos se utilizó un factor de corrección por corte $k = 5 / 6$.

Los valores fueron obtenidos mediante una combinación del método de Ritz y el método de la función de penalidad [15]. Se observa una adecuada concordancia entre los valores numéricos descritos y los proporcionados en la referencia [11], que fueron obtenidos aplicando el método de solución de Levy en combinación con la técnica de descomposición de dominios. El método descrito en la Ref. [11] solo puede ser empleado en placas con dos lados paralelos simplemente apoyados, mientras que la metodología utilizada en el presente trabajo permite considerar condiciones de contorno arbitrarias incluyendo restricciones elásticas.

7. CONSIDERACIONES FINALES

El principio de Hamilton ha sido rigurosamente formulado al definir el espacio de las funciones admisibles D y el de las direcciones admisibles D_a del funcional involucrado. Luego se aplicaron las técnicas del cálculo de variaciones y se demostró que es una formidable herramienta matemática para obtener, a partir de la teoría de placas de primer orden (FSDT), los problemas de contorno que describen el comportamiento estático y dinámico de placas laminadas moderadamente gruesas de forma arbitraria con contornos elásticamente restringidos y con una línea intermedia con rótulas restringidas contra rotación y traslación. Las ecuaciones diferenciales fundamentales que gobiernan los problemas descritos fueron obtenidas dividiendo el dominio de la placa en dos subdominios. Un producto esencial que proporcionó el cálculo de variaciones son las condiciones de contorno y en particular las condiciones de transición, tanto geométricas como naturales.

Además se obtuvieron valores numéricos de los coeficientes de frecuencia de placas cuadradas ortótropas, con líneas de rótulas en distintas posiciones, utilizando una combinación del método de Ritz y el método de la función de penalidad.

AGRADECIMIENTOS

Los autores de este trabajo desean agradecer al Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Salta por el apoyo recibido mediante el Proyecto C.I.U.N.Sa. N° 1899.

REFERENCIAS

- [1] Guelfand, I., Fomin, S., *Calculus of Variations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1963)
- [2] Dym, C., Shames, I., *Solid Mechanics: A Variational Approach*, Mc Graw Hill Book Company (1973)
- [3] Kantorovich, L., Krylov, V., *Solid Mechanics: Approximate Methods of Higher Analysis*, Interscience Publishers New York (1964)
- [4] Weinstock, R., *Calculus of Variations with Applications to Physics and Engineering*, Dover Publications, New York (1974)
- [5] Troutman, J., *Variational Calculus and Optimal Control*. New York, Springer-Verlag (1996)
- [6] Grossi, R., Lebedev, L., "Static and dynamic analyses of anisotropic plates with corner points", *Journal of Sound and Vibration*, **243**, 947-958 (2001)

- [7] Grossi, R., Nallim, L., “Boundary and eigenvalue problems for generally restrained anisotropic plates”, *Journal of Multi-body Dynamics*, **217**, (K), 241-251 (2003)
- [8] Xiang, Y., Reddy, J.N., “Natural vibration of rectangular plates with an internal line hinge using the first order shear deformation plate theory”, *Journal of Sound and Vibration*, **263**, 285–297 (2003)
- [9] Grossi, R., Quintana, V., “Boundary and eigenvalue problems for generally restrained anisotropic plates with internal hinges”, *Proceedings, IV Congreso Internacional de Matemática Aplicada a la Ingeniería y Enseñanza de la Matemática en Ingeniería* (INMAT), Buenos Aires, Argentina (2008)
- [10] Quintana, V., Grossi, R., “Lagrange Multiplier method for the prediction of frequencies in plates with hinges”, *II Congreso de Matemática Aplicada, Computacional e Industrial* (MACI 2009), Rosario, Argentina (2009)
- [11] Huang, M., Ma, X., Sakiyama, T., Matsuda, H., Morita, C., “Natural vibration study on rectangular plates with a line hinge and various boundary conditions”, *Journal of Sound and Vibration*, **322**, 227–240 (2009)
- [12] Gupta, P.R., Reddy, J.N., “Buckling and vibrations of orthotropic plates with an internal line hinge”, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, **2**(1), 457–486 (2002)
- [13] Reddy, J.N., *Mechanics of Laminated Anisotropic Plates: Theory and Analysis*, CRC Press, Boca Raton, Florida (1997)
- [14] Grossi, R., *Cálculo de variaciones: teoría y aplicaciones*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Dsignum, Barcelona, España (2010)
- [15] Reddy, J.N., *Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering*, Mc Graw Hill, New York (1986)

VARIATIONAL TREATMENT OF LAMINATED PLATES WITH AN INTERNAL LINE HINGE USING THE FIRST ORDER THEORY

Abstract – The dynamical behaviour of plates with an arbitrarily located internal line hinge with elastics supports is of technological interest. A line hinge in a plate can be used to facilitate folding of gates or the opening of doors among other applications. A review of the literature has shown that there is only a limited amount of information for the vibration of thick laminated plates with line hinges and boundaries elastically restrained. The aim of this paper is to derive, by using the techniques of the calculus of variation, of the equations of motion and their associated boundary and transition conditions. The study is developed using the first order shear deformation plate theory (FSDT).

Keywords – Plates, Line hinge, Calculus of variations, Boundary values problems.