Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica. Vol. 17, N.º 2, pp. 117-124, 2013

SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE BURGERS' PELO MÉTODO DAS DIFERENÇAS CENTRAIS DE SEXTA-ORDEM

ESTANER CLARO ROMÃO[1], JAIRO APARECIDO MARTINS[2], LUIZ FELIPE MENDES DE MOURA[3]

[1]Universidade Federal de Itajubá
Campus de Itabira
Rua Irmã Ivone Drumond, 200, Distrito Industrial II, CEP – 35903-087, Itabira MG Brasil
[2]Departamento de Engenharia de Produto, Metso Minerals
Av. Independência, 2500, Iporanga, CEP – 18087-101 – Sorocaba SP Brasil
[3]Universidade Estadual de Campinas
Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Térmica e Fluidos
Rua Mendeleyev, 200, Cidade Universitária "Zeferino Vaz", CEP:13083-860 – Campinas SP Brasil

(Recibido 12 de julio de 2012, para publicación 15 de octubre de 2012)

Resumo – Este trabalho tem como objetivo apresentar a aplicação de um esquema de diferenças centrais de O(Δx^6) na solução da equação de Burgers', demonstrando sua eficiência e facilidade de implementação. A partir de comparações com outros métodos propostos por outros autores, demonstra-se que este método é eficiente tão quanto vários outros, porém, de fácil formulação e implementação além de apresentar um baixo custo computacional.

Palavras-chave – Método das Diferenças Finitas, equação de Burgers', Método de Cranck-Nicolson Method, Séries de Taylor.

1. INTRODUÇÃO

Para analisar a eficiência numérica do método das diferenças centrais de O(Δx^6), neste trabalho será proposta como aplicação uma simplificação da equação de Navier-Stokes, também conhecida como equação de Burgers'. Nesta considera-se um gradiente de pressão nulo, em todas as direções, e que o escoamento é tratado apenas na direção x, o que resulta na seguinte expressão:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\upsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

com $u(x,0)=u_0(x)$, $u(0,t)=A(x,t)$ e $u(L_x,t)=B(x,t)$, sendo que υ é a viscosidade cinemática e o domínio computacional dado como $0\le x\le L_x$ e $t>0$.

O objetivo principal deste trabalho é demonstrar que a aplicação do método das diferenças centrais de O(Δx^6) para a discretização dos termos espaciais juntamente com o método de Cranck-Nicolson O(Δx^2) para o termo transiente é tão eficiente quanto vários outros métodos propostos na bibliografia aberta, entre eles pode-se citar [1-5] entre outros, porém, com a vantagem de ser de fácil implementação e de baixo custo computacional.

2. FINITE DIFFERENCE METHOD

Para problemas físicos governados por equações diferenciais parciais, para simulação numérica de tais problemas é necessário um método numérico para aproximar algumas destas derivadas. Neste trabalho, o Método das Diferenças Finitas será utilizado. Considerando uma função $u(x)$ e sua derivada no ponto x,

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} \tag{2}$$

Se $u(x+\Delta x)$ é expandido em séries de Taylor em torno de x, tem-se

$$u(x+\Delta x)=u(x)+\Delta x\frac{\partial u(x)}{\partial x}+\frac{(\Delta x)^2}{2}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2}+\frac{(\Delta x)^3}{3!}\frac{\partial^3 u(x)}{\partial x^3}+\ldots \tag{3}$$

Substituindo a (3) na (2), resulta

$$\frac{u(x+\Delta x)}{\Delta x}=\frac{\partial u(x)}{\partial x}+\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2}+\ldots=\frac{\partial u(x)}{\partial x}+O(\Delta x) \tag{4}$$

que é uma aproximação de primeira ordem, isto é, o erro de truncamento é O(Δx). Escrevendo u em séries de Taylor para i+1 e i–1, tem-se [6],

$$u_{i+1}=u_i+\Delta x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i+\frac{\Delta x^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i+\frac{\Delta x^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i+\frac{\Delta x^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i+\ldots \tag{5}$$

$$u_{i-1}=u_i-\Delta x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i+\frac{\Delta x^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i-\frac{\Delta x^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i+\frac{\Delta x^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i+\ldots \tag{6}$$

Reorganizando a (5), obtém-se a *diferença pra frente*,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i=\frac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x}+O(\Delta x) \tag{7}$$

Similarmente, para a (6), tem-se a *diferença pra trás*,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i=\frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta x}+O(\Delta x) \tag{8}$$

Finalmente, somando-se as (5) e (6), obtém-se a expressão conhecida como *diferença central de segunda ordem de u*,

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i=\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{\Delta x^2}+O(\Delta x^2) \tag{9}$$

Para a diferença central de O(Δx^4), Chung (2002) apresenta a seguinte fórmula,

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i=\frac{-u_{i+2}+16u_{i+1}-30u_i+16u_{i-1}-u_{i-2}}{12\Delta x^2}+O(\Delta x^4) \tag{10}$$

Uma contribuição especial deste trabalho é a construção de uma aproximação de O(Δx^6) para diferenças centrais pelas séries de Taylor. Utilizando a mesma idéia da (5) e (6) para i–2, i–3, i+2 e i+3 tem-se,

$$u_{i-2}=u_i+(-2\Delta x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i+\frac{(-2\Delta x)^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i+\frac{(-2\Delta x)^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i+\ldots \tag{11}$$

$$u_{i-3}=u_i+(-3\Delta x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i+\frac{(-3\Delta x)^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i+\frac{(-3\Delta x)^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i+\ldots \tag{12}$$

$$u_{i+2} = u_i + (2\Delta x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{(2\Delta x)^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + \frac{(2\Delta x)^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i + \frac{(2\Delta x)^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i + \ldots \quad (13)$$

$$u_{i+3} = u_i + (3\Delta x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{(3\Delta x)^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + \frac{(3\Delta x)^3}{3!}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i + \frac{(3\Delta x)^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i + \ldots \quad (14)$$

Pelas (5), (6), (11), (12), (13) e (14) escreve-se a expressão,

$$au_{i+3} + bu_{i+2} + cu_{i+1} + du_i + eu_{i-1} + fu_{i-2} + gu_{i-3} = (a+b+c+d+e+f+g)u_i +$$

$$+\Delta x(3a+2b+c-e-2f-3g)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{2}(9a+4b+c+e+4f+9g)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i +$$

$$+\frac{\Delta x^3}{3!}(27a+8b+c-e-8f-27g)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i + \frac{\Delta x^4}{4!}(81a+16b+c+e+16f+81g)\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i +$$

$$+\frac{\Delta x^5}{5!}(243a+32b+c-e-32f-243g)\left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right)_i + \frac{\Delta x^6}{6!}(729a+64b+c+e+64f+729g)\left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)_i + \ldots (15)$$

Pela (15), estabelece-se uma expressão para a derivada segunda de u a partir do seguinte sistema linear,

$$\begin{cases} a+b+c+d+e+f+g=0 \\ 3a+2b+c-e-2f-3g=0 \\ 9a+4b+c+e+4f+9g=2 \\ 27a+8b+c-e-8f-27g=0 \\ 81a+16b+c+e+16f+81g=0 \\ 243a+32b+c-e-32f-243g=0 \\ 729a+64b+c+e+64f+729g=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1/90 \\ b=-15/100 \\ c=3/2 \\ d=-49/18 \\ e=3/2 \\ f=-15/100 \\ g=1/90 \end{cases}.$$

Resultando, assim a expressão,

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{2u_{i+3} - 27u_{i+2} + 270u_{i+1} - 490u_i + 270u_{i-1} - 27u_{i-2} + 2u_{i-3}}{180\Delta x^2} + O(\Delta x^6) \quad (16)$$

3. FORMULAÇÃO NUMÉRICA

Considerando $\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)$, em outros palavras, $E = \frac{u^2}{2}$ e utilizando o método de Cranck-Nicolson na (1), obtém-se,

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{\upsilon}{2}\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\upsilon}{2}\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} - \frac{\partial E}{\partial x} \Rightarrow \left(-\frac{\upsilon}{2}\right)\frac{\partial^2 u^{n+1}}{\partial x^2} + \left(\frac{1}{\Delta t}\right)u^{n+1} = F$$

onde

$$F = \frac{u^n}{\Delta t} + \frac{\upsilon}{2}\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} - \frac{\partial E}{\partial x}$$

Para a discretização espacial será utilizado o método das diferenças centrais. O sistema linear será construído como segue:

Nó 1 e Nó *NNós* – Condição de contorno em $x = 0$ e $x = 1$, respectivamente. Obs.: *Nnós*: quantidade total de nós na malha.

Nó 2 e Nó *NNós*–1 – Diferença Central O(Δx^2):

$$\left(-\frac{\upsilon}{2\Delta x^2}\right)u_{i-1}^{n+1}+\left(\frac{\upsilon}{\Delta x^2}+\frac{1}{\Delta t}\right)u_i^{n+1}+\left(-\frac{\upsilon}{2\Delta x^2}\right)u_{i+1}^{n+1}=F_i$$

onde

$$F_i=\frac{u_i^n}{\Delta t}+\frac{\upsilon}{2}\left(\frac{u_{i+1}^n-2u_i^n+u_{i-1}^n}{\Delta x^2}\right)-\left(\frac{u_{i+1}^{n,2}-u_{i-1}^{n,2}}{4\Delta x^2}\right)$$

Nó 3 e Nó *NNós*–2 – Diferença Central O(Δx^4):

$$\left(\frac{\upsilon}{24\Delta x^2}\right)u_{i-2}^{n+1}+\left(-\frac{2\upsilon}{3\Delta x^2}\right)u_{i-1}^{n+1}+\left(\frac{5\upsilon}{4\Delta x^2}+\frac{1}{\Delta t}\right)u_i^{n+1}+\left(-\frac{2\upsilon}{3\Delta x^2}\right)u_{i+1}^{n+1}+\left(\frac{\upsilon}{24\Delta x^2}\right)u_{i+2}^{n+1}=F_i$$

onde

$$F_i=\frac{u_i^n}{\Delta t}+\frac{\upsilon}{2}\left(\frac{-u_{i+2}^n+16u_{i+1}^n-30u_i^n+16u_{i-1}^n-u_{i-2}^n}{12\Delta x^2}\right)-\left(\frac{-u_{i+2}^{n,2}+8u_{i+1}^{n,2}-8u_{i-1}^n+u_{i-2}^n}{12\Delta x}\right)$$

Outros Nós – Diferença Central O(Δx^6):

$$\left(-\frac{\upsilon}{180\Delta x^2}\right)u_{i-3}^{n+1}+\left(\frac{3\upsilon}{40\Delta x^2}\right)u_{i-2}^{n+1}+\left(-\frac{3\upsilon}{4\Delta x^2}\right)u_{i-1}^{n+1}+\left(\frac{49\upsilon}{36\Delta x^2}+\frac{1}{\Delta t}\right)u_i^{n+1}+\left(-\frac{3\upsilon}{4\Delta x^2}\right)u_{i+1}^{n+1}+$$

$$\left(\frac{3\upsilon}{40\Delta x^2}\right)u_{i+2}^{n+1}+\left(-\frac{\upsilon}{180\Delta x^2}\right)u_{i+3}^{n+1}=F_i$$

onde

$$F_i=\frac{u_i^n}{\Delta t}+\frac{\upsilon}{2}\left(\frac{2u_{i+3}^{n+1}-27u_{i+2}^n+270u_{i+1}^n-490u_i^n+270u_{i-1}^n-27u_{i-2}^n+2u_{i-3}^n}{180\Delta x^2}\right)$$

$$-\left(\frac{u_{i+3}^{n,2}-9u_{i+2}^{n,2}+45u_{i+1}^{n,2}-45u_{i-1}^{n,2}+9u_{i-2}^{n,2}-u_{i-3}^{n,2}}{120\Delta x}\right)$$

4. APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Para solução do sistema linear que representa o problema proposto, utiliza-se uma rotina chamada DLSLRG da biblioteca Fortran®. Devido à capacidade de memória computacional do computador utilizado, foi possível neste problema trabalho, armazenar os coeficientes em uma matriz cheia. Para análise do erro cometido na solução numérica em comparação com a solução analítica, foi utilizada a norma L_∞, sendo esta definida na forma: $\| e\|_\infty = | u_{num} - u_{an} |_{\max}$, ou seja, a maior diferença em módulo, dentre todos os nós da malha computacional, na comparação da solução analítica com a numérica. Para demonstrar a eficiência desta proposta, a seguir apresentam-se cinco aplicações numéricas.

Aplicação 1 – Nesta aplicação considera-se $\upsilon = 1$ na equação (1) com as seguintes condições de contorno e inicial:

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \text{ e } u(x,0) = \mathrm{sen}(\pi.x)$$

Tabela 1. Resultados numéricos para alguns pontos (υ = 1 e t = 0.1).

x	Dag [7]	Kutluay [8]	Zhu [3]	Xu [5]	Presente	Exacta [5]
	Δt = 0.00001 e Δx = 0.025				Δt = 0.0001 Δx = 0.00625	
0.1	0.10949	0.10959	0.10947	0.10953	0.10953	0.10953
0.2	0.20969	0.20989	0.20965	0.20978	0.20978	0.20979
0.3	0.29175	0.29204	0.29168	0.29189	0.29188	0.29189
0.4	0.34773	0.34809	0.34764	0.34791	0.34791	0.34792
0.5	0.37136	0.37175	0.37125	0.37156	0.37157	0.37157
0.6	0.35881	0.35921	0.35871	0.35903	0.35905	0.35904
0.7	0.30969	0.31004	0.30961	0.30989	0.30991	0.30990
0.8	0.22765	0.22792	0.22759	0.22781	0.22782	0.22781
0.9	0.12060	0.12074	0.12057	0.12068	0.12069	0.12068

Tabela 2. Comparação de resultados numéricos de vários autores e a solução exata.

x	Ali [9]	Dag [7]	Dogan 10]	Xu [5]	Presente	Exacta [5]
	Δx = 0.028				Δx = 1/144	
	Δt = 0.025	Δt = 0.025	Δt = 0.05	Δt = 0.001	Δt = 0.001	
0.056	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.111	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.167	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.222	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.278	0.999	0.999	0.999	0.998	0.998	0.998
0.333	0.985	0.986	0.994	0.980	0.982	0.980
0.389	0.847	0.850	0.848	0.859	0.852	0.847
0.444	0.452	0.448	0.407	0.451	0.451	0.452
0.500	0.238	0.236	0.232	0.237	0.237	0.238
0.556	0.204	0.204	0.204	0.204	0.204	0.204
0.611	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.667	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.722	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.778	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.833	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.889	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.944	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200

Aqui, utilizam-se os trabalhos [3,5,7,8]. Através da tabela 1, nota-se que os resultados do presente trabalho apresenta os melhores resultados, assim como o trabalho [5] que utiliza uma malha menos refinada em Δx, porém utiliza um passo no tempo dez vezes menor, ou seja, enquanto o presente trabalho utiliza-se de 1000 passos no tempo, [5] utiliza-se de 10000 passos (9000 passos no tempo a mais), ocasionando assim um custo computacional consideravelmente maior.

Aplicação 2 – Nesta aplicação considera-se $\upsilon = 0.01$ com condições de contorno $u(0,t) = 1$ e $u(1,t) = 0.2$ e uma condição inicial do tipo $u(x,0) = (1+0.2e^{\eta})/(1+e^{\eta})$, onde $\eta = 40(x-0.125)$.

Nesta aplicação, os trabalhos [5,7,9,10] serviram de comparação dos resultados numéricos deste trabalho, juntamente com a solução analítica. Uma característica importante que pode ser evidenciada na tabela 2, é que o presente trabalho e [5] necessitaram de uma discretização temporal mais refinada para obter bons resultados, enquanto que os outros trabalhos, com um refinamento maior no tempo, os resultados apresentam boa precisão, porém não competitiva com [5] e o presente trabalho. Uma característica importante da união do método de diferenças centrais de O(Δx^6) com o método de Cranck-Nicolson de O(Δx^2) é

Tabela 3. Comparação dos resultados para $\upsilon = 1$.

x	t	Ozis	Hassanien	Presente	Exacta
		Δx = 1/80	Δx = 1/80	Δx = 1/160	
		Δt = 0.00001	Δt = 0.001	Δt = 0.0001	
0.25	0.1	0.26245	0.26148	0.26147	0.26148
	0.15	0.16157	0.16148	0.16147	0.16148
	0.20	0.09948	0.09947	0.09947	0.09947
	0.25	0.06111	0.06109	0.06109	0.06108
0.50	0.1	0.38314	0.38342	0.38342	0.38342
	0.15	0.23394	0.23405	0.23405	0.23406
	0.20	0.14287	0.14289	0.14289	0.14289
	0.25	0.08729	0.08723	0.08723	0.08723
0.75	0.1	0.28004	0.28157	0.28158	0.28157
	0.15	0.16948	0.16974	0.16974	0.16974
	0.20	010261	0.10265	0.10266	0.10266
	0.25	0.06230	0.06229	0.06229	0.06229

Tabela 4. Comparação dos resultados para $\upsilon = 0.1$.

x	t	Ozis [11]	Hassanien [1]	Presente	Exacta [1]
		Δx = 1/80	Δx = 1/80	Δx = 1/160	
		Δt = 0.00001	Δt = 0.001	Δt = 0.0001	
0.25	0.4	0.32679	0.31752	0.31751	0.31752
	0.6	0.25117	0.24614	0.24613	0.24614
	0.8	0.20270	0.19955	0.19955	0.19956
	1.0	0.16780	0.16559	0.16559	0.16560
0.50	0.4	0.59661	0.58454	0.58453	0.58454
	0.6	0.46581	0.45798	0.45797	0.45798
	0.8	0.37293	0.36740	0.36740	0.36740
	1.0	0.30253	0.29834	0.29834	0.29834
0.75	0.4	0.64680	0.64562	0.64566	0.64562
	0.6	0.50852	0.50268	0.50272	0.50568
	0.8	0.39117	0.38534	0.38537	0.38534
	1.0	0.30066	0.29586	0.29588	0.29586

a necessidade de um passo de tempo mais bem refinado, em contrapartida, graças a alta ordem de precisão do método de discretização espacial, isso nem sempre é necessário.

Aplicação 3 – Aqui, será utilizados os valores $\upsilon = 1$ (tabela 3) e $\upsilon = 0.1$ (tabela 4) para a viscosidade cinemática na equação (1). Com relação às condições de contorno e inicial tem-se,

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \ \text{e} \ u(x,0) = 4x(1-x)$$

Como trabalhos para comparação, nesta aplicação utilizou-se [1,11]. A tabela 3 mostra que o presente trabalho alcança bons resultados quando comparados com os outros dois trabalhos e com a solução exata. É importante ressaltar que o passo de tempo utilizado foi intermediário quando comparado com os outros, onde [1] já obtém bons resultados com um Δt = 0.001 enquanto que [11] necessita de um passo de tempo Δt = 0.00001. Neste trabalho foi utilizado um passo de tempo Δt = 0.0001.

Aplicação 4 – Para $\upsilon = 1$ na (1), nesta aplicação as condições de contorno e inicial estão de acordo com a seguinte solução analítica,

$$u(x,t) = \frac{2sinx}{\cos x + e^t}$$

cujo domínio computacional é $0 \le x \le 1$ e $0 \le t \le 1$.

Tabela 5. Norma L_∞ para $\Delta x = 1/100$.

Δt	1/20	1/40	1/80	1/160	1/320	1/640
Wang and Layton [4]	2.00×10^{-5}	4.14×10^{-6}	1.06×10^{-5}	3.16×10^{-5}	6.91×10^{-5}	1.42×10^{-4}
Presente	8.16×10^{-4}	4.24×10^{-4}	2.28×10^{-4}	1.30×10^{-4}	8.26×10^{-5}	5.98×10^{-5}

Tabela 6. Norma L_∞ para $\Delta t = 1/1000$.

Δx	1/5	1/10	1/20	1/40	1/80
Wang and Layton [4]	6.12×10^{-2}	1.10×10^{-2}	1.63×10^{-3}	2.24×10^{-4}	2.93×10^{-5}
Presente	1.17×10^{-2}	3.76×10^{-3}	1.06×10^{-3}	2.88×10^{-4}	7.67×10^{-5}

Nesta aplicação uma comparação com os resultados numéricos apresentados por [4] é realizada. Na tabela 5 fixa-se $\Delta x = 1/100$ e variam-se valores de Δt demonstrando que no presente trabalho o refinamento do passo de tempo melhora constantemente os resultados, enquanto que em [4] o mesmo não ocorre. Agora na tabela 6, fixa $\Delta t = 1/1000$ e variam-se valores de Δx e os resultados numéricos dos dois trabalhos mostram resultados que melhoram para cada Δx na mesma ordem de precisão.

Application 5 – Para esta aplicação a equação governante é da forma, $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e para análise de erro será utilizada a seguinte solução analítica para comparações,

$$u(x,t) = \frac{2x}{1+2t}$$

cujo domínio computacional é $0 \le x \le 1$ e $0 \le t \le 1$ com as condições de contorno e inicial estando de acordo com a solução analítica [12].

Os resultados numéricos apresentados na tabela 7 demonstram para um caso onde as condições de contorno dependem do tempo e do espaço, o método proposto apresenta excelentes resultados, encontrando no menor refinamento de Δx e Δt uma ordem de precisão em torno de 10^{-6}.

5. CONCLUSÕES

Antes de qualquer coisa, é importante mencionar que o objetivo deste trabalho não foi de apresentar um método que fosse melhor ou pior que qualquer outro dentre os trabalhos aqui citados. Aqui, apresentou-se um esquema de alta ordem de diferenças centrais para a discretização espacial unido com um método de Cranck-Nicolson de segunda-ordem de fácil formulação e implementação. A utilização do método de Cranck-Nicolson da maneira que foi utilizado apresenta a facilidade de apenas necessitar da condição inicial para o início dos cálculos, lembrando que alguns métodos de alta ordem necessitariam de mais de um passo de tempo, o que dificultaria um pouco os cálculos. A utilização de um esquema de diferenças centrais de sexta-ordem possibilita a utilização de uma malha espacial pouco refinada, gerando assim um sistema matricial de pequena ordem e acelerando assim os cálculos, ressaltando que neste trabalho utilizou-se um armazenamento em matriz cheia por se tratar de um problema 1D, em problemas 2D ou 3D, o autor principal deste trabalho normalmente utiliza-se de armazenamento em vetores que contenham apenas os coeficientes não nulos [13] do sistema matricial possibilitando assim um grande refinamento da malha computacional. Como proposta para trabalhos futuros, será aplicado este esquema na equação de Burgers' 2D para analisar a eficiência do método em domínios mais complexos e se aproximando assim de problemas práticos da engenharia e da física.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho é apoiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq – Brasil (Proc. 500382/2011-5).

REFERÊNCIAS

[1] Hassanien, I.A., Salama, A.A., Hosham, H.A., "Fourth-order finite difference method for solving Burges' equation", *Appl. Math. Comput*. **170**, 781-800 (2005)

[2] Liao, W., "An implicit fourth-order compact finite difference scheme for one-dimensional Burgers' equation", *Appl. Math. Comput.,* **206**, 755-764 (2008)

[3] Zhu, C.C., Wang, R.H., "Numerical solution of Burgers' equation by cubic B-spline quasi-interpolation", *Appl. Math. Comput*., **208**, 260-272 (2009)

[4] Wang, J., Layton, A., "New numerical methods for Burgers' equation based on semi-Lagrangian and modified equation approaches", *Appl. Num. Math*., **60**, 645-657 (2010)

[5] Xu, M., Wang, R.H., Zhang, J.H., Fang, Q., "A novel numerical scheme for solving Burgers's equation", *Appl. Math. Comput.,* **217**, 4473-4482 (2011)

[6] Chung, T.J., *Computational Fluid Dynamics*, Cambridge University Press (2002)

[7] Dag, I., Irk, D., Saka, B., "A numerical solution of the Burgers' equation using cubic B-Splines", *Appl. Math. Comput*., **163**, 199–211 (2005)

[8] Kutluay, S., Bahadır, A.R., Özdes, A., "Numerical solution of one-dimensional Burgers' equation: explicit and exact-explicit finite difference method", *J. Comput. Appl. Math*., **103**, 251–261 (1999)

[9] Ali, A.H.A., Gardner, L.R.T., Gardner, G.A., "A collocation method of Burgers's equation using cubic splines", *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng*. **100**, 325-337 (1992)

[10] Dogan, A., "A Galerkin finite element approach to Burgers' equation", *Appl. Math. Comput*., **157**, 331-346 (2004)

[11] Ozis, T., Aksan, E.N., Ozdes, A., "A finite element approach for solution of Burgers's equation", *Appl. Math. Comput*., **139,** 417-428 (2003)

[12] Gorguis, A., "A comparison between Cole–Hopf transformation and the decomposition method for solving Burgers' equations", *Appl. Math. Comput*., **173**, 126-136 (2006)

[13] Romão, E.C., Campos, M.D., Moura, L.F.M., "Application of the Galerkin and Least-Squares Finite Element Methods in the solution of 3D Poisson and Helmholtz equations", *Comput. Math. Appl*., **62,** 4288-4299 (2011)

A NUMERICAL SOLUTION OF THE BURGERS' EQUATION USING SIXTH-ORDER CENTRAL FINITE DIFFERENCE

Abstract – This paper aims to present the application of a scheme of central finite differences O (Dx6) to solve the Burgers´ equation, showing its efficiency and easiness for application. The paper starts with the comparisons with other methods proposed by other authors, and reveals that the method proposed is such efficient as the others; however, bringing advantages of easy implementation and reduced computational costs.

Keywords – Central Difference Method, Burgers' equation, Cranck-Nicolson Method, Taylor series.