



## APLICAÇÃO DO ALGORITMO ERA DIRETAMENTE A DADOS NO DOMÍNIO DO TEMPO UTILIZANDO PSEUDO-ENTRADAS

MÁRIO FRANCISCO MUCHERONI, ANDRÉA CARDOSO

Departamento de Engenharia Mecânica

Universidade de São Paulo

Avenida do Trabalhador Sancarlense, 400 13560-970 São Carlos/SP, Brasil

e-mail: mariofm@sc.usp.br

**Resumo:** Os parâmetros modais de um sistema dinâmico simulado de quatro graus de liberdade são identificados pelo algoritmo ERA utilizando os Parâmetros de Markov obtidos diretamente dos dados no domínio do tempo. Forças aleatórias excitam este sistema simulado. Um método para avaliação da ordem modelo e para obtenção do tamanho ótimo da matriz Hankel foi utilizado para melhorar a precisão e a eficiência da identificação modal quando a entrada é considerada um ruído branco. Para estudar o problema da obtenção dos parâmetros modais de estruturas em condições reais de operação foi realizada a identificação utilizando entradas ligeiramente diferentes daquelas aplicadas ao sistema. Para tanto foi necessário a aplicação da transformada wavelet para compressão das informações tornando possível uma identificação completa incluindo as baixas freqüências e facilitando a realização de uma análise estatística que possibilite a seleção da melhor ordem do sistema e a automação do processo. Os resultados obtidos foram validados pela comparação com os parâmetros teóricos do sistema.

### 1. INTRODUÇÃO

Um dos principais temas da Análise Modal Experimental é a identificação de sistemas, cujo objetivo é construir um modelo matemático para sistemas dinâmicos a partir dos dados de excitação e resposta. Em 1984, num trabalho pioneiro, Ewins [1] organizou e descreveu os métodos de identificação modal mais significativos na época; em 1997 Maia [2] deu continuidade a este trabalho de classificação e compilamento. Atualmente, o desenvolvimento de métodos no domínio do tempo tem obtido sucesso principalmente na identificação de sistemas com alta densidade modal; particularmente os métodos 4SID (Subspace-based State-Space System Identification) fornecem modelos em espaço de estado confiáveis para sistemas multivariáveis, Viberg [3].

O ensaio modal com múltiplas excitações é, muitas vezes, recomendado pois apresenta resultados mais realistas, embora o custo para sua realização seja alto. Frequentemente ensaiá-se a estrutura em laboratório com um único ponto de excitação, ou seja, sob condições de contorno diferentes daquelas a que está sujeita em situações reais de operação. Tal procedimento geralmente compromete os resultados da identificação. A solução para o problema é a realização de ensaios com a estrutura em trabalho. Nesse caso o sistema é multi-excitado e estas forças não são totalmente conhecidas. Em geral, sob certas condições de trabalho, estes dados de entrada podem ser aproximados por um ruído branco [4]. Portanto o desenvolvimento de métodos que estudem o comportamento dinâmico de sistemas excitados por forças aleatórias torna-se importante.

O Algoritmo de Realização de Sistemas (ERA), desenvolvido por Juang&Pappa [5], apresenta vantagens na análise de estruturas grandes e exíveis. O algoritmo teoricamente encontra o modelo de menor ordem que se ajusta aos dados, dada uma precisão, além de ser um método eficaz na análise de dados de estruturas com freqüências próximas, com ou sem ruído nos dados.

Especificamente, quando é difícil, senão impossível, obter a medida do sinal de excitação, o algoritmo ERA aplicado diretamente aos dados no domínio do tempo, com o auxílio da transformada wavelet, obteve

sucesso na extração dos parâmetros modais. Isto pode ser realizado utilizando a resposta do sistema juntamente com entradas fictícias denominadas pseudo-entradas. Tais entradas devem satisfazer determinadas características relacionadas às condições de contorno do problema.

Neste caso, é necessário o processamento de grande número de dados principalmente para identificar as baixas freqüências. A transformada wavelet foi de fundamental importância no processo de identificação pois possibilitou a compressão das informações melhorando a eficiência e o tempo de processamento.

O algoritmo ERA utiliza a resposta do sistema numa forma especial, denominada Parâmetros de Markov. Freqüentemente estes parâmetros são obtidos a partir de dados experimentais utilizando a Função de Resposta em Freqüência (FRF). No entanto, a obtenção dos parâmetros de Markov a partir de dados diretamente no domínio do tempo pode ser realizada em condições experimentais mais favoráveis e assim evitar os erros numéricos devido à aplicação da transformada inversa de Fourier.

Para realizar a identificação sem calcular as FRFs, Juang [6] desenvolveu um método para estimar os Parâmetros de Markov a partir dos dados no tempo de entrada e saída do sistema. No presente trabalho este método é aplicado para minimizar o erro, possibilitando a identificação a partir dos dados de resposta da estrutura e de uma estimativa da entrada. Com esse objetivo é realizado um estudo sobre a influência de determinados parâmetros na identificação de sistemas dinâmicos e na determinação da ordem do modelo.

É apresentada uma nova proposta de identificação que alia eficiência do algoritmo ERA ao poder de compressão de dados da transformada wavelet, sem perda de informações no domínio do tempo, para resolver o problema da extração dos parâmetros modais utilizando pseudo-entradas.

A técnica foi aplicada à um sistema simulado de quatro graus de liberdade excitado por forças aleatórias não correlacionadas, com matriz de amortecimento não-proporcional, a fim de construir um modelo em espaço de estado dessa estrutura. O modelo identificado é uma representação do sistema real e pode ser utilizado tanto para avaliar as freqüências naturais e fatores de amortecimento modal, como para predizer a resposta do sistema quando este for excitado por diferentes forças.

## 2. PARÂMETROS DE MARKOV OBSERVADOS

### 2.1. Representação de sistemas em Espaço de Estado

A representação em *espaço de estado* em análise modal é bem conhecida. Com o intuito de estabelecer uma notação conveniente, é dada uma breve descrição dos principais parâmetros e equações. Ensaios de vibração são, freqüentemente, realizados com o objetivo de estimar os parâmetros modais da estrutura em teste e utilizá-los na análise do seu comportamento dinâmico. O comportamento de muitos sistemas dinâmicos pode ser expresso através de equações diferenciais ordinárias. Um sistema mecânico típico, linear e invariante no tempo, com  $n$  graus de liberdade pode ser caracterizado pela seguinte equação diferencial vetorial de segunda ordem, denominada *Equação de Movimento*:

$$M\ddot{w}(t) + Z\dot{w}(t) + Kw(t) = f(t)$$

onde  $t$  representa o tempo contínuo,  $M, Z, K \in \mathbb{R}^{n \times n}$  são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez respectivamente,  $f(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  é o vetor de força ou excitação, e  $w(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  é o vetor deslocamento. Observe que o vetor força pode ser fatorado em  $f(t) = Uu(t)$ , onde  $U \in \mathbb{R}^{n \times r}$  descreve as  $r$  entradas no espaço e  $u(t) \in \mathbb{R}^{r \times 1}$  no tempo.

Apesar da equação de movimento representar muito bem o comportamento da estrutura, tal representação não é muito utilizada nos métodos de identificação, basicamente porque é mais conveniente expressar o comportamento do sistema através de equações diferenciais de primeira ordem do que através

de uma única equação diferencial vetorial de segunda ordem. As equações de primeira ordem podem também ser representadas por uma única equação de primeira ordem vetorial em termos das chamadas variáveis de estado do sistema. Esta representação apresenta vantagens na resolução numérica do problema.

O sistema descrito pela equação (1) é equivalente ao seguinte modelo em espaço de estado em tempo contínuo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \hat{A}x(t) + \hat{B}u(t) \\ y(t) = \hat{C}x(t) + \hat{D}u(t) \end{cases}$$

onde

$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}Z \end{bmatrix}_{2n \times 2n}$  é a matriz de estado;

$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}U \end{bmatrix}_{2n \times r}$  é a matriz de influência de entrada;

$\hat{C} = \begin{bmatrix} -LM^{-1}K & -LM^{-1}Z \end{bmatrix}_{m \times 2n}$  é a matriz de influência de saída;

$\hat{D} = \begin{bmatrix} LM^{-1}U \end{bmatrix}_{m \times r}$  é a matriz de transmissão direta;

$x(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix}$  é o vetor de estado;

e  $L$  é uma matriz que contém informações sobre a localização dos pontos de medida em relação às variáveis nas coordenadas generalizadas.

Em casos especiais as variáveis de estado podem ser consideradas como saída do sistema. Entretanto, na prática é impossível observar as variáveis de estado diretamente, por motivos de inacessibilidade. Neste caso somente um conjunto de  $m$  variáveis de saída  $y \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ , dependentes de  $x(t)$  e de  $u(t)$ , pode ser medido e invariavelmente  $m \leq n$ . No presente trabalho  $y(t)$  é a medida da aceleração do sistema em pontos específicos da estrutura no instante  $t$ .

Por motivos de ordem prática, nos concentraremos na situação onde as variáveis são medidas somente em intervalos discretos de tempo em vez de serem medidas continuamente, produzindo assim o que denominaremos *sistemas discretos*. Suponhamos que as variáveis estejam definidas em intervalos fixos de tempo

$$t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, k\Delta t, (k+1)\Delta t, \dots$$

onde  $\Delta t$  é constante.

Assim obtém-se uma aproximação do sistema contínuo, denominada modelo em espaço de estado em tempo discreto, dada por

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k + Du_k \end{cases}$$

onde  $x_k = x(k\Delta t)$ ;  $A = e^{\hat{A}\Delta t}$ ;  $B = (A - I)\hat{A}^{-1}\hat{B}$ ;  $\hat{C} = C$  e  $\hat{D} = D$

## 2.2. Parâmetros de Markov

Neste trabalho o Algoritmo de Realização de Sistemas (ERA) será utilizado para estimar os parâmetros modais de uma estrutura. Este algoritmo utiliza os dados de resposta numa forma especial, denominada Parâmetros de Markov.

Resolvendo a equação (3) para  $y_k$ , obtém-se uma relação direta entre entrada e saída

$$y_k = CA^k x_0 + Du_k + \sum_{i=0}^k CA^{i-1} Bu_{k-i}$$

Sejam  $P_0 = D$  e  $P_i = CA^{i-1}B$ . Obtém-se, então, a partir da equação (4)

$$y_k = CA^k x_0 + \sum_{i=0}^k P_i u_{k-i}$$

Como o sistema é considerado estável, pode-se admitir que a matriz de estado  $A$  é assintoticamente estável; então existe um inteiro  $p$  suficientemente grande tal que  $A^k \rightarrow 0$ , para todo  $k \geq p$ . Considere a equação de saída após  $p$  instantes de tempo

$$y_{k+p} = Cx_{k+p} + Du_{k+p}$$

Procedendo exatamente como para as equação (3), obtém-se a seguinte relação entrada-saída:

$$\begin{aligned} y_{k+p} &= CA^p x_k + CA^{p-1} Bu_k + \dots + CBu_{k+p-1} + Du_{k+p} \\ &= CA^p x_k + \sum_{i=0}^p P_i u_{k+p-i} \end{aligned}$$

Considerando que  $A^k \rightarrow 0$  quando  $k \geq p$  e como os vetores de estado observados

$$X = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{l-p-1} \end{bmatrix}$$

são limitados, o efeito residual  $CA^p x_k$  na equação (7) pode ser desprezado.

Assim, desde que seja desprezado um número suficiente de pontos no início do sinal de saída, a relação dada pela equação (4) pode ser escrita na seguinte forma condensada

$$y_k = \sum_{i=0}^k P_i u_{k-i}$$

Portanto a saída em qualquer instante pode ser escrita como soma das entradas passadas e presentes, ponderadas por uma seqüência de matrizes  $P_k \in \mathbb{R}^{m \times r}$ , conhecidas como *Parâmetros de Markov*. Tsunaki [7] mostra que os parâmetros de Markov são, de fato, respostas ao impulso. Desta forma, fornecem uma completa caracterização do sistema e podem ser utilizados como base para a identificação do modelo matemático de sistemas dinâmicos lineares.

Freqüentemente os Parâmetros de Markov são obtidos a partir de dados experimentais usando a Função de Resposta em Freqüência. No entanto tal procedimento introduz erros numéricos nos dados quando se realiza o cálculo da Transformada Inversa de Fourier, além de apresentar dificuldades quanto à realização de impulsos ideais como entrada. Uma alternativa é calcular os parâmetros diretamente no domínio do tempo a partir dos dados de entrada e de saída do sistema.

Para tanto, sejam conhecidos um número  $l$  de intervalos de tempo dos sinais de entrada e saída, isto é,  $k = 0, 1, \dots, l-1$ . Assim a relação entrada-saída dada pela equação (9) pode ser reescrita na forma matricial

$$Y = PU$$

onde

$$Y = \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_{l-1} \end{bmatrix}_{m \times l}$$

$$P = \begin{bmatrix} D & CB & CAB & \dots & CA^{l-2}B \end{bmatrix}_{m \times rl}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & \dots & u_{l-1} \\ 0 & u_0 & u_1 & \dots & u_{l-2} \\ 0 & 0 & u_0 & \dots & u_{l-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_0 \end{bmatrix}_{rl \times l}$$

Como observado anteriormente, a condição de estabilidade do sistema garante a existência de um inteiro  $p$  suficientemente grande tal que  $A^k \rightarrow 0$ , para todo  $k \geq p$ . Desta forma os parâmetros de Markov podem ser obtidos pela expressão:

$$P = YU^+$$

onde  $U^+$  é a pseudo-inversa de  $U$  e  $U$  representa a submatriz formada pelas  $r(p+1)$  primeiras linhas da matriz definida na equação (10).

Os  $p$  primeiros parâmetros de Markov são determinados pela equação (11). Claramente, quanto maior  $p$  melhor será a aproximação.

O método, tal como está formulado, apresenta uma grande desvantagem. Para estruturas pouco amortecidas o número  $p$  necessário é excessivamente grande, dificultando assim o cálculo de  $U^+$ . Para resolver o problema Juang [6] recorreu à uma técnica muito utilizada em controle, introduziu um observador  $G \in \mathbb{R}^{2n \times m}$  na equação de estado, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ &= Ax_k + Bu_k + Gy_k - Gy_k \\ &= (A + GC)x_k + (B + GD)u_k - Gy_k \\ &= \bar{A}x_k + \bar{B}v_k \end{aligned}$$

Assim a nova representação do sistema é dado por:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \bar{A}x_k + \bar{B}v_k \\ y_{k+p} = \bar{C}x_{k+p} + \bar{D}v_{k+p} \end{cases}$$

onde  $\bar{A} = A + GC$ ;  $\bar{B} = [B + GD \quad -G]$ ;  $\bar{C} = C$ ;  $\bar{D} = D$ ; e  $v_k = \begin{bmatrix} u_k \\ y_k \end{bmatrix}$

Resolvendo a equação (13) exatamente como foi feito na equação (3), obtém-se a seguinte relação entrada-saída:

$$y_{k+p} = \bar{C}\bar{A}^p x_k + \bar{C}\bar{A}^{p-1}\bar{B}v_k + \dots + \bar{C}\bar{B}v_{k+p-1} + Du_{k+p}$$

Esta relação pode ser convenientemente escrita na forma matricial:

$$\bar{Y} = C\bar{A}^p \bar{x}_k + \bar{P}\bar{V}$$

onde

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} y_p & y_{p+1} & \dots & y_{l-1} \end{bmatrix}_{m \times (l-p)}$$

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{l-p-1} \end{bmatrix}_{2n \times (l-p)}$$

$$\bar{p} = \begin{bmatrix} D & C\bar{B} & C\bar{A}\bar{B} & \dots & C\bar{A}^{p-1}\bar{B} \end{bmatrix}$$

$$\bar{V} = \begin{bmatrix} u_p & u_{p+1} & \dots & u_{l-1} \\ v_{p-1} & v_p & \dots & v_{l-2} \\ v_{p-2} & v_{p-1} & \dots & v_{l-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_0 & v_1 & \dots & v_{l-p-1} \end{bmatrix}_{(r+(m+r)p) \times (l-p)}$$

Os parâmetros de Markov associados à equação (13), definidos por

$$\bar{P}_0 = D$$

$$\bar{P}_i = C\bar{A}^{i-1}\bar{B}$$

são chamados *Parâmetros de Markov Observados*.

A liberdade introduzida pelo observador  $G$  permite tornar a equação (12) de observação tão estável quanto se queira. Assim dado um inteiro  $p$  é possível encontrar uma matriz  $G$  tal que o sistema descrito pela equação (13) estabilize após  $p$  intervalos de tempo. Existe um limite inferior para a escolha de  $p$  relacionado com a ordem do modelo e com o número de saídas consideradas. Mais explicitamente,  $p$  representa o número de Parâmetros de Markov independentes. Assim para realizar  $A$  é necessário que  $p$  seja escolhido tal que  $mp \geq 2n$ .

Descartando um número suficiente de pontos do início dos sinais de entrada e de saída, os parâmetros de Markov observados podem ser obtidos através da expressão:

$$\bar{P} = \bar{Y}\bar{V}^+$$

Facilmente se constata que quanto maior for  $p$  menor será o erro. Tomando  $p$  convenientemente grande para dados com altos níveis de ruído, o algoritmo ERA se encarregará de reduzir a ordem estimada do modelo. Cada um dos parâmetros de Markov observados pode ser particionado da seguinte forma:

$$\bar{P}_k = \begin{bmatrix} \bar{P}_k^{(1)} & \bar{P}_k^{(2)} \end{bmatrix}, \text{ para } k = 1, 2, 3, \dots \quad (17)$$

onde

$$\bar{P}_k^{(1)} = C\bar{A}^{k-1}(B + GD) \in \mathbb{R}^{m \times r}$$

$$\bar{P}_k^{(2)} = C\bar{A}^{k-1}G \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

Finalmente, os parâmetros de Markov podem ser calculados diretamente dos dados no domínio do tempo, a partir de  $\bar{P}_k^{(1)}$  e  $\bar{P}_k^{(2)}$  da seguinte maneira:

$$P_k = \bar{P}_k^{(1)} - \sum_{i=1}^k \bar{P}_i^{(2)} P_{k-i}, \text{ para } k = 1, \dots, p$$

$$P_k = - \sum_{i=1}^k \bar{P}_i^{(2)} P_{k-i}, \text{ para } k > p$$

### 3. ESTIMATIVA DA ORDEM DO MODELO

No início do processo de identificação, a ordem do modelo não é conhecida. De acordo com Juang [8], um processo de tentativa e erro é exigido para encontrar a melhor ordem. Em geral, a ordem estimada é consideravelmente maior que a ordem real do modelo, particularmente quando o nível de ruído presente no sinal é alto. Neste caso diz-se que o modelo é sobredeterminado.

Para extrair os parâmetros modais de uma estrutura, o algoritmo ERA utiliza como base de cálculo uma matriz Hankel específica, denotada por  $H_0$ , composta pelos parâmetros de Markov [6]. Na próxima seção é proposto um método para estimar a ordem do modelo a partir da análise do posto de  $H_0$ . No entanto, para o caso onde as entradas são desconhecidas o método falha e é preciso recorrer a outras ferramentas, conforme discutido a seguir.

O resultado obtido na identificação utilizando um modelo sobredeterminado é um conjunto de modos estruturais, devido à dinâmica da estrutura, e modos computacionais, devido principalmente ao ruído presente no sinal e ao mal-condicionamento numérico.

O fato do ruído ser não correlacionado com os dados de entrada e saída do sistema garante que os modos computacionais tendem a variar acentuadamente de uma estimativa para outra, enquanto os modos estruturais tendem a estabilizar a partir de certos valores. Numerosos experimentos com diferentes estimativas de ordem do modelo confirmaram tal tendência. Portanto uma alternativa ao «método de tentativa e erro» é aplicar o algoritmo de identificação consecutivamente para valores positivos  $p$  incrementados de 2 tomados até um limite pré-determinado, vinculando  $q = \frac{p}{2}$ .

### 4. A TRANSFORMADA WAVELET

A transformada de Fourier (FT) não permite uma análise local do conteúdo de freqüência do sinal; por outro lado, a transformada de Fourier de tempo curto (STFT) permite esta análise. No entanto, a STFT pode não ser adequada para a análise de determinados sinais, tendo em vista que o tamanho da janela de observação permanece constante para todas as freqüências.

Em vista deste problema uma melhor alternativa é a transformada em Wavelets (WT), introduzida por Morlet (Goupillaud, Grossman and Morlet, 1985), na qual o tamanho da janela varia com a freqüência. A WT possibilita que componentes de alta freqüência sejam analisados com maior resolução temporal, ao passo que os de baixa freqüência com maior resolução no domínio de Fourier. Assim, para altas freqüências as wavelets são transladas por passos pequenos, enquanto que para freqüências baixas a translação é feita com passos maiores (Vetterli and Kovacevic, 1995).

Em virtude da grande quantidade de dados necessários para realizar a identificação dos parâmetros modais de estruturas em condições reais de operação, somente é possível obter todos os modos com grau de confiabilidade satisfatório realizando a identificação em etapas, divididas por faixas de freqüências. Isto é feito, principalmente devido à dificuldade em identificar as freqüências mais baixas.

Assim, a WT foi fundamental para a viabilidade da identificação visto que possibilitou a compressão das informações, contidas em uma longa seqüência de dados, em seqüências menores de acordo com a

faixa de freqüência analisada. Neste trabalho, foi utilizada a wavelet-mãe db5, nível 3, 2 e 1 para decomposições nas faixas de freqüências baixas, médias e altas, respectivamente.

## 5. SIMULAÇÃO E RESULTADOS

Os dados simulados foram gerados de forma a representar um sistema de quatro graus de liberdade, ilustrado na Fig. 1. O modelo escolhido possui matriz de amortecimento não proporcional a fim de proporcionar uma análise mais geral para a identificação de sistemas com amortecimento viscoso linear.

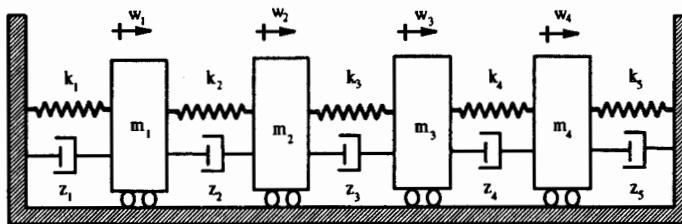


Fig. 1. Modelo de quatro graus de liberdade.

A Tabela 1 apresenta os parâmetros físicos e as características modais do sistema simulado, onde  $M$  é o módulo do autovalor  $\lambda$  e  $\varphi$  é o ângulo de fase.

Tabela 1. Parâmetros físicos e parâmetros modais teóricos.

i	$m_i$ (kg)	$z_i$ (N.s/m)	$k_i$ (N/m)	$\lambda_i$ (rad/s)	$M_i$	$\cos\varphi_i$
1	1	8	1000	-0.5472+15.39i	15.40	0.0355
2	5	4	8000	-3.520 + 95.25i	95.31	0.0369
3	0.5	4	8000	-5.079+104.3i	104.4	0.0486
4	0.25	2	2000	-8.053+154.5i	154.7	0.0520
5		0.2	1000			

Forças aleatórias não correlacionadas foram aplicadas em cada uma das massas. Isto deve corresponder à situação onde a entrada não pode ser medida mas apenas aproximada por um ruído branco. Registrhou-se 501 pontos no domínio do tempo em intervalos de 0.001 segundos.

A imprecisão computacional e as imperfeições nos instrumentos de medida das respostas são possíveis fontes de ruído. Para simular uma situação real, um ruído branco adicional foi gerado e acrescentado aos dados de resposta. Três níveis de ruído foram considerados 1%, 5% e 10%.

A análise do número de colunas independentes da matriz Hankel  $H_0$  é importante na determinação da ordem do modelo. Conforme mostra a análise da Fig. 2, o posto de  $H_0$  estabiliza a partir de determinado valor do parâmetro  $p$ , definido anteriormente. No caso em estudo a estabilização ocorre quando o posto de  $H_0$  é 8, para os diferentes níveis de ruído. Portanto a ordem estimada do modelo é  $N = 8$ .

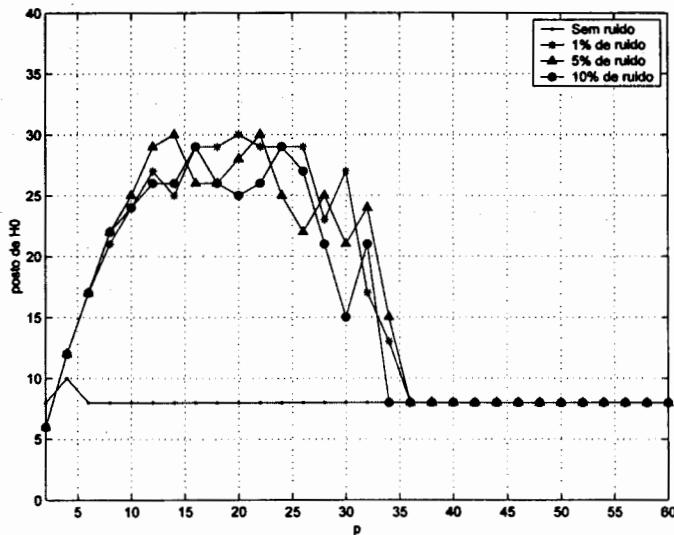


Fig. 2. Estimativa da ordem do modelo.

A estabilização do posto da matriz  $H_0$  também fornece informações sobre valor de  $p$  mais adequado para realizar a identificação com os diferentes níveis de ruído. Para dados livres de ruído tem-se que  $posto(H_0) = 8$ , para todo  $p \geq 6$ .

A identificação com  $p = 8$  é apresentada na Tabela 2, onde  $\epsilon$  é a diferença porcentual entre os parâmetros modais identificados e os parâmetros do modelo teórico. Para dados livres de ruído e com entrada conhecida a identificação obteve sucesso pois apresentou diferenças porcentuais não significativas.

A Tabela 3 apresenta o resultado da identificação com  $p = 36$  para dados corrompidos por 1% e 5% de ruído, e com  $p = 34$  para dados com 10% de ruído. O nível de ruído é definido por  $(RMS\ do\ ruído)/(RMS\ da\ resposta)$ , onde o RMS da resposta é o maior RMS dentre os quatro sinais de saída.

O alto índice na diferença porcentual dos parâmetros do terceiro modo, observado na Tabela 3, deve-se principalmente à proximidade entre este e o segundo modo.

Tabela 2. Resultado da identificação em dados simulados livres de ruído.

Modelo Teórico			Modelo Identificado			(%)	
Autovalor	M	$\cos\varphi$	Autovalor	M	$\cos\varphi$	M	$\cos\varphi$
-0.55+15.39i	15.4049	0.0355	-0.56+15.39i	15.4041	0.0364	0.0051	2.4147
-3.52+95.25i	95.3155	0.0369	-3.57+95.24i	95.3061	0.0375	0.0099	1.5095
-5.08+104.31i	104.4313	0.0486	-5.22+104.31i	104.4456	0.0500	0.0137	2.7791
-8.05+154.56i	154.7671	0.0520	-8.14+154.55i	154.7691	0.0526	0.0013	1.1430

Tabela 3. Diferença porcentual  $\epsilon$  da identificação em dados simulados.

Modos	1% de ruído			5% de ruído			10% de ruído		
	M	$\cos\varphi$	Modo	M	$\cos\varphi$	Modo	M	$\cos\varphi$	Modo
1°	0.0051	2.4147	0.2325	0.0051	2.4147	1.8570	0.0051	2.4147	2.9616
2°	0.0099	1.5095	1.1859	0.0099	1.5095	1.6252	0.0099	1.5095	7.5148
3°	0.0137	2.7791	3.0047	0.0137	2.7791	13.9542	0.0137	2.7791	26.5698
4°	0.0013	1.1430	0.3866	0.0013	1.1430	1.3862	0.0013	1.1430	4.3323

Nos casos onde nem todas as saídas são medidas, o método também apresentou resultados satisfatórios. Foram realizados testes com 1 e com 2 pontos de saída.

Na identificação onde as entradas são conhecidas, foram utilizados dois índices de confiança, para qualificar os parâmetros modais identificados: Colinearidade de Fase Modal Ponderada (MPCW) e Coerência da Amplitude Modal Estendida (EMAC).

Para valores de  $p$  superiores aos limites  $p = 6$ ,  $p = 36$  e  $p = 34$ , correspondentes aos dados com os diferentes níveis de ruído, a identificação não apresenta melhora significativa. No entanto, se a verdadeira entrada for substituída por outra ligeiramente distinta, isto é, se uma pseudo-entrada for utilizada no processo de identificação, uma longa seqüência de instantes de tempo deve ser observada. Além disso, o parâmetro  $p$  cresce consideravelmente.

Neste caso, registrou-se dados durante 60 segundos discretizados em intervalos de 0.001 segundos. O valor de  $p$  mais adequado para realizar a identificação, de acordo com cada faixa de freqüência, foi determinado pela análise da estabilização dos modos estruturais.

As figuras Fig. 3, Fig. 4 e Fig. 5 apresentam os valores das freqüências naturais para diversas identificações com  $p$  variando de 10 a 120 para dados livres de ruído com diferentes níveis de WT db5.

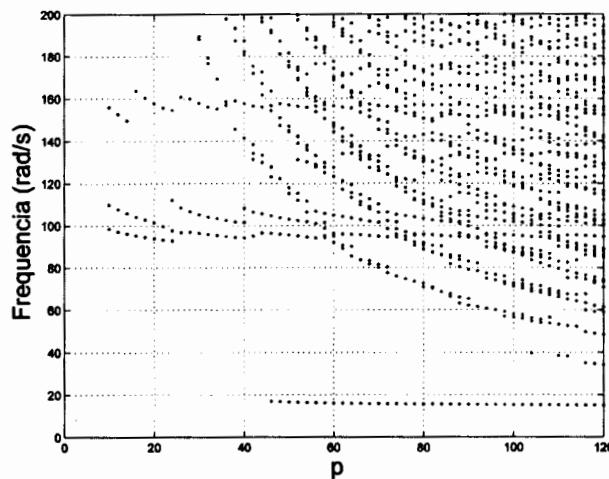


Fig. 3. Estabilidade das baixas freqüências utilizando db5 nível 3.

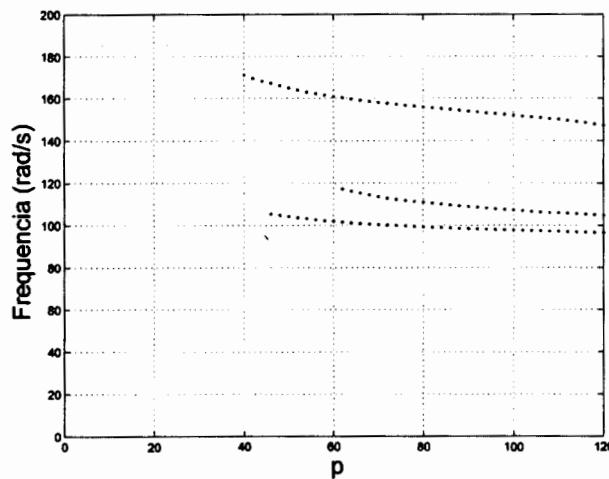


Fig. 4. Estabilidade das freqüências intermediárias utilizando db5 nível 2.

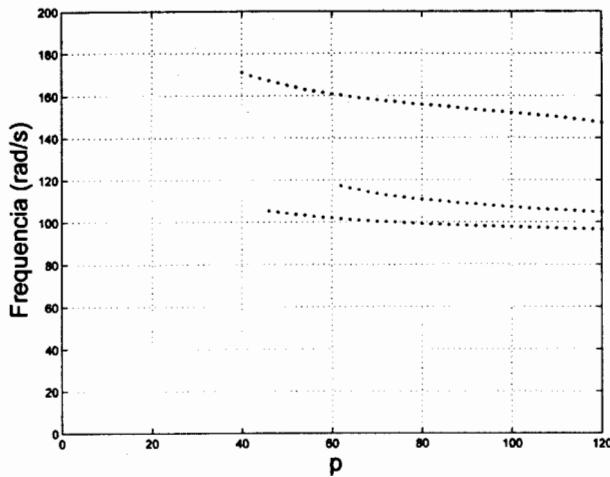


Fig. 5. Estabilidade das altas freqüências utilizando db5 nível 1.

O resultado da identificação para dados livres de ruído é apresentado na Tabela 4. Neste caso os resultados apresentados para freqüências naturais e fatores de amortecimento modais foram obtidos calculando-se a média aritmética dos parâmetros previamente selecionados de acordo com uma análise estatística realizada com base na estabilidade dos parâmetros dos modos estruturais.

Tabela 4. Resultado da identificação utilizando pseudo-entradas.

Modelo Identificado		(%)	
M	cos	M	cos
15.6853	0.0334	1.8200	5.9450
95.1392	0.0345	0.1849	6.5956
104.0096	0.0425	0.4038	12.7179
151.9604	0.0339	1.8135	34.9239

As freqüências naturais identificadas apresentaram diferenças porcentuais ( $\epsilon$ ), relativas às freqüências naturais teóricas, satisfatórias. As diferenças porcentuais dos fatores de amortecimento correspondentes aos dois primeiros modos também foram identificados com alto grau de confiabilidade enquanto aqueles correspondentes ao terceiro e quarto modo não seguiram a mesma tendência. Tal fato, deve-se principalmente ao sistema considerado com baixo amortecimento, onde pequenas diferenças absolutas representam grandes diferenças porcentuais.

## 6. CONCLUSÕES

O método utilizado para estimar a ordem do modelo e os valores ótimos do parâmetro  $p$  contribuiu para o sucesso na identificação através do algoritmo ERA com os parâmetros de Markov calculados a partir de dados de entrada e saída diretamente no domínio do tempo.

A utilização de pseudo-entradas tornou possível a identificação sem o conhecimento da excitação do sistema e os parâmetros modais foram identificados grupo a grupo para compor a identificação completa. A aplicação da transformada wavelet foi fundamental para a identificação de todos os parâmetros modais na faixa de freqüência analisada.

O problema importante da estimativa da ordem do modelo na análise modal operacional foi solucionado com o auxílio da análise estatística. Assim os parâmetros modais identificados foram qualificados satisfatoriamente sem a necessidade de implementação dos tradicionais índices de confiança.

A eficácia da nova implementação foi comprovada pelo sucesso na seleção da ordem e pela boa estimativa dos parâmetros modais de um sistema simulado. É importante observar o sucesso obtido na identificação de um sistema que apresenta baixo amortecimento, autovalores próximos e baixas freqüências.

Conclui-se ainda que a técnica é uma boa escolha para análise de dados quando o tempo de observação deve ser necessariamente longo.

Novas investigações devem ser realizadas no sentido de melhorar a eficácia do método na identificação dos fatores de amortecimento e de aplicar o método para dados reais de estruturas em operação. Esforços também devem ser feitos no sentido de estudar os efeitos de não-linearidades nos resultados.

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho contou com o apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

## REFERÊNCIAS

- [1] D.J. Ewins, *Modal Testing: Theory and Practice*, John Wiley & Sons, 1984.
- [2] N.M.M. Maia et al, *Experimental Modal Analysis*. John Wiley & Sons, Chichester, 1997.
- [3] M. Viberg, «Subspace-Based Methods for the Identification of linear time-invariant systems», *Automatica* 31, No.12, pp. 1835-1851, 1995.
- [4] M.J. Desforges, J.E. Cooper e J.R. Wright, «Spectral and Modal Parameter Estimation from Output-only Measurements», *Mechanical Systems and Signal Processing* 9, No. 2, 169-186, 1995.
- [5] J. Juang e R.S. Pappa, «An Eigensystem Realization Algorithm for Modal Parameter Identification and Model Reduction», *Journal of Guidance* 8, No. 5, 620-627, 1985.
- [6] J. Juang, *Applied system identification*. Prentice Hall, New Jersey, 1994.
- [7] R.H. Tsunaki, «Identificação Automatizada de Modelos Dinâmicos no Espaço de Estado», *Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo*, São Carlos, 1999.
- [8] J. Juang e M. Phan, «Linear System Identification via Backward-Time Observer Models», *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 17, No. 3, 505-512, 1994.
- [9] P. Goupillard, A. Grossman e J. Murlet, «Cycle-octave and Related Transforms in Seismic Signal Analisys». *Geoexploration*, No 23, 85-102, 1985.

## EIGENSYSTEM REALIZATION ALGORITHM APPLIED DIRECTLY TO TIME-DOMAIN DATA USING SIMULATED INPUTS

**Abstract:** The modal parameters of a simulated four degrees of freedom dynamic system are identified by ERA algorithm using Markov Parameters obtained straightly from the time data. Random forces excite this simulated system. A method for evaluation the model order and for obtaining optimized size of the Hankel matrix was employed to improve the accuracy and the efficiency of modal identification when the inputs are taken as white noise. To study the problem of modal parameters extraction in structures under operational conditions, a identification process was carried out using inputs lightly different than those applied to the system. For this it was necessary the application of Wavelet Transform (WT) for compression of the information making possible a complete identification including the low frequencies. Also this transform facilitates the application of a statistical analysis for selection of the best system order and for process automation. The results obtained were validated by comparison with the theoretical parameters of the system.