

## ANÁLISIS TENSIONAL POR ELEMENTOS FINITOS DE ENGRANAJES RECTOS CON GEOMETRÍA MODIFICADA

ALFONSO FUENTES AZNAR\*, IGNACIO GONZÁLEZ PÉREZ

Universidad Politécnica de Cartagena  
Departamento de Ingeniería Mecánica  
Campus Universitario Muralla del Mar  
C/ Doctor Fleming, s/n - 30202 Cartagena, España

**Resumen:** Se presenta el análisis tensional de tres tipos de geometría de transmisiones de engranajes rectos: (i) de perfil de evolvente, (ii) de geometría modificada basada en la utilización de un piñón con doble abombamiento y (iii) de perfiles asimétricos con geometría modificada basada también en la utilización de un piñón con doble abombamiento. Se propone la generación automática de los modelos de elementos finitos. Se investiga la formación del contacto y se determinan las tensiones de contacto y flexión en transmisiones de engranajes rectos de perfil de evolvente y de geometría modificada cuando existen errores de alineación y se comparan los resultados. Se analizan además las ventajas o desventajas del uso de perfiles asimétricos para la reducción de las tensiones de contacto y flexión en transmisiones de engranajes rectos.

### 1. INTRODUCCIÓN

Los engranajes rectos de perfil de evolvente tienen una gran aplicación en la industria debido a sus numerosas ventajas: (i) las herramientas de corte y rectificado se pueden generar con gran precisión, (ii) se pueden utilizar coeficientes de desplazamiento para variar fácilmente el espesor del diente, evitar apuntamiento y penetración, y proporcionar una transmisión satisfactoria a distancias entre centros no nominales, y (iii) el cambio de la distancia entre centros de diseño no produce errores de transmisión.

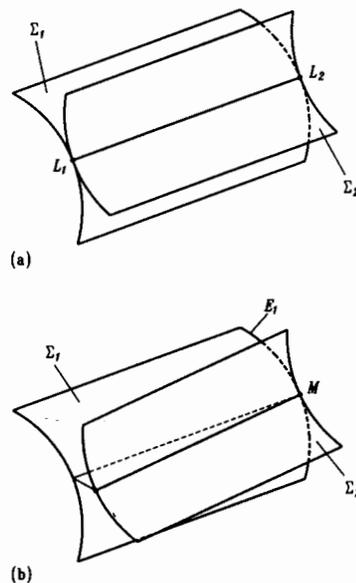


Fig. 1. Superficies de dientes de engranajes cilíndricos rectos en: (a) contacto lineal y (b) contacto en el borde.

\* Autor para correspondencia: Alfonso Fuentes Aznar. Universidad Politécnica de Cartagena. Departamento de Ingeniería Mecánica. Campus Universitario Muralla del Mar. C/ Doctor Fleming, s/n - 30202 Cartagena, España. Tel: +34 968 326432; Fax: +34 968 326449 E-mail: alfonso.fuentes@upct.es

Las transmisiones de engranajes rectos presentan teóricamente contacto lineal. Sin embargo, el contacto real entre superficies conjugadas ante la presencia de errores de alineación deja de ser lineal para convertirse en un contacto puntual en los bordes de las superficies. En la Figura 1 se muestra la influencia del error angular responsable de que los ejes de piñón y rueda se crucen. Como consecuencia de este error de alineación, las superficies  $\Sigma_1$  del piñón y  $\Sigma_2$  de la rueda dejan de contactar a lo largo de la línea  $L_1 L_2$  (Fig. 1(a)) y el contacto se desplaza al punto M en el borde  $E_1$  (Fig. 1(b)). La acción entre  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  deja entonces de ser conjugada. Por tanto, la relación entre los ángulos de giro del piñón  $\phi_1$  y de la rueda  $\phi_2$  difiere de la teórica

$$\phi_2 = \frac{N_1}{N_2} \phi_1 \quad (1)$$

siendo  $N_1$  y  $N_2$  los números de dientes de piñón y rueda respectivamente. El error de transmisión suele cuantificarse como la diferencia del ángulo de giro de la rueda y el valor teórico que le correspondería de existir acción conjugada. Cuando aparecen errores de alineación, la función de errores de transmisión es una función discontinua en diente de sierra como se muestra en la Figura 2(b) y por tanto el ruido y la vibración en la transmisión resultan inevitables, como se demuestra en [1]. Por otro lado, la trayectoria de contacto tendrá lugar a lo largo del borde  $E_1$ , según se muestra en la Fig. 2(a), por lo que es de esperar un aumento considerable de las tensiones de contacto.

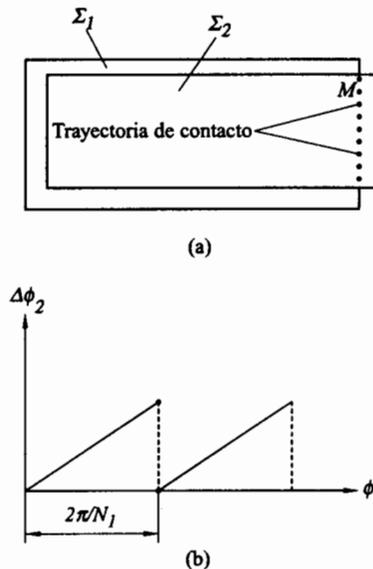


Fig. 2. (a) Trayectoria de contacto y (b) errores de transmisión en una transmisión de engranajes cilíndricos rectos con contacto en el borde.

Para evitar estos problemas, es preciso realizar una modificación de la geometría de la transmisión, proporcionando al menos a una de las superficies de contacto un doble abombamiento en la dirección longitudinal y del perfil, según se ha propuesto en [2, 3, 4, 5]. El abombamiento longitudinal en engranajes rectos permite localizar el contacto mediante la sustitución del contacto lineal por el contacto puntual entre superficies. El abombamiento en la dirección del perfil permitirá el prediseño de una función parabólica de errores de transmisión para absorber las funciones cuasilineales y discontinuas de errores de transmisión producidas por los errores de alineación.

En este trabajo se aplica el método de los elementos finitos para el análisis tensional de transmisiones de engranajes rectos tanto de perfil de evolvente de diseño tradicional como de nuevas transmisiones mejoradas de engranajes rectos de geometría modificada.

Los objetivos de la investigación desarrollada son los siguientes:

- (i) Desarrollo de un algoritmo para la construcción parametrizada y totalmente automática de los modelos de elementos finitos de transmisiones de engranajes rectos.
- (ii) Comparación de los estados tensionales en transmisiones de engranajes rectos de perfil de evolvente y de geometría modificada frente a errores de alineación.
- (iii) Estudio de la utilización de perfiles asimétricos para la reducción de tensiones propuesta recientemente por Kapelevich [6] y Litvin et al. [7].

## 2. ENGRANAJES RECTOS DE GEOMETRÍA MODIFICADA

La modificación de la geometría en engranajes rectos está encaminada a conseguir el doble abombamiento de sus superficies.

En engranajes rectos, el abombamiento longitudinal es el responsable de la localización del contacto en la parte central de la superficie del diente y el abombamiento en la dirección del perfil permitirá prediseñar una función parabólica de errores de transmisión. El diseño de transmisiones avanzadas de engranajes rectos de bajo nivel de ruido y vibración así como contacto localizado, exige la aplicación simultánea de ambos abombamientos. La aplicación del abombado longitudinal sin considerar el abombado en la dirección del perfil permitirá cambiar el contacto lineal por puntual y localizar el contacto frente a posibles errores de alineación o fabricación. Sin embargo, ante la presencia de éstos, la función de errores de transmisión sería discontinua y por tanto habría que esperar altos niveles de ruido y vibración en la transmisión.

En la Figura 3 se muestra el disco de corte o rectificando utilizado para conseguir el doble

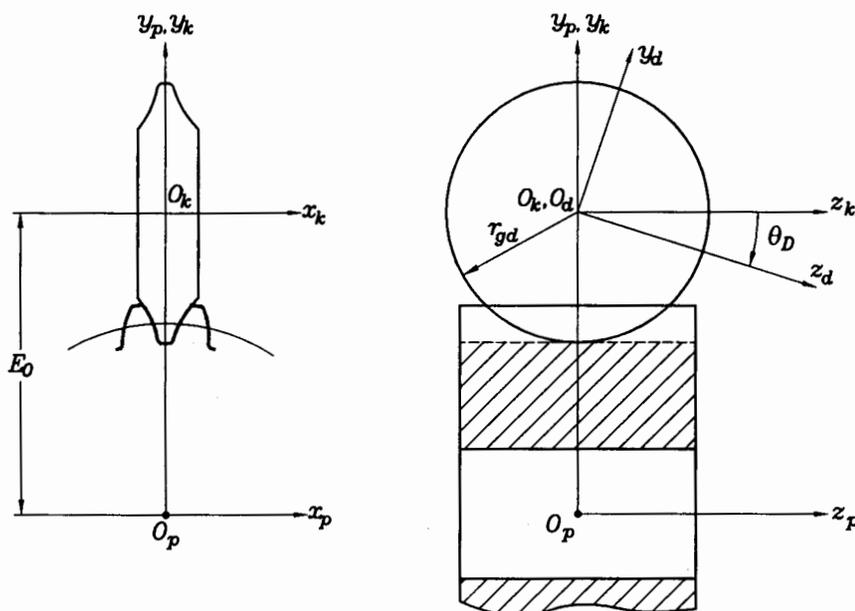


Fig. 3. Aplicación de un disco de corte o rectificando para la modificación de la geometría de un engranaje recto.

abombamiento de las superficies del piñón. La sección axial de éste corresponde a la de la superficie  $\Sigma_p$  de un piñón de referencia generado a partir de una cremallera con perfil parabólico de coeficiente  $a_c$  [8]. Dicho coeficiente es el responsable del abombamiento en la dirección del perfil de la superficie  $\Sigma_1$  del piñón definitivo respecto a un engranaje convencional. En cuanto al abombamiento en la dirección longitudinal del piñón, es necesario dotar al disco de un movimiento con trayectoria longitudinal parabólica de coeficiente  $a_{pl}$  durante la generación de la superficie del piñón doblemente abombada  $\Sigma_1$ , según se muestra en la Figura 4. La generación de un engranaje recto de perfil de evolvente de geometría tradicional se obtiene considerando el coeficiente del perfil parabólico de la cremallera de referencia,  $a_c$ , y el coeficiente de la trayectoria longitudinal parabólica del disco de rectificando,  $a_{pl}$ , iguales a cero.

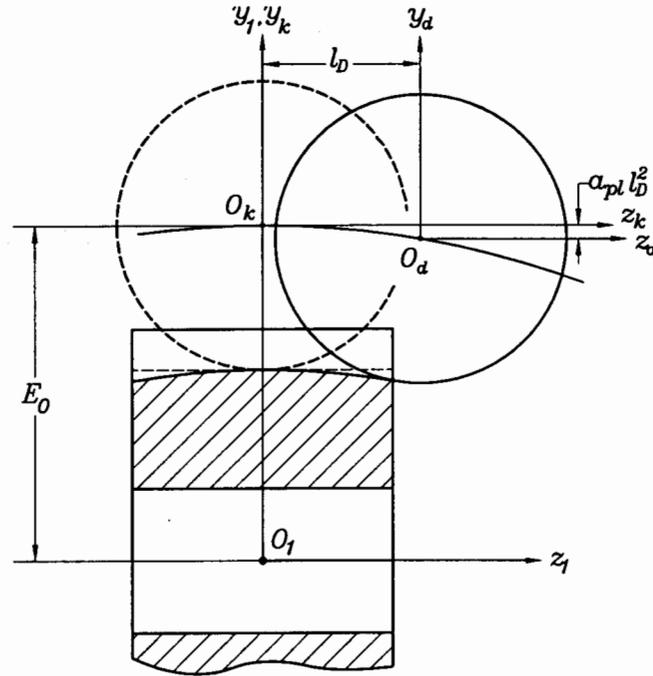


Fig. 4. Definición de la trayectoria longitudinal parabólica del disco de rectificado para el abombado longitudinal de las superficies del piñón.

Normalmente, el engranaje que se modifica es el piñón por ser el de menor número de dientes. En [8] se presenta en detalle la generación del piñón con abombamiento en dirección del perfil a partir de la cremallera de referencia. La superficie del piñón se determina como la envolvente de la familia de superficies de la cremallera con perfiles parabólicos en el sistema de coordenadas ligado al piñón. La familia de superficies de la cremallera en el sistema de referencia  $S_p(x_p, y_p, z_p)$  ligado al piñón viene dada por

$$r_p(u_d, \theta_d, \phi_p) = M_{pt}(\phi_p) r_t(u_d, \theta_d) \quad (2)$$

donde  $(u_d, \theta_d)$  son los parámetros gaussianos de la superficie de la cremallera  $\Sigma_t$  definida por  $r_t(u_d, \theta_d)$ ,  $M_{pt}$  es la matriz de transformación del sistema de la cremallera  $S_t(x_t, y_t, z_t)$  al sistema  $S_p(x_p, y_p, z_p)$  ligado al piñón y  $\phi_p$  es el parámetro de generación que relaciona el movimiento de la cremallera y del piñón en el proceso de generación. La superficie del piñón se obtiene considerando simultáneamente la Ecuación (2) y la correspondiente ecuación de engrane [1]

$$f(u_d, \theta_d, \phi_p) = n_t \cdot v_t^{(p)} = 0 \quad (3)$$

siendo  $n_t$  la normal unitaria de la superficie de la cremallera en el sistema  $S_t(x_t, y_t, z_t)$  ligado a la misma y  $v_t^{(p)}$  la velocidad de deslizamiento entre la superficie de la cremallera y el piñón en el sistema de coordenadas  $S_p$ . El piñón así obtenido presenta abombamiento en la dirección del perfil y sirve de referencia para obtener el disco de rectificado según se indica en [8].

La geometría del disco de rectificado se obtiene a partir de la sección central del piñón (Figura 3). El abombamiento longitudinal se consigue utilizando una trayectoria longitudinal parabólica para el disco en el proceso de rectificado [8].

La geometría de la rueda corresponde a la de un engranaje tradicional de perfil de evolvente. La generación de la rueda a partir de su correspondiente cremallera es similar a la del piñón de referencia. No obstante, con el fin de considerar posibles errores de paralelismo en la fabricación, el sistema asociado a la cremallera que genera la rueda se considera decalado un cierto ángulo  $\Delta\lambda$  [8].

Evidentemente, piñón y rueda dejan de ser conjugados e inducen errores de transmisión así como contacto puntual aún cuando la transmisión no presenta desalineaciones (véase [8]). Sin embargo, dichos errores se prediseñan con un valor limitado y son capaces de absorber las funciones cuasilineales de errores de transmisión producidas por errores de alineación o fabricación, limitando además el desplazamiento del contacto cuando éstos aparecen.

Además del error de fabricación  $\Delta\lambda$ , se consideran los siguientes errores de alineación:

(i)  $\Delta E$  para simular el error en la distancia entre centros, (ii)  $\Delta\gamma$ , para simular el error angular responsable de que los ejes de piñón y rueda se corten, (iii)  $\Delta\gamma_h$  para simular el error angular responsable de que los ejes de piñón y rueda se crucen [8].

### 3. GENERACIÓN DEL MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

El modelo de la transmisión para el análisis por elementos finitos se genera automáticamente mediante un programa de ordenador desarrollado para el diseño, generación, análisis del contacto, y análisis tensional por elementos finitos de transmisiones por engranajes rectos.

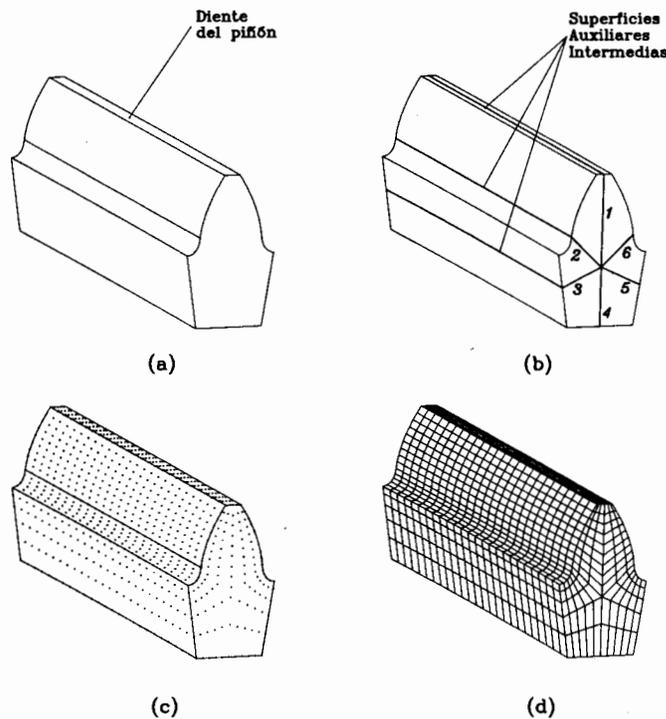


Fig. 5. Ilustración de: (a) volumen del diente a modelizar, (b) superficies auxiliares intermedias, (c) determinación de los nodos, y (d) discretización del volumen por elementos finitos.

La generación del modelo de elementos finitos se realiza siguiendo los siguientes pasos:

- Paso 1.* Se determina el modelo geométrico del diente a partir de las ecuaciones de las superficies que lo conforman. La Figura 5(a) muestra el volumen a modelizar correspondiente a un diente del piñón.
- Paso 2.* El volumen a modelizar de cada diente es dividido en seis subvolúmenes utilizando las superficies intermedias auxiliares 1 a 6 según se observa en la Figura 5(b).
- Paso 3.* Se determinan analíticamente las coordenadas de los nodos en función del número de elementos previamente definidos en las direcciones longitudinal y del perfil del diente (Figura 5(c)).
- Paso 4.* Se discretiza cada uno de los seis subvolúmenes en elementos finitos utilizando los nodos determinados en el paso anterior (Figura 5(d)).

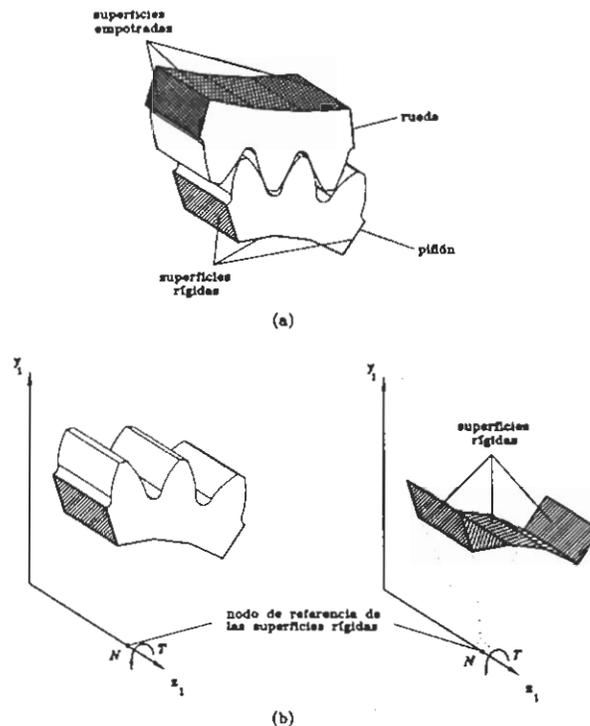


Fig. 6. Ilustración esquemática de: (a) condiciones de contorno de piñón y rueda, y (b) superficies rígidas para la aplicación de las condiciones de contorno en el piñón.

**Paso 5.** Las condiciones de contorno (véase Figura 6 para el caso de un modelo de tres dientes) se establecen conforme a las siguientes ideas:

- (i) Se fijan los nodos a ambos lados y en la parte inferior de la base de la rueda, es decir, se restringen sus seis grados de libertad.
- (ii) Se define una superficie rígida formada por los nodos de ambos lados y en la parte inferior de la base del piñón.
- (iii) Se define además el nodo  $N$  en el eje del piñón como punto de referencia de la superficie rígida. El nodo de referencia  $N$  y la superficie rígida constituyen un cuerpo rígido.
- (iv) Se establece como único grado de libertad del nodo  $N$  el giro en torno al eje del piñón, estando los restantes cinco grados de libertad restringidos a cero. La aplicación de un par  $T$  según el grado de libertad libre del nodo  $N$  permite transmitir dicho par al modelo del piñón a través de la superficie rígida.

**Paso 6.** El algoritmo de contacto del programa de análisis por elementos finitos utilizado [10] requiere la definición de las superficies de contacto. El procedimiento de construcción del modelo permite identificar automáticamente todos los elementos necesarios para la formación de dichas superficies.

Las principales características del modelo así construido son las siguientes:

- El modelo de elementos finitos se puede determinar automáticamente para cualquier posición del piñón y de la rueda obtenida a través del análisis del contacto o TCA [8]. La convergencia está asegurada porque al menos existe un punto de contacto entre las superficies.
- La suposición de la distribución de la carga sobre la superficie del diente no es necesaria dado que el algoritmo de contacto del programa de análisis por elementos finitos [10] permite obtener el área de contacto y las tensiones de contacto y flexión a partir de la aplicación de un par torsor en el eje de giro del piñón mientras la rueda se mantiene fija. El modelo de elementos finitos considerado tiene en

cuenta las superficies reales de piñón y rueda en contacto en un determinado punto como resultado de la aplicación del análisis del contacto (TCA).

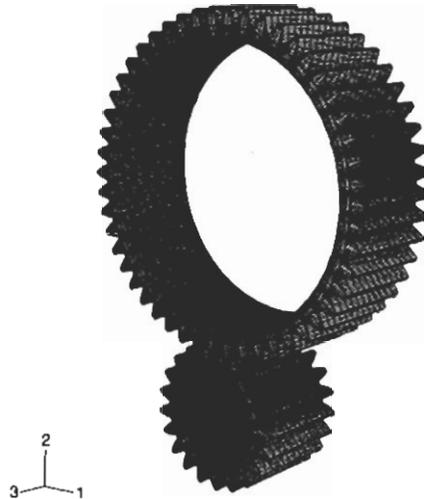


Fig. 7. Modelo de elementos finitos de una transmisión completa de engranajes rectos.

- Se pueden obtener modelos de elementos finitos con cualquier número de dientes. Por ejemplo, la Figura 7 muestra el modelo de elementos finitos de la transmisión completa. Modelos de tres o cinco pares de dientes son más adecuados dada la capacidad de los ordenadores utilizados para el análisis tensional. En la Figura 8 se muestra el modelo de elementos finitos de tres pares de dientes utilizado para el análisis tensional.

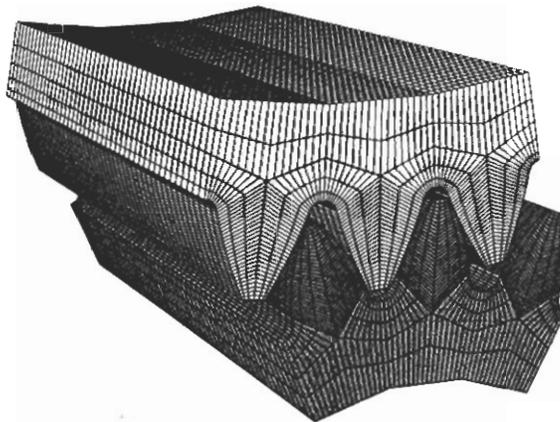


Fig. 8. Modelo de elementos finitos de tres pares de dientes.

El uso de modelos de elementos finitos de varios pares de dientes tiene las siguientes ventajas:

- (i) Las condiciones de contorno referentes a restricciones en los movimientos están lo suficientemente alejadas de las zonas donde están aplicadas las cargas.
- (ii) Debido a la elasticidad de las superficies de las dentaduras de los engranajes pueden existir varias parejas de dientes en contacto al mismo tiempo. Por tanto, es posible estudiar el reparto de carga entre parejas de dientes en contacto simultáneo.

#### 4. ANÁLISIS TENSIONAL

El análisis tensional por el método de los elementos finitos y el estudio sobre la formación del contacto se ha llevado a cabo para los siguientes tres tipos de geometría:

- (i) Piñón y rueda de perfil de evolvente. El contacto entre sus superficies es lineal.
- (ii) Piñón con geometría modificada por disco de corte o rectificadas para conseguir el doble abombamiento de sus superficies y rueda de perfil de evolvente. El contacto se ha localizado mediante el abombamiento longitudinal y se ha prediseñado una función parabólica de errores de transmisión mediante el abombado en la dirección del perfil.
- (iii) Piñón de perfiles asimétricos con geometría modificada por disco de corte y rectificadas para conseguir el doble abombamiento de sus superficies y rueda de perfil de evolvente. Se consideran perfiles asimétricos para el estudio de la posibilidad de reducción de tensiones como se ha propuesto en [6] y [7].

Los objetivos del análisis tensional de los tres tipos de geometría presentados anteriormente son los siguientes:

- (a) Estudio de la formación del contacto y comparación de los estados tensionales en transmisiones de engranajes rectos de perfil de evolvente y de geometría modificada frente a la presencia de errores de alineación.
- (b) Estudio de la utilización de perfiles asimétricos en transmisiones de engranajes rectos para la reducción de tensiones.

El análisis tensional está basado en el método de los elementos finitos [9] y en la aplicación de un programa de análisis por elementos finitos de uso general [10].

Tabla 1. Factores de diseño.

Número de dientes del piñón, $N_1$	21
Número de dientes de la rueda, $N_2$	50
Módulo, $m$	4.0 mm
Ancho de cara	60.0 mm
Radio de disco	60.0 mm
Coefficiente parabólico para el abombado del perfil <sup>1</sup> , $a_c$	0.0 mm <sup>-1</sup>
Coefficiente parabólico para el abombado longitudinal <sup>1</sup> , $a_{pl}$	0.0 mm <sup>-1</sup>
Ángulo de presión en el lado conductor <sup>1</sup> , $\alpha_d$	25°
Ángulo de presión en el lado conducido <sup>1</sup> , $\alpha_c$	25°
Coefficiente parabólico para el abombado del perfil <sup>2</sup> , $a_c$	0.0005 mm <sup>-1</sup>
Coefficiente parabólico para el abombado longitudinal <sup>2</sup> , $a_{pl}$	0.00015 mm <sup>-1</sup>
Ángulo de presión en el lado conductor <sup>2</sup> , $\alpha_d$	25°
Ángulo de presión en el lado conducido <sup>2</sup> , $\alpha_c$	25°
Coefficiente parabólico para el abombado del perfil <sup>3</sup> , $a_c$	0.0003438 <sup>(a)</sup> 0.000802 <sup>(b)</sup> mm <sup>-1</sup>
Coefficiente parabólico para el abombado longitudinal <sup>3</sup> , $a_{pl}$	0.00015 mm <sup>-1</sup>
Ángulo de presión en el lado conductor <sup>3</sup> , $\alpha_d$	30° <sup>(a)</sup> 20° <sup>(b)</sup>
Ángulo de presión en el lado conducido <sup>3</sup> , $\alpha_c$	20° <sup>(a)</sup> 30° <sup>(b)</sup>

La Tabla 1 muestra los datos de diseño que se han utilizado para la generación de los tres tipos de geometría de engranajes rectos considerados en este trabajo. El análisis del contacto (TCA) permite seleccionar cualquier punto sobre la trayectoria de contacto para construir el modelo de elementos finitos

<sup>1</sup> Geometría de perfil de evolvente.

<sup>2</sup> Geometría con doble abombamiento.

<sup>3</sup> Geometría con doble abombamiento y perfiles asimétricos con ángulo de presión mayor en el lado (a) conductor y (b) conducido

de la transmisión. La generación automática de los modelos de elementos finitos permite analizar cuantos puntos se quieran sobre la trayectoria de contacto para estudiar la evolución de las tensiones de contacto y flexión tanto en el piñón como en la rueda durante un ciclo de engrane.

La construcción del modelo de elementos finitos se realiza según el procedimiento explicado en el apartado anterior. Dicho modelo corresponde a un modelo de carga cuasiestático en el que se desprecian efectos dinámicos. Las razones de utilización de tal modelo son las siguientes:

- (i) La formación del contacto, es decir, la localización y la orientación de las elipses de contacto, es independiente de las velocidades de giro de los engranajes.
- (ii) Es de esperar que los efectos dinámicos produzcan un aumento de las tensiones con respecto a los valores que proporciona el modelo cuasiestático. Sin embargo, dichos efectos tienen su principal fuente en los errores de transmisión, como se demuestra en [11] y [12]. Por tanto, se ha de considerar que los resultados cuantitativos que se obtienen con el modelo cuasiestático se van a ver afectados por el tipo de función de errores de transmisión y por el nivel de error de transmisión. Esta es la razón por la que a la hora de comparar, por ejemplo, los perfiles asimétricos con geometría modificada, se considera el mismo nivel de error de transmisión de forma que se puede considerar que los resultados cualitativos son independientes de los efectos dinámicos.
- (iii) Las transmisiones con geometría de perfil de evolvente presentan una función de errores de transmisión discontinua cuando se tienen errores de alineación, y ésta es la causa principal de que la transferencia del engrane tenga lugar con un fuerte impacto entre las superficies en contacto. Por tanto, el modelo cuasiestático permite comparar las diferentes geometrías en el caso más favorable para la geometría existente y, aun así, el contacto en el borde arroja siempre valores tensionales mayores como se demuestra más adelante.

Se han considerado modelos de elementos finitos formados por tres pares de dientes (Fig. 8). Los elementos utilizados son del tipo C3D8I [10] de primer orden mejorados mediante modos de deformación incompatibles para mejorar su comportamiento a flexión.

El número total de elementos considerados es de 25662 con 31876 nodos. El material utilizado para el piñón y rueda es acero con módulo de elasticidad  $E = 2.068 \cdot 10^5$  MPa y un coeficiente de Poisson  $\nu = 0.29$ . En todos los casos el par torsor aplicado al piñón es de 500·Nm.

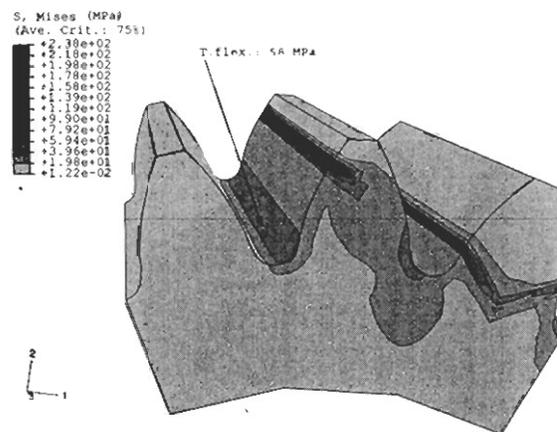


Fig. 9. Tensiones de contacto y flexión en el piñón de una transmisión con geometría de perfil de evolvente y sin errores de alineación.

El primer análisis considerado corresponde a una transmisión por engranajes rectos de geometría tipo (i) de perfil de evolvente sin errores de alineación o fabricación. La Figura 9 muestra las tensiones de contacto y flexión obtenidas para en el piñón. Como era de esperar, en ausencia de errores de fabricación y/o montaje, se obtiene contacto lineal y la carga se reparte uniformemente, incluso entre varios dientes.

La tensión máxima de contacto obtenida en la posición mostrada es de 238 MPa y la tensión máxima de flexión en la base del diente es de 58 MPa.

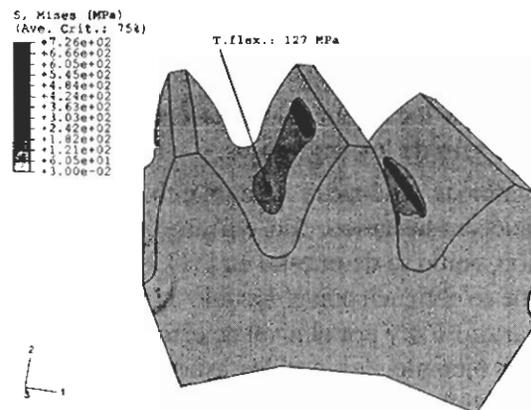


Fig. 10. Tensiones de contacto y flexión en el piñón de una transmisión con geometría modificada y sin errores de alineación.

En la Figura 10 se muestran las tensiones de contacto y flexión así como la formación del contacto en una transmisión por engranajes rectos con geometría modificada de tipo (ii). El contacto aparece localizado como consecuencia del abombamiento longitudinal de la superficie del piñón. La tensión máxima de contacto obtenida es de 726 MPa y la tensión máxima de flexión en la base del diente de 127 MPa. Las tensiones de contacto y flexión son más elevadas en este tipo de geometría que las obtenidas en el caso anterior para piñón y rueda de perfil de evolvente.

Si bien es cierto que la modificación de las superficies del piñón para localizar el contacto y prediseñar una función parabólica de errores de transmisión conduce a un incremento de las tensiones de contacto y flexión, las condiciones en las que se han considerado los modelos anteriores para las geometrías tipo (i) y (ii) son teóricas e ideales. En el montaje y funcionamiento real de las transmisiones siempre existirán errores de alineación o fabricación por muy pequeños que éstos sean y la tecnología existente nos permita alcanzar.

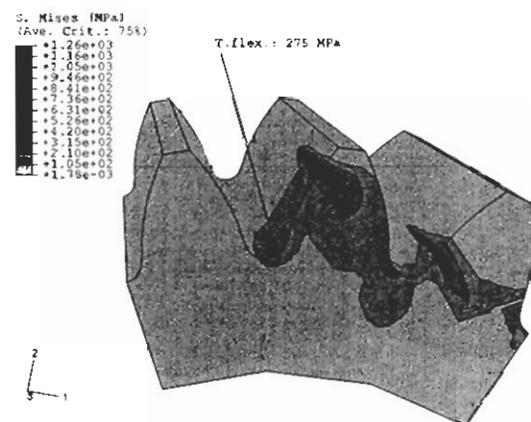


Fig. 11. Tensiones de contacto y flexión en el piñón de una transmisión con geometría de perfil de evolvente y con un error de alineación  $\Delta\gamma_h = 0.08^\circ$ .

La Figura 11 muestra la formación del contacto y las tensiones de contacto y flexión en una transmisión por engranajes rectos de perfil de evolvente (geometría tipo (i)) cuando los ejes de piñón y rueda no son paralelos sino que se cruzan, es decir, cuando existe un error de alineación  $\Delta\gamma_h = 0.08^\circ$  [8]. El

contacto se desplaza a los bordes de las superficies de las dentaduras del piñón y de la rueda alcanzándose niveles de tensiones de contacto y flexión de 1260 y 275 MPa, respectivamente.

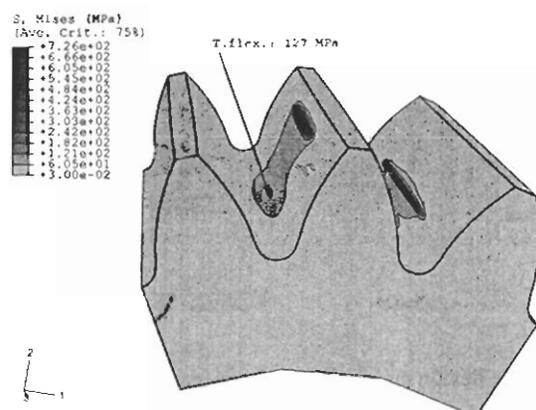


Fig. 12. Tensiones de contacto y flexión en el piñón de una transmisión con geometría modificada y con un error de alineación  $\Delta\gamma_h = 0.08^\circ$ .

En la Figura 12 se muestra la formación del contacto y las tensiones de contacto y flexión en una transmisión con geometría modificada de tipo (ii) cuando el mismo error considerado en el caso anterior existe ( $\Delta\gamma_h = 0.08^\circ$ ). Se observa que el contacto permanece localizado dentro de las superficies de las dentaduras del piñón y rueda alcanzándose niveles de tensiones de contacto y flexión de 670 y 118 MPa, respectivamente, similares a los obtenidos para el caso en el que no existen errores de alineación.

Se han considerado los siguientes tres casos de diseño para el estudio completo de la evolución de las tensiones de contacto y flexión en transmisiones de engranajes rectos de tipo (i) y (ii):

- Caso 1: Geometría modificada tipo (ii) sin errores de alineación y/o fabricación.
- Caso 2: Geometría modificada tipo (ii) con un error de alineación  $\Delta\gamma_h = 0.08^\circ$ .
- Caso 3: Geometría tradicional de perfil de evolvente tipo (i) con un error de alineación  $\Delta\gamma_h = 0.08^\circ$ .

La Figura 13 muestra la evolución de las tensiones de contacto en piñón y rueda para los tres casos mencionados. Igualmente la Figura 14 muestra las tensiones de flexión en piñón y rueda.

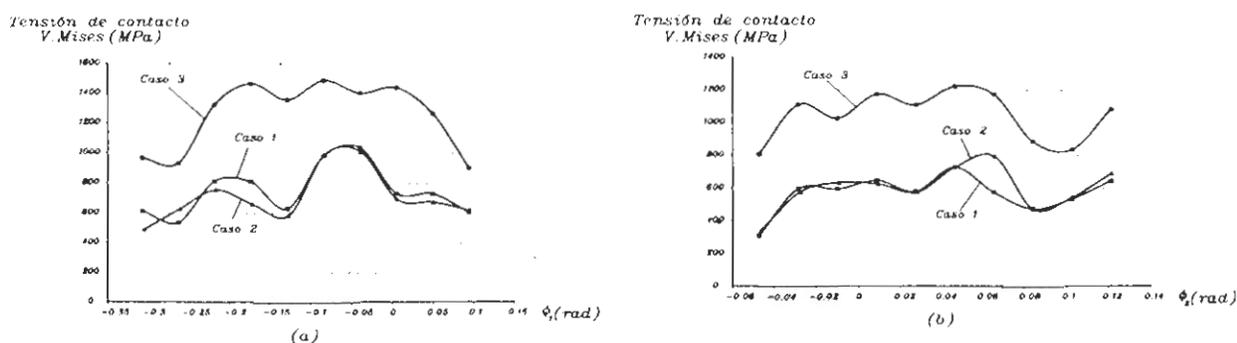


Fig. 13. Evolución de las tensiones de contacto en (a) piñón y (b) rueda para los casos considerados 1, 2 y 3.

Los resultados obtenidos nos permiten afirmar que la utilización de la geometría modificada tipo (ii) arroja niveles tensionales más bajos que la geometría tradicional de perfil de evolvente tipo (i) cuando aparecen errores de alineación y/o fabricación al tiempo que permite absorber las funciones discontinuas

de errores de transmisión producidas por los errores de alineación y montaje de forma que la transmisión tendrá niveles bajos de ruido y vibración.

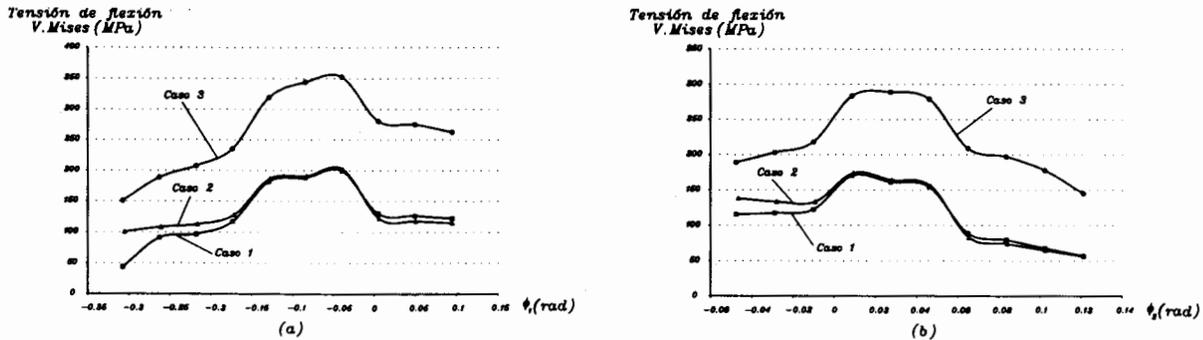


Fig. 14. Evolución de las tensiones de flexión en (a) piñón y (b) rueda para los casos considerados 1, 2 y 3.

Comparando el comportamiento de la transmisión tipo (ii) frente a la de tipo (i) cuando existe un error de alineación  $\Delta\gamma = 0.08^\circ$ , se consigue en el piñón hasta una reducción media del 43.97 % en las tensiones de contacto alcanzadas con la geometría convencional de perfil de evolvente. Igualmente, las tensiones de flexión se reducen hasta un valor medio del 46.94 %. Reducciones similares del 43.51 % y 45.59 % en las tensiones de contacto y flexión respectivamente se obtienen para la rueda.

La capacidad de localización del contacto depende del valor del coeficiente  $a_{pl}$  de la trayectoria parabólica del disco de rectificado, de manera que existirá un determinado valor del error  $\Delta\gamma_h$  a partir del cual el contacto aparece en el borde. En cualquier caso, se puede aumentar la capacidad de la transmisión para absorber errores aumentando el valor del coeficiente  $a_{pl}$ , a costa de aumentar el nivel de tensión de contacto y flexión.

Con respecto a la utilización de perfiles asimétricos (geometría tipo (iii)), se han analizado dos posibles casos: (a) utilización de un ángulo de presión mayor en el lado conductor que en el conducido, y (b) utilización de un ángulo de presión mayor en el lado conducido que en el conductor. Los casos de diseño considerados para el estudio de la utilización de perfiles asimétricos en comparación con el de perfiles simétricos son:

- Caso 1: Geometría tipo (ii), sin errores de alineación y/o montaje con un ángulo de presión de  $25^\circ$  en el lado conductor y  $25^\circ$  en el lado conducido.
- Caso a: Geometría tipo (iii), sin errores de alineación y/o montaje, con un ángulo de presión de  $30^\circ$  en el lado conductor y  $20^\circ$  en el lado conducido.
- Caso b: Geometría tipo (iii), sin errores de alineación y/o montaje, con un ángulo de presión de  $20^\circ$  en el lado conductor y  $30^\circ$  en el lado conducido.

En ambos casos, el coeficiente de abombamiento en la dirección del perfil se ha determinado de forma que la función prediseñada de errores de transmisión tenga un valor máximo de 8 segundos angulares (véase Tabla 1).

El análisis del contacto (TCA) y el análisis de las curvaturas [1] permite determinar la trayectoria del contacto así como el tamaño y orientación de las elipses de contacto [8]. En la Figuras 15(a), 15(b) y 15(c) se muestran las trayectorias de contacto y el tamaño y orientación de las elipses de contacto para los casos 1, a y b, respectivamente.

Las elipses de contacto se han representado sobre el rectángulo correspondiente a la proyección de la superficie del diente sobre una sección axial. Cada elipse de contacto viene representada por el centro de simetría y por el eje mayor de la misma. El lugar geométrico de los centros de simetría constituye la trayectoria de contacto. En los tres casos, los parámetros de diseño (véase Tabla 1) proporcionan el mismo tipo de función de errores de transmisión. La Figura 15(d) muestra dicha función correspondiente a tres ciclos de engrane.

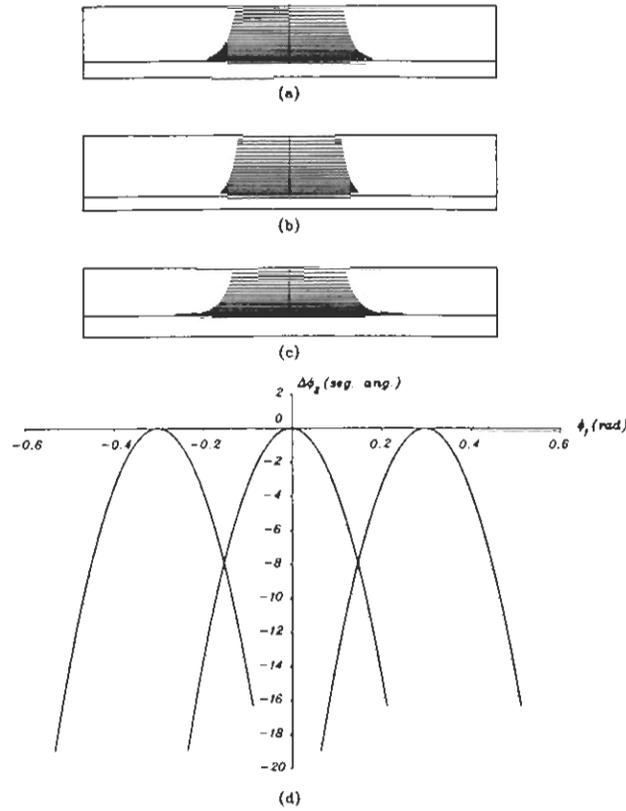


Fig. 15. Análisis del contacto: (a) trayectoria de contacto en el caso 1, (b) trayectoria de contacto en el caso a, (c) trayectoria de contacto en el caso b, (d) función de errores de transmisión en los casos 1, a y b.

Un primer análisis de las tensiones de contacto y flexión en el piñón se muestra en las Figuras 16 y 17 para los casos a y b respectivamente. El punto de contacto considerado ocupa una posición similar en la trayectoria de contacto a la mostrada en la Figura 10 para el caso 1.

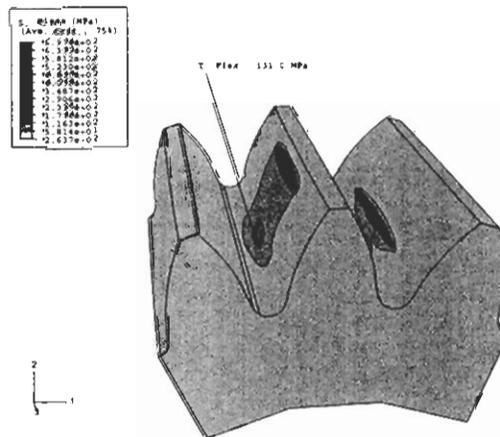


Fig. 16. Tensiones de contacto y flexión en el piñón de una transmisión con geometría modificada de perfiles asimétricos tipo 30-20 y sin errores de alineación.

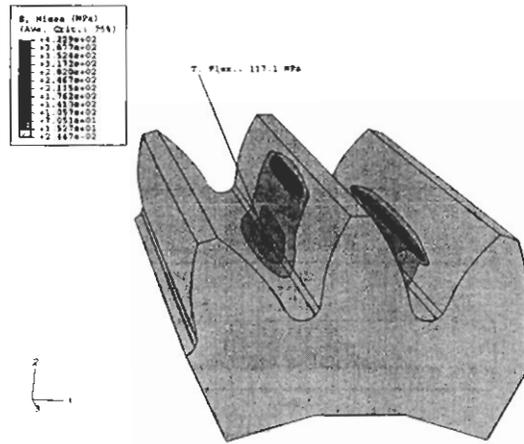


Fig. 17. Tensiones de contacto y flexión en el piñón de una transmisión con geometría modificada de perfiles asimétricos tipo 20-30 y sin errores de alineación.

Se ha realizado un estudio completo de la evolución de las tensiones de contacto y flexión a lo largo de la trayectoria de contacto para los casos de diseño a y b. En las Figuras 18 y 19 se muestran las tensiones de contacto y flexión respectivamente, tanto en piñón y rueda, para los casos 1, a y b. Se observa una ligera disminución de las tensiones de contacto en el caso (b) como era de esperar por el tamaño relativamente mayor de las elipses de contacto según se observa en la Figura 15(c).

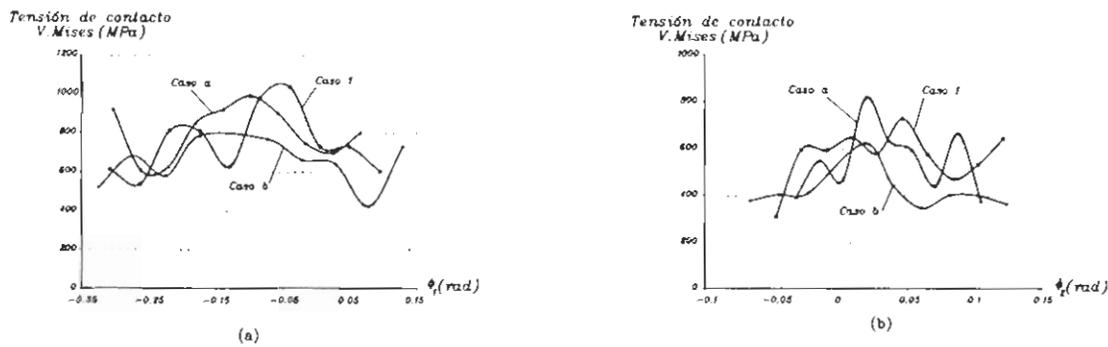


Fig. 18. Evolución de las tensiones de contacto en (a) piñón y (b) rueda para los casos considerados 1, a y b.

No se ha observado una reducción notable de las tensiones de contacto y/o de flexión con la utilización de perfiles asimétricos tanto para el piñón y para la rueda.

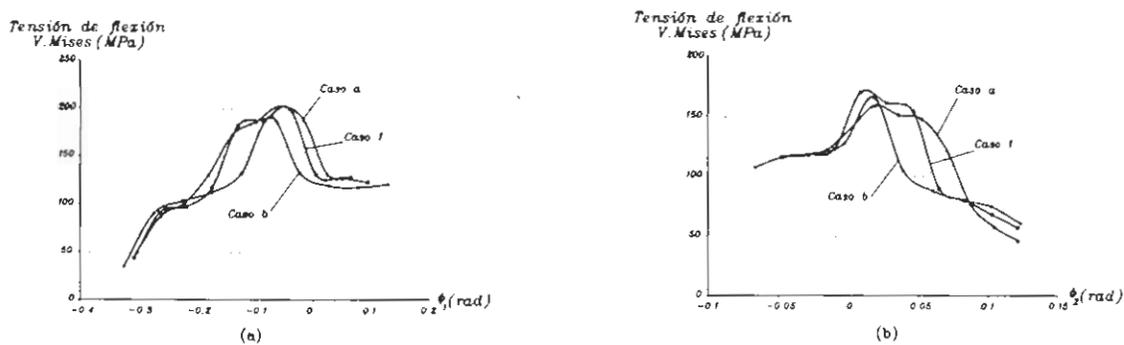


Fig. 19. Evolución de las tensiones de flexión en (a) piñón y (b) rueda para los casos considerados 1, a y b.

## 5. CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un programa de ordenador para el diseño, generación, análisis del contacto, y análisis tensional por elementos finitos de transmisiones por engranajes rectos. Se ha propuesto la generación automática de los modelos de elementos finitos y la utilización de modelos tridimensionales de tres o cinco pares de dientes. A la vista de los resultados obtenidos, se pueden obtener las siguientes conclusiones:

1. La utilización de un algoritmo de generación automática de los modelos de elementos finitos permite generar fácil y rápidamente tantos modelos de elementos finitos como se requieran para estudiar la evolución de las tensiones de contacto y flexión a lo largo de la trayectoria de contacto durante un ciclo de engrane.
2. La utilización de transmisiones de engranajes rectos de geometría modificada mediante el doble abombamiento de las superficies del piñón permite reducir notablemente los niveles tensionales frente a los obtenidos con la utilización de transmisiones de engranajes rectos de geometría tradicional de perfil de evolvente con contacto lineal cuando aparecen errores de alineación y/o fabricación. Además, la geometría modificada permite absorber las funciones discontinuas de errores de transmisión producidas por los errores de alineación y montaje para reducir el nivel de ruido y vibración de la transmisión.
3. La utilización de perfiles asimétricos no reduce notablemente las tensiones de contacto y de flexión en transmisiones por engranajes rectos como se ha propuesto en [6] y [7]. En cualquier caso, se ha observado una reducción mayor de los niveles tensionales cuando se utiliza el menor ángulo de presión para el lado conductor del piñón y el mayor para el lado conducido de la rueda.

## 6. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Dr. Faydor L. Litvin, director del Gear Research Center de la Universidad de Illinois en Chicago, la inspiración y sugerencias para la realización de este trabajo.

También agradecen al Ministerio de Ciencia y Tecnología la subvención concedida para el desarrollo del proyecto DPI2000-047 "Análisis del contacto entre dientes de engranajes: Estudio de la influencia de la modificación del perfil", y a la Fundación Séneca la financiación del proyecto DPC/01446/03.

## REFERENCIAS

- [1] Litvin, F. L., *Gear Geometry and Applied Theory*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1994.
- [2] Litvin, F. L. et al., *Helical and Spur Gear Drive with Double Crowned Pinion Tooth Surfaces and Conjugated Gear Tooth Surfaces*, US Patent Office, Patent No. 6,205,879, 2001.
- [3] Litvin, F. L., Zhang, J., and Handschuh, R. F., «Crowned Spur Gears: Methods for Generation and Tooth Contact Analysis - Part I: Basic Concepts, Generation of the Pinion Tooth Surface by a Plane», *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. 110, pp. 337-342, 1988.
- [4] Litvin, F. L., Zhang, J., and Handschuh, R. F., «Crowned Spur Gears: Methods for Generation and Tooth Contact Analysis - Part 2: Generation of the Pinion Tooth Surface by a Surface of Revolution», *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*, Vol. 110, pp. 343-347, 1988.
- [5] Litvin, F. L., Fuentes, A., Demenego, A., Vecchiato, D., and Fan, Q., «New Developments in the Design and Generation of Gear Drives», *Inst. Mech. Eng., Mechanical Engineering Science*, Part C., Vol. 215, No. C7, pp. 747-758, 2001.
- [6] Kapelevich, A. L., «Geometry and Design of Involute Spur Gears with Asymmetric Teeth», *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 35, pp. 117-130, 2000.
- [7] Litvin, F. L., Lian, Q., and Kapelevich, A. L., «Asymmetric Modified Spur Gear Drives: Reduction of Noise, Localization of Contact, Simulation of Meshing and Stress Analysis», *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 188, No. 1-3, pp. 363-390, 2000.
- [8] Fuentes, A., González, I., and Pedrero, J., «Diseño, Generación, Simulación del Engrane y Análisis del Contacto de Engranajes Rectos con Geometría Modificada», *Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica*, Vol. 7, No. 1, pp. 3-31, 2003.
- [9] Zienkiewicz, O. C. and Taylor, R. L., *The Finite Element Method*, John Wiley & Sons, 5th Ed., 2000.
- [10] Hibbit, Karlsson & Sirensen, Inc., *ABAQUS/Standard User's Manual*, 1800 Main Street, Pantucket, RI 02860-4847, 1998.
- [11] Smith, J. D., *Gear Noise and Vibration*, Marcel Dekker Inc., 270 Madison Avenue, New York, NY 10016, 1999.
- [12] Townsend, D. P., *Dudley's Gear Handbook*, McGraw-Hill, Inc., New York, 2nd Ed., 1991.