



## VELOCIDAD DE ENFRIAMIENTO: SU DETERMINACIÓN EN PROBLEMAS DE TEMPLADO

LEONOR DE LA TORRE, MARÍA BERENGUER, LAURA OLIVA, ZULMA MILLÁN

Facultad de Ingeniería  
Departamento de Matemática  
Av. Libertador San Martín 1109 oeste San Juan, Argentina

*(Recibido 26 de junio de 2011, para publicación 27 de septiembre de 2011)*

**Resumen** – Los tratamientos térmicos son procesos que se emplean para modificar propiedades mecánicas de los materiales. El temple es uno de los tratamientos térmicos más usados en aceros, cuya finalidad es obtener mayor dureza y mayor resistencia mecánica. El modelado matemático de procesos de templado de aceros da lugar al estudio numérico del mismo. La formulación numérica del proceso de temple bajo ciertas condiciones, en una pieza de acero, permite obtener la distribución de temperaturas en todos los puntos de la pieza. Para ello se analizan las singularidades que el problema incluye y se trabaja con la no linealidad del modelo. La determinación de los perfiles de temperatura es el primer paso para lograr las velocidades de enfriamiento en los puntos de la pieza. Con ellas se puede determinar el nivel de dureza del acero.

**Palabras clave** – Métodos Numéricos, templado, temperatura.

### 1. INTRODUCCIÓN

Los tratamientos térmicos son procesos que tienden a modificar propiedades mecánicas de los materiales, para que puedan ser utilizados en forma eficaz.

Para el acero, estos tratamientos desempeñan un papel importante, ya que mediante la variación de la velocidad de calentamiento y de enfriamiento se puede obtener determinadas estructuras y con ello variar considerablemente las propiedades de este material y de las piezas fabricadas con él.

Uno de los tratamientos térmicos es el temple que tiene por finalidad aumentar la dureza, la tenacidad y la resistencia del acero a esfuerzos.

La investigación de la templabilidad de los aceros ha dado origen a numerosos estudios, siendo de gran importancia contar con herramientas informáticas que permitan simular los procesos térmicos y así obtener resultados aproximados sobre el comportamiento de los distintos aceros.

En este trabajo se describen los pasos seguidos y las consideraciones realizadas para la formulación de un modelo matemático aplicado al proceso de templado de acero. También se indican los métodos numéricos seleccionados para resolver el modelo planteado y se presentan algunos resultados obtenidos a partir de la solución encontrada.

La solución del modelo matemático formulado permite obtener la distribución de temperaturas en el tiempo en los puntos de una barra de acero de sección circular, que se somete a temple sumergiéndola en un fluido con temperatura constante. También es posible determinar las velocidades de enfriamiento de los puntos de la pieza, a una temperatura determinada.

Conocidas las velocidades de enfriamiento se pueden predecir valores de dureza mediante la utilización de las denominadas curvas Jominy. El ensayo Jominy consiste en templar una probeta cilíndrica de determinadas dimensiones por medio de un chorro de agua que enfría solamente la base inferior [1].

La curva de dureza obtenida a partir del ensayo Jominy tiene un uso muy importante en relación con el tratamiento de piezas reales. La importancia radica en el principio que se enuncia a continuación: “Los puntos de un redondo enfriado en un medio H, y los puntos de una probeta Jominy construida con un acero de características idénticas, que se enfrían con la misma velocidad, tendrán la misma dureza. Y

seguirán teniendo la misma dureza si ambos puntos sufren un proceso de revenido igual en temperatura y tiempo” [7].

La simulación numérica también brinda la posibilidad de analizar la influencia que tienen en la velocidad de enfriamiento, factores tales como el medio de temple, el tamaño y la forma de la pieza de acero a templar.

## 2. FORMULACIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

El estudio de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y su relación con los procesos de transferencia de calor constituyen el marco apropiado para el desarrollo de este trabajo.

La ecuación del calor, denominada así porque rige el flujo de calor dentro de un objeto es una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden, de tipo parabólica. Permite describir problemas transitorios de transferencia de calor, variables con el tiempo.

Esta ecuación de calor, junto con adecuadas condiciones iniciales y de frontera es apta para modelar matemáticamente el proceso de templado de aceros.

El problema que aquí se aborda consiste en encontrar la distribución de temperaturas en el tiempo, a lo largo del radio  $R$  de la sección transversal de una barra cilíndrica de acero, para luego poder determinar las correspondientes velocidades de enfriamiento.

Se considera que la barra tiene inicialmente una determinada temperatura y se la sumerge en un fluido con temperatura constante.

Dada la geometría de la pieza, es apropiado en este caso utilizar la ecuación (1), conocida como ecuación de calor en coordenadas cilíndricas.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

$T(r, \theta, z, t)$  es la función temperatura y  $r, \theta$  y  $z$  son las coordenadas cilíndricas de cualquier punto de la pieza.

El coeficiente  $a = \frac{k}{c\rho}$  representa la difusividad térmica del material de la barra, siendo  $k$  la conductividad térmica,  $c$  la capacidad térmica y  $\rho$  la densidad.

Como la sección transversal presenta simetría con respecto al centro y el fluido circundante envuelve toda la pieza, se puede aceptar que la distribución de temperaturas es la misma en todos y cada uno de los radios de la sección circular. Es por este motivo que

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2)$$

Por otra parte, se asume que la barra en estudio tiene longitud infinita, por lo que se puede considerar que

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (3)$$

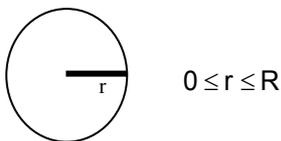


Fig. 1. Sección transversal de la pieza de acero.

A continuación se discuten las condiciones de frontera. En el centro de la sección transversal (cuando  $r = 0$ ) no hay intercambio de calor debido a la simetría del problema, razón por la cual resulta apropiado plantear allí una condición de tipo Neumann (frontera aislada) como muestra la ecuación (4).

$$\frac{\partial T}{\partial r}(0, t) = 0 \quad (4)$$

Cuando  $r = R$  corresponde plantear una condición de tipo Robin (ecuación (5)), que permite modelar los mecanismos de convección y radiación que surgen debido al intercambio de calor entre el objeto y el fluido.

$$k \frac{\partial T}{\partial r}(R, t) = -\alpha(T(R, t) - T_f) - \sigma(T^4(R, t) - T_f^4) \quad (5)$$

$\alpha$  es el coeficiente de película,  $\sigma$  es el coeficiente de radiación llamado constante de Stefan- Boltzman y  $T_f$  la temperatura del fluido que rodea al objeto.

La ecuación (6) muestra la condición inicial del problema, cuando la variable tiempo toma el valor  $t = 0$ .

$$T(r, 0) = T_0 \quad (6)$$

donde  $T_0$  es la temperatura inicial del objeto.

La ecuación de calor (1) es válida para el intervalo  $0 < r < R$  y se observa que para  $r = 0$  presenta una discontinuidad. Salvando esta discontinuidad [5] se obtiene la ecuación

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{r=0} = 2a \left. \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right|_{r=0} \quad (7)$$

Finalmente, el modelo matemático que resulta de las consideraciones expuestas es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad 0 < r < R \quad 0 < t < t_{final} \\ \frac{\partial T}{\partial r}(0, t) = 0 \\ k \frac{\partial T}{\partial r}(R, t) = -\alpha(T(R, t) - T_f) - \sigma(T^4(R, t) - T_f^4) \\ T(r, 0) = T_0 \end{array} \right. \quad (8)$$

### 3. SOLUCIÓN NUMÉRICA. MÉTODOS EMPLEADOS

Para la determinación de la solución numérica se utiliza un método implícito en diferencias finitas.

La elección de un esquema implícito se basa en que es incondicionalmente estable y convergente.

Entre los métodos implícitos se selecciona el esquema de Crank-Nicolson que presenta un error de aproximación de segundo orden, tanto en el tiempo como en el espacio [4,5].

Al expresar la ecuación (7) en diferencias finitas considerando la correspondiente condición de frontera, se obtiene la ecuación (9) aplicada al nodo espacial  $i = 0$ .

$$-(2\lambda + 1)T_0^{j+1} + 2\lambda T_1^{j+1} = (-1 + 2\lambda)T_0^j - 2\lambda T_1^j \quad (9)$$

donde  $\lambda = \frac{a \Delta t}{\Delta r^2}$ .

De la ecuación de calor discretizada resulta la ecuación (10), válida para  $1 \leq i \leq Ne-1$ , teniendo en cuenta que los nodos espaciales se han numerado desde 0 hasta Ne.

$$\left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4i}\right)T_{i-1}^{j+1} + (\lambda+1)T_i^{j+1} + \left(-\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{4i}\right)T_{i+1}^{j+1} = \left(\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{4i}\right)T_{i-1}^j + (1-\lambda)T_i^j + \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4i}\right)T_{i+1}^j \quad (10)$$

La ecuación (11) surge a partir de la condición de frontera (5).

$$\begin{aligned} \lambda T_{Ne-1}^{j+1} + 2 \left[ m\lambda \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4Ne} \right) + l\lambda \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4Ne} \right) (T_{Ne}^{j+1})^3 + \left( \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2} \right) \right] T_{Ne}^{j+1} = \\ = \lambda T_{Ne-1}^j + \left[ 2 \left( \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4Ne} \right) (-m - l(T_{Ne}^j)^3) + 1 - \lambda \right] T_{Ne}^j + \left[ 4m \left( \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4Ne} \right) \right] T_f - 4l \left( \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4Ne} \right) (T_f)^4 \end{aligned} \quad (11)$$

La aplicación de métodos implícitos para la solución numérica del problema de valores iniciales y de frontera conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas lineales con matriz de coeficientes Tri-diagonal.

La ecuación (11) hace que el sistema que se obtiene no sea lineal. Esta no-linealidad es introducida por la condición de frontera que modela el efecto de transferencia de calor por radiación.

Para resolver esta falta de linealidad se utiliza una linealización computacional de la ecuación (11), introduciendo un procedimiento iterativo con cierto nivel de precisión prefijado.

Para la solución del sistema de ecuaciones algebraicas se diseña un procedimiento computacional usando el Algoritmo de Thomas [3] apropiado para sistemas con matriz de coeficientes Tri-diagonal.

De este modo se obtiene la distribución de temperaturas en el tiempo en los puntos de la barra de acero de sección circular. Luego se determinan las velocidades de enfriamiento de estos puntos a una temperatura determinada mediante una aproximación en diferencias centrada tal como la que se expresa en la ecuación (12).

$$\frac{\partial T}{\partial t} \cong \frac{T_i^{j+1} - T_i^{j-1}}{2\Delta t} \quad (12)$$

#### 4. RESULTADOS OBTENIDOS

A continuación se muestran algunos resultados obtenidos a partir de la solución del modelo numérico. Se utilizaron los siguientes valores para las constantes del problema [6]:

Temperatura del fluido:  $T_f = 60^\circ C$

Conductividad térmica del fluido:  $\alpha = 5000 \frac{w}{m^2 \cdot ^\circ C}$

Temperatura inicial de la barra de acero:  $T_0 = 850^\circ C$

Conductividad térmica del acero:  $k = 50 \frac{w}{m \cdot ^\circ C}$

Capacidad térmica del acero:  $c = 460 \frac{w \cdot s}{kg \cdot ^\circ C}$

Densidad del acero:  $\rho = 7840 \frac{kg}{m^3}$

Constante de Stefan-Boltzman:  $\sigma = 5.669 \cdot 10^{-8} \frac{w}{m^2 \cdot K^4}$

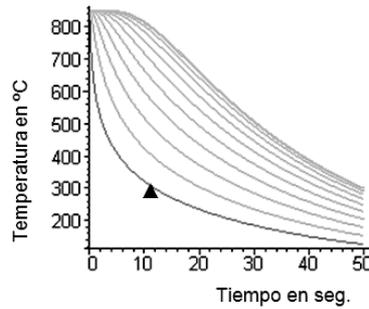


Fig. 2. Temperatura en los nodos de la pieza vs tiempo.

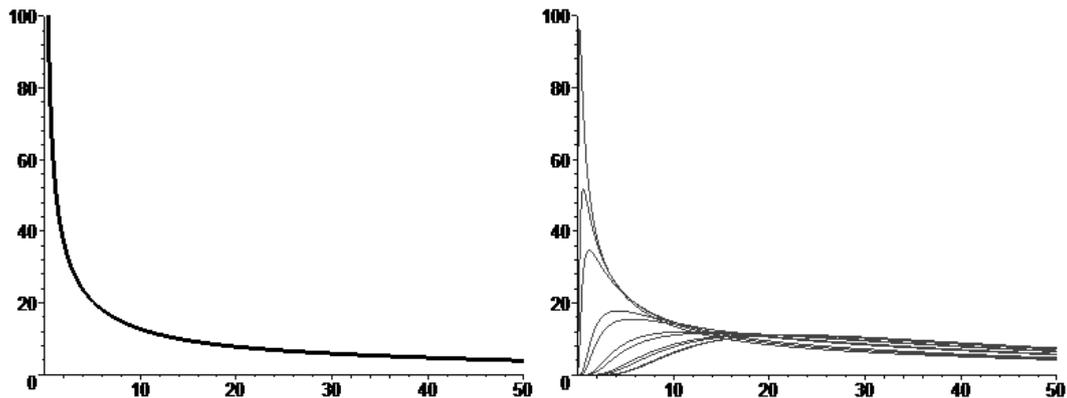


Fig. 3. Curvas de velocidad de enfriamiento.

La Fig. 2 muestra la evolución de los perfiles de temperatura a través del tiempo en los distintos nodos del radio de la pieza estudiada. La curva señalada con ( $\blacktriangle$ ) muestra la evolución de la temperatura en el nodo más cercano al fluido, en ella se observa que el decaimiento de temperatura es mucho más rápido que en los otros nodos.

Con respecto a la velocidad de enfriamiento, se sabe que es de gran importancia en el proceso de temple.

Cada punto de la pieza tiene su velocidad de enfriamiento, esto es, la velocidad de enfriamiento depende de la posición. Así, la velocidad de enfriamiento de los puntos en la superficie es mayor que la velocidad de enfriamiento en los puntos interiores de la pieza a templear [1,2].

Para el estudio de las velocidades de enfriamiento se han tenido en cuenta características propias del acero tales como la densidad, el calor específico y la conductividad térmica. También se han considerado variables tales como el tamaño de la pieza, la temperatura de austenización (en general se trabajó ésta a  $850^{\circ}\text{C}$ ), el tiempo de temple y características del medio de temple, tales como la temperatura del mismo y su coeficiente de película.

La Fig. 3 muestra curvas de velocidades de enfriamiento en puntos de una pieza de acero templada en aceite a  $60^{\circ}\text{C}$ . La primera gráfica muestra la curva que describe la velocidad de enfriamiento en el nodo que está en contacto con el medio de temple para una pieza de 4 cm de radio. Puede observarse que esta curva tiende a infinito en el instante inicial debido a que aquí el gradiente térmico es muy grande por el gran contraste entre la temperatura de la pieza,  $850^{\circ}\text{C}$ , y la del medio refrigerante. En la segunda gráfica están las curvas de velocidades de enfriamiento en algunos otros nodos del interior del cilindro.

La Fig. 4 muestra las velocidades de enfriamiento en dos piezas cilíndricas de acero, una de 4 cm y otra de 8 cm de radio, respectivamente.

Se observa que en la pieza de menor superficie expuesta al medio de temple la velocidad de enfriamiento es mayor. Para esto se comparan las velocidades de enfriamiento en dos nodos ubicados a

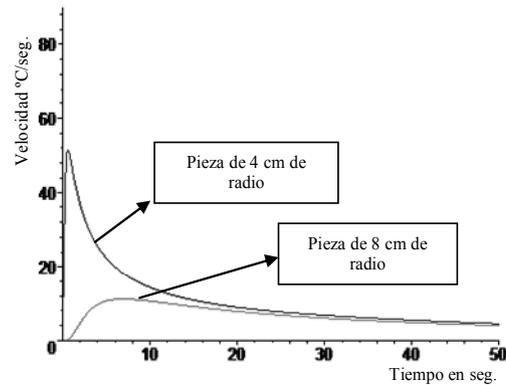
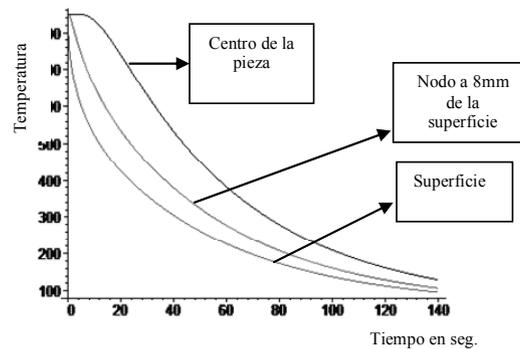


Fig. 4. Velocidad de enfriamiento vs tiempo.

Fig. 5. Temperatura en tres  $n$ .

igual distancia del borde templado. En este caso se consideraron nodos a 2 mm del borde exterior en dos piezas de 4 cm y de 8 cm de radio.

Se observa que la velocidad de enfriamiento es mayor en piezas de menor tamaño.

Para una pieza cilíndrica de acero, la velocidad de enfriamiento disminuye en forma simétrica desde la superficie hasta el centro de la barra. Así, todos los puntos que están a una misma distancia del centro de la pieza se enfrían con la misma velocidad. Esto puede observarse en la Fig. 4 que muestra la distribución de la temperatura en una pieza de acero cilíndrica de 4 cm de radio, templada en aceite a 60°C. Allí se grafican las temperaturas en un nodo de la superficie, en uno a 8 mm de ésta y en el centro. Se ve que las pendientes de las curvas son más suaves a medida que nos acercamos al centro de la pieza.

Con respecto a enfriamiento, se considera que piezas con igual forma y tamaño, aunque sean de distinto acero, se enfrían en un mismo medio prácticamente con igual velocidad [5].

Para comprobar lo mencionado se utilizaron dos piezas de acero de forma cilíndrica de 4 cm de radio de dos aceros al carbono distintos, uno con 0,5% de carbono y otro con 1% de carbono. Modificando los valores de densidad, calor específico y conductividad térmica del carbono constituyente de cada pieza se obtuvieron curvas de velocidad de enfriamiento para un punto determinado.

La Fig. 6 muestra las curvas de velocidad en el centro de cada pieza, que han sido templadas en agua a 32°C durante 140 segundos. Se observa que las velocidades de enfriamiento en las dos piezas no se modifican sustancialmente a pesar de la diferencia del material.

La Fig. 7 muestra para el nodo central la velocidad de enfriamiento versus la temperatura de la pieza y se observa que las máximas velocidades de enfriamiento se producen entre los 680°C y los 730°C para una pieza cilíndrica de 4 cm de radio sumergida en agua a 32°C.

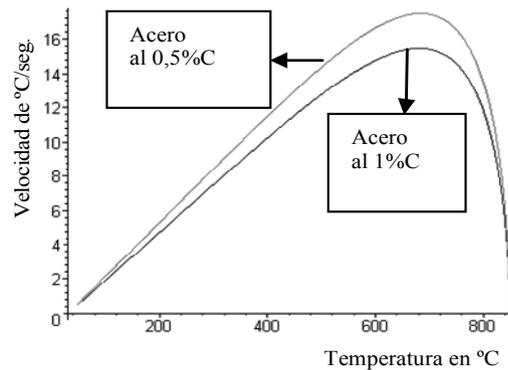


Fig. 6. Velocidad de enfriamiento vs temperatura.

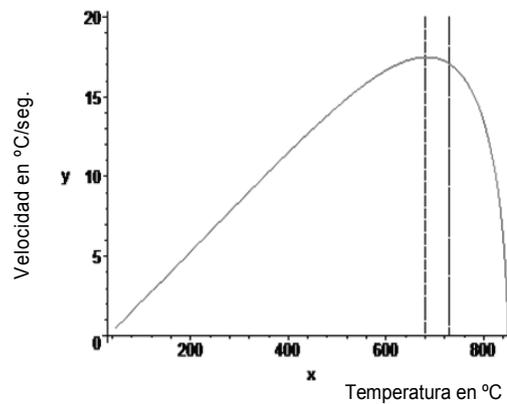


Fig. 7. Velocidad-Temperatura en el nodo central de una pieza.

## 5. CONCLUSIONES

La solución del modelo conduce a la obtención de los valores de temperatura en los distintos nodos del radio de la pieza y de las velocidades de enfriamiento en los puntos de una pieza de acero templado, resultados de importancia para la predicción de valores de dureza en dichos puntos.

Los resultados obtenidos permiten comprobar numéricamente propiedades que se manifiestan en el proceso de temple tales como:

- (i) Cada punto de una pieza tiene su velocidad de enfriamiento, esto es la velocidad de enfriamiento depende de la posición. Los puntos de una pieza templada más cercanos al medio de temple tienen mayor velocidad de enfriamiento que los puntos interiores, los que se enfrían con menor velocidad, pero a los que es necesario prestarles especial atención pues de ellos depende que la pieza llegue al estado esperado.
- (ii) La velocidad de enfriamiento de la pieza es mayor en piezas de menor tamaño.
- (iii) Piezas de acero con distinto contenido de carbono, de igual forma y tamaño, se enfrían en el mismo medio prácticamente con igual velocidad.
- (iv) Las máximas velocidades de enfriamiento se producen entre los 680°C y los 730°C para una pieza cilíndrica de 4 cm de radio sumergida en agua a 32°C.

## REFERENCIAS

- [1] Apraiz Barreiro, J., *Tratamientos térmicos de los aceros*, Dossat, España (1985)
- [2] Callister, W., *Introducción a la Ciencia e Ingeniería de los Materiales*, Reverté, España (2002)
- [3] Fletcher, C., *Computational Techniques for Fluid Dynamics*, vol. 1, Springer-Verlag, Berlin (1987)
- [4] Gerald, C., Wheatley, P., *Análisis Numérico con Aplicaciones*, Pearson Educación, España (2000)
- [5] Smith, G.D., *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, Oxford University Press, U.S.A. (1985)
- [6] Özisik, M.N., *Basic Heat Transfer*, Robert E. Krieger Publishing Company, U.S.A. (1987)
- [7] Yanzón, R.C, Rodríguez, C.A., Sánchez, A.R., CONAMET/ SAM, Chile (2006)

## VELOCITY OF COOLING : ITS DETERMINATION ON PROBLEMS OF TEMPERED

**Abstract** – Thermal treatments are processes used to modify mechanical properties in materials. Quenching is one of the most frequently used in steels to increase hardness and mechanical resistance. The mathematical modelling of steel quenching processes gives place to its numerical analysis. The numerical formulation of quenching, under certain conditions, in a steel piece enables the distribution of temperatures at every point of the piece. For that purpose, the singularities of the problem are analysed using the model's non-linearity. The determination of temperature profiles is the first step to obtain the cooling velocities at the piece's points. These may be used to determine the steel's level of hardness.

**Keywords** – Numerical methods, Quenching, Temperature.