



## ANÁLISIS DE POSICIÓN DE UN MECANISMO DE CUATRO BARRAS UTILIZANDO COORDENADAS NATURALES

NEIDER NADID ROMERO NUÑEZ

Universidad de Pamplona  
Grupo de Investigación en Ingeniería Mecánica (GIMUP)  
Km. 1 vía Bucaramanga, Pamplona Norte de Santander, Colombia

*(Recibido 20 de enero de 2016, para publicación 9 de marzo de 2016)*

**Resumen** – En este artículo se propone la utilización de coordenadas naturales en la formulación de las ecuaciones de restricción de un mecanismo de cuatro barras para resolver el problema de posición de forma cerrada o analítica, con el objetivo de evitar las complejidades que conlleva el uso del método tradicional en el cual se utilizan coordenadas angulares y, donde las restricciones se derivan de la condición de cierre de lazo. Se modeló utilizando coordenadas naturales en un mecanismo de cuatro barras junto con un punto del acoplador, debido que la trayectoria deseada de este punto es un problema de especial importancia en la síntesis dimensional. Las restricciones obtenidas se resolvieron de forma analítica, para luego ser implementadas en la simulación del mecanismo para cada una de sus configuraciones. Finalmente se concluyó que el uso de coordenadas naturales para la solución del problema de posición de un mecanismo de cuatro barras, origina ecuaciones de restricción que pueden resolverse analíticamente de forma sencilla, y de esta manera proporcionando una solución alterna al problema de posición.

**Palabras clave** – Mecanismo de cuatro barras, análisis de posición, coordenadas naturales.

### 1. INTRODUCCIÓN

El análisis de posición de mecanismos es un problema matemáticamente complejo, y en la mayoría de los casos solamente se pueden obtener soluciones aproximadas, solo en casos donde la geometría del mecanismo no es muy compleja se pueden derivar soluciones analíticas o cerradas [1]. Los métodos para resolver el problema de posición de mecanismos eran puramente geométricos antes del auge de las computadoras, por lo que el análisis de posición era bastante limitado. En la actualidad se encuentran en la literatura varios métodos para solucionar este problema, como en A. Hernández y V. Petuya[2] que proponen un método geométrico iterativo, basado en la condición de rigidez de cada elemento del mecanismo. S. Mitsi[3] presenta un método para determinar las distintas configuraciones de un mecanismo con una cadena cinemática del grupo de Assur de clase 4, usando un procedimiento de eliminación de parámetros desconocidos hasta llegar a un polinomio de sexto orden, donde las raíces de dicho polinomio representan las distintas configuraciones del mecanismo. También se presentó el mismo procedimiento en S. Mitsi y otros [4] para un mecanismo con tres juntas prismáticas, obteniendo un polinomio de cuarto grado.

Otros métodos más actuales que abordan el problema de posición de mecanismos planos, son basados en un área relativamente nueva de la matemática llamada Geometría Algebraica, que trata de la solución de sistemas de ecuaciones algebraicas. Los trabajos más representativos que utilizan esta herramienta matemática para solucionar el problema de posición son los presentados por N. Rojas[5–7], en estos trabajos no son utilizadas coordenadas angulares y el problema se reduce a encontrar las raíces de un polinomio por el método de continuación, lo que proporciona todas las configuraciones posibles del mecanismo.

En cuanto a la utilización de coordenadas naturales para solucionar el problema de posición de mecanismos planos se destaca el estudio realizado por N. Romero[8] donde utiliza coordenadas naturales para

modelar mecanismos de dirección vehicular de cuatro hasta ocho barras, para luego ser optimizados utilizando algoritmos genéticos, obteniendo resultados satisfactorios en cada uno de los casos. Las coordenadas naturales fueron introducidas por J. De Jalón y colaboradores [9] para modelar sistemas multicuerpos y con ello solucionando tanto los problemas cinemáticos como dinámicos de mecanismos.

En la mayoría de los métodos utilizados para resolver el problema de posición de mecanismos se utiliza coordenadas angulares para definir las ecuaciones de restricción que modelan el mecanismo, aplicando técnicas numéricas para resolver el sistema de ecuaciones que generalmente es no lineal. Por lo tanto en este trabajo se propone la utilización de coordenadas naturales para resolver particularmente el problema de posición de un mecanismo de cuatro barras de forma analítica, con lo cual se ofrece una solución alterna a la tradicionalmente usada.

En la siguiente sección se formulan las ecuaciones restricción de un mecanismo de cuatro barras. En el tercer apartado se resuelven de forma analítica las ecuaciones de restricción. Subsecuentemente se implementan las ecuaciones obtenidas en Matlab. Finalmente se destacan las ventajas de la solución obtenida frente a la solución tradicionalmente utilizada.

## 2. RESTRICCIONES CINEMÁTICAS DEL MECANISMO DE CUATRO BARRAS

En un mecanismo de cadena cinemática cerrada existe dependencia entre las coordenadas elegidas para su modelación, lo que significa que las coordenadas están relacionadas entre sí, y dichas relaciones son expresadas por medio de ecuaciones que se denominan ecuaciones de restricción[9]. Las coordenadas que modelizan un sistema mecánico se llaman dependientes cuando su número es mayor que el número de grados de libertad[10].

En un mecanismo el número de coordenadas dependientes y el número de restricciones están relacionados por la ecuación:

$$m = n - F \quad (1)$$

donde  $m$  es el número de ecuaciones de restricción,  $F$  son los grados de libertad y  $n$  es el número de coordenadas dependientes. Las restricciones que modelizan el mecanismo pueden ser escritas en forma compacta como:

$$\Phi(\mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}) = \begin{bmatrix} \phi_1(\mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}) \\ \phi_2(\mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}) \\ \vdots \\ \phi_m(\mathbf{q}, \boldsymbol{\psi}) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (2)$$

en el que  $\Phi$  es el vector de restricciones en función del vector de coordenadas  $\mathbf{q}$  y el vector  $\boldsymbol{\psi}$  de coordenadas que representan los grados de libertad,  $\phi_1, \phi_2 \dots, \phi_m$  son cada una de las ecuaciones de restricción del mecanismo.

### 2.1. Modelado utilizando coordenadas naturales

Las coordenadas naturales fueron originalmente introducidas por J. De Jalón y colaboradores [9], siendo mayormente coordenadas cartesianas ubicadas en los pares cinemáticos o en puntos de interés. La ventaja principal en el uso de las coordenadas naturales es su sencillez e interpretación física intuitiva, además no es necesario definir coordenadas de tipo angular para definir la orientación de cada uno de los elementos del mecanismo evitando toda la complejidad que ello conlleva[10].

El análisis de posición es uno de los pasos iniciales en la síntesis de mecanismos, donde la generación de movimiento y de trayectoria son unos de los problemas principales en la síntesis dimensional de mecanismos. Estos dos problemas de generación de movimiento y de trayectoria están íntimamente relacionados [11], por lo tanto en este trabajo se considera en el modelado del mecanismo de cuatro barras junto con un punto del acoplador, el cual genera una trayectoria.

La Fig. 1 muestra un mecanismo de cuatro barras modelado en coordenadas naturales, donde el vector coordenadas naturales es  $\mathbf{q} = [C_x \ C_y \ D_x \ D_y \ P_x \ P_y]^T$ , como solo hay un grado de libertad el vec-

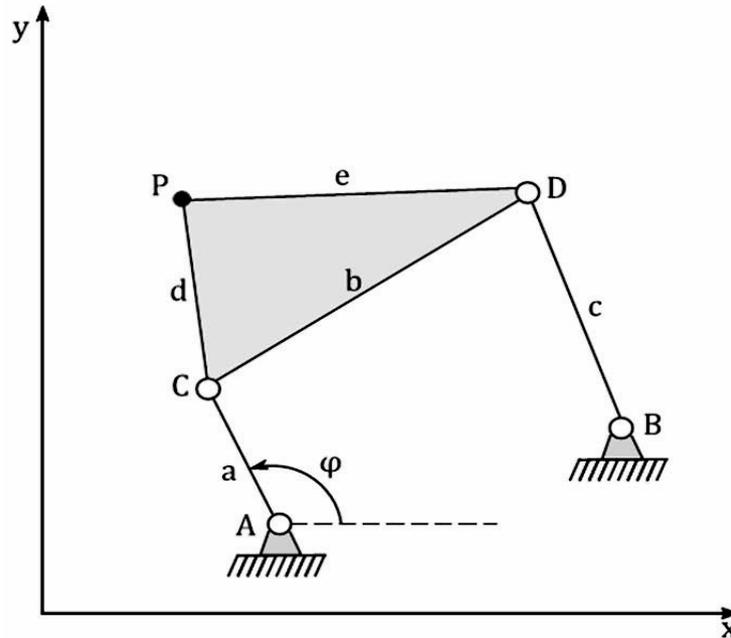


Fig. 1. Mecanismo de cuatro barras modelado en coordenadas naturales.

tor de grados de libertad se escribe como  $\psi = \varphi$  que corresponde a una coordenada angular medida a partir del eje  $x$  positivo.

De la ecuación (1) se tiene que son necesarias  $m = 6$  ecuaciones de restricción, las cuales se describen a continuación.

Del producto escalar del vector  $\overline{AC}$  con un vector unitario en la dirección positiva de  $x$ , se obtiene la restricción

$$(C_x - A_x) - a \cos(\varphi) = 0 \tag{3}$$

que relaciona las coordenadas en  $x$  de los puntos  $A$  y  $C$  con el ángulo  $\varphi$ . Similarmente del producto vectorial del vector  $\overline{AC}$  con un vector unitario en la dirección positiva de  $x$ , se obtiene la restricción

$$(C_y - A_y) - a \sin(\varphi) = 0 \tag{4}$$

que relaciona las coordenadas en  $y$  de los puntos  $A$  y  $C$  con el ángulo  $\varphi$ .

Las ecuaciones de restricción (5), (6) y (7) son derivadas del hecho de que las distancias entre los puntos  $CD$ ,  $BD$ ,  $CP$  y  $DP$  son constantes respectivamente. De esta forma se completan las seis ecuaciones de restricción necesarias que modelan el mecanismo de cuatro barras.

Es importante aclarar que las ecuaciones de restricción que modelan un mecanismo nos son únicas, y fácilmente se hubiese podido establecer seis ecuaciones de restricción diferentes para modelar el mecanismo.

$$(D_x - C_x)^2 + (D_y - C_y)^2 - b^2 = 0 \tag{5}$$

$$(D_x - B_x)^2 + (D_y - B_y)^2 - c^2 = 0 \tag{6}$$

$$(P_x - C_x)^2 + (P_y - C_y)^2 - d^2 = 0 \tag{7}$$

$$(P_x - D_x)^2 + (P_y - D_y)^2 - e^2 = 0 \tag{8}$$

El vector de restricciones para el mecanismo de cuatro barras es

$$\Phi(\mathbf{q}, \varphi) = \begin{bmatrix} (C_x - A_x) - a \cos(\varphi) \\ (C_y - A_y) - a \sin(\varphi) \\ (D_x - C_x)^2 + (D_y - C_y)^2 - b^2 \\ (D_x - B_x)^2 + (D_y - B_y)^2 - c^2 \\ (P_x - C_x)^2 + (P_y - C_y)^2 - d^2 \\ (P_x - D_x)^2 + (P_y - D_y)^2 - e^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

donde los puntos **A** y **B** son fijos y están ubicados en los pares cinemáticos y junto con las longitudes  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  y  $e$  definen la geometría del mecanismo. Estos nueve parámetros independientes son los que se tienen que determinar en el problema de síntesis dimensional el cual no es nada trivial [1].

### 3. SOLUCIÓN ANALÍTICA DE LAS ECUACIONES DE RESTRICCIÓN DEL MECANISMO DE CUATRO BARRAS

En un mecanismo de cadena cinemática cerrada las ecuaciones de restricción en general no son lineales y generalmente se emplean métodos numéricos para encontrar soluciones aproximadas [12], solamente en algunos casos donde la geometría del mecanismo no es muy compleja se pueden encontrar soluciones analíticas. Una solución analítica del problema de posición del mecanismo de cuatro barras, es derivada del método de lazo vectorial [1].

El objetivo aquí es encontrar una solución analítica alternativa al problema de posición del mecanismo de cuatro barras, lo cual se consigue resolviendo analíticamente las ecuaciones (3) a (8) y cuyo problema se reduce a encontrar los puntos de corte entre dos circunferencias como se muestra en la Fig. 2. El procedimiento para encontrar los puntos de cortes entre dos circunferencias fue tomado de B. Paul [13].

De las ecuaciones (3) y (4) tenemos que,

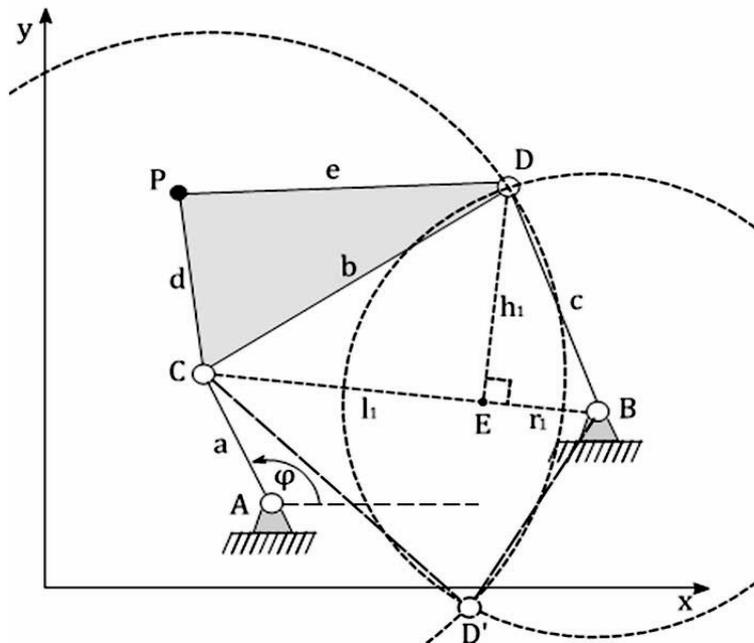


Fig. 2. Configuración abierta y cruzada del mecanismo de cuatro barras.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} A_x + a \cos(\varphi) \\ A_y + a \sin(\varphi) \end{bmatrix} \tag{10}$$

se observa que las ecuaciones (5) y (6) corresponden a un círculo de radio  $b$  con centro en  $\mathbf{C}$  y un círculo de radio  $c$  con centro en  $\mathbf{B}$  como se muestra en la Fig. 2. Por lo tanto  $\mathbf{D}$  es el punto de corte de estas dos circunferencias.

Denotando a  $s$  como la distancia del segmento  $\mathbf{CB}$ , se tiene que:

$$s = \|\mathbf{B} - \mathbf{C}\| = \sqrt{(B_x - C_x)^2 + (B_y - C_y)^2} \tag{11}$$

y de los triángulos  $\mathbf{CDE}$  y  $\mathbf{BDE}$  podemos escribir que  $l_1^2 + h_1^2 = b^2$  y  $r_1^2 + h_1^2 = c^2$ , como  $s = l_1 + r_1$  se resuelve para  $l_1$  de donde se tiene que,

$$l_1 = \frac{b^2 + s^2 - c^2}{2s} \tag{12}$$

$$h_1 = t_1 \sqrt{b^2 - l_1^2} \tag{13}$$

donde  $t_1$  es 1 o  $-1$ .

Por lo tanto

$$\mathbf{E} = \mathbf{C} + \frac{l_1}{s}(\mathbf{B} - \mathbf{C}) \tag{14}$$

notando que  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + \overrightarrow{\mathbf{ED}}$  y  $\overrightarrow{\mathbf{ED}} = \frac{h_1}{s}\mathbf{R}(\mathbf{B} - \mathbf{C})$ , se puede escribir que,

$$\mathbf{D} = \mathbf{C} + \frac{l_1}{s}(\mathbf{B} - \mathbf{C}) + \frac{h_1}{s}\mathbf{R}(\mathbf{B} - \mathbf{C}) \tag{15}$$

donde  $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  que corresponde a una rotación noventa grados del vector  $\overrightarrow{\mathbf{CB}}$ .

Procediendo de igual forma con las ecuaciones (7) y (8) encontramos que:

$$l_2 = \frac{d^2 + b^2 - e^2}{2b} \tag{16}$$

$$h_2 = t_2 \sqrt{d^2 - l_2^2} \tag{17}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{C} + \frac{l_2}{b}(\mathbf{D} - \mathbf{C}) + \frac{h_2}{b}\mathbf{R}(\mathbf{D} - \mathbf{C}) \tag{18}$$

de aquí se tiene que el vector de coordenadas naturales es

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{D} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ D_x \\ D_y \\ P_x \\ P_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x + a \cos(\varphi) \\ A_y + a \sin(\varphi) \\ C_x + \frac{l_1}{s}(B_x - C_x) + \frac{h_1}{s}(C_y - B_y) \\ C_y + \frac{l_1}{s}(B_y - C_y) - \frac{h_1}{s}(C_x - B_x) \\ C_x + \frac{l_2}{b}(D_x - C_x) + \frac{h_2}{b}(C_y - D_y) \\ C_y + \frac{l_2}{b}(D_y - C_y) - \frac{h_2}{b}(C_x - D_x) \end{bmatrix} \tag{19}$$

quedando de esta forma resuelto el problema de posición del mecanismo de cuatro barras. Las configuraciones del mecanismo aquí modelado depende de los valores de  $t_1$  y de  $t_2$ , cuyos valores son 1 o  $-1$ , y por lo tanto hay cuatro configuraciones posibles.

La condición

$$\frac{b^2 + d^2}{l_1^2 + l_2^2} \geq 1 \quad (20)$$

se debe cumplir para que el sistema de ecuaciones (3) a (8) tenga solución o para que el mecanismo se pueda ensamblar.

Las ecuaciones obtenidas para determinar la posición del mecanismo de cuatro barras pueden ser fácilmente implementadas en cualquier software numérico y de esta forma visualizar rápidamente el comportamiento cinemático del mecanismo. En el caso que se requiera aplicar estas ecuaciones a mecanismos compuestos por varios mecanismos de cuatro barras conectados, se usa la ecuación (19) para cada submecanismo por separado para luego encontrar la posición del mecanismo completo.

#### 4. IMPLEMENTACIÓN DE LAS ECUACIONES OBTENIDAS PARA LA SIMULACIÓN DE UN MECANISMO DE CUATRO BARRAS

Las ecuaciones obtenidas fueron implementadas en el software numérico Matlab, para un mecanismo de cuatro barras con las siguientes dimensiones:

$$a = 2 \text{ cm}$$

$$b = c = d = e = 5 \text{ cm}$$

$$A_x = A_y = 0 \text{ cm}$$

$$B_x = 4 \text{ cm}$$

$$B_y = 1 \text{ cm}$$

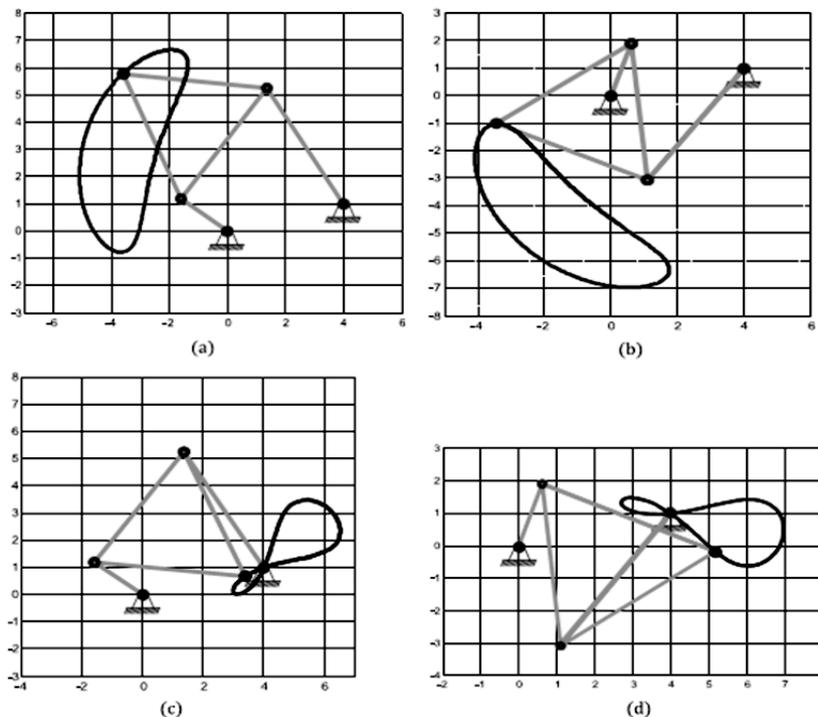


Fig. 3. Simulación del mecanismo de cuatro barras para cada configuración.

y cuya simulación se muestra en la Fig. 3, donde se representan las cuatro configuraciones posibles con su respectiva curva de acoplador generada por el punto **P** del acoplador.

En la Fig. 3-a se muestra una configuración con los valores  $t_1 = 1$  y  $t_2 = 1$ , la configuración para los valores  $t_1 = -1$  y  $t_2 = -1$  se muestra en la Fig. 3-b, en la Fig. 3-c la configuración para los valores  $t_1 = 1$  y  $t_2 = -1$  y por último en la Fig. 3-d la configuración para los valores  $t_1 = -1$  y  $t_2 = 1$ . Las configuraciones abiertas son las mostradas en la Fig. 3-a y la Fig. 3-c, mientras las configuraciones cruzadas se muestran en la Fig. 3-b y la Fig. 3-d.

## 5. CONCLUSIÓN

En este trabajo se presentó el análisis de posición de un mecanismo de cuatro barras, por medio de la utilización de coordenadas naturales, permitiendo encontrar una solución analítica alterna al problema de posición de un mecanismo de cuatro barras, obteniendo ecuaciones simples y fáciles de implementar comparadas con las ecuaciones derivadas del método de lazo vectorial [1]. En cuanto al procedimiento utilizado para solucionar las ecuaciones de restricción se observa que es intuitivo y se puede visualizar fácilmente en la geometría del mecanismo.

Una ventaja que tienen las ecuaciones obtenidas, frente a las ecuaciones derivadas del método de lazo vectorial es que la coordenada del punto del acoplador se hallan directamente sin la necesidad de pre-multiplicar por una matriz de rotación. Y además se evitan todas las complicaciones que conlleva el uso de coordenadas dependientes angulares, y en caso que sea necesario conocer alguna variable angular se puede obtener sin mayor complicación en función de las coordenadas naturales.

Además el uso de coordenadas naturales demuestra ser útil no solamente para la solución del problema de posición utilizando técnicas numéricas sino que además es posible obtener soluciones analíticas que son mucho más útiles a la hora de implementar en un computadora. Por lo cual se pretende en trabajos futuros utilizar las coordenadas naturales para solucionar el problema de posición en mecanismos más complejos que el mecanismos de cuatro barras.

## REFERENCIAS

- [1] Norton, R.L., *Design of Machinery: An Introduction to the Synthesis and Analysis of Mechanisms and Machines*. McGraw-Hill Higher Education (2003)
- [2] Hernández, A., Petuya, V., "Position analysis of planar mechanisms with R-pairs using a geometrical-iterative method," *Mech. Mach. Theory*, **39**(2), 133–152 (2004)
- [3] Mitsi, S., "Position analysis in polynomial form of planar mechanisms with a closed chain of the Assur group of class 4 L'analyse de position sous forme polynomiale des mecanismes plans avec une chaine fermee du groupe d'Assur de 4-eme classe," *Mech. Mach. Theory*, **34**(8), 1195–1209 (1999)
- [4] Mitsi, S., Bouzakis, K-D., Mansour, G., Popescu, I., "Position analysis in polynomial form of class-three Assur groups with two or three prismatic joints," *Mech. Mach. Theory*, **43**(11), 1401–1415 (2008)
- [5] Rojas, N., Dollar, A.M., Thomas, F., "A unified position analysis of the Dixon and the generalized Peaucellier linkages," *Mech. Mach. Theory*, **94**, 28–40 (2015)
- [6] Rojas, N., Thomas, F., "Distance-based position analysis of the three seven-link Assur kinematic chains," *Mech. Mach. Theory*, **46**(2), 112–126 (2011)
- [7] Rojas, N., Thomas, F., "On closed-form solutions to the position analysis of Baranov trusses," *Mech. Mach. Theory*, **50**, 179–196 (2012)
- [8] Romero, N., "Sítese Estrutural e Otimização Dimensional de Mecanismos de Direção," Universidade Federal de Santa Catarina (2014)
- [9] De Jalón, J., Bayo, E., *Kinematic and dynamic simulation of multibody systems*, Springer-Verlag (1994)
- [10] Avello, A., *Teoría de Máquinas*, 2nd ed. Pamplona, España (2014)
- [11] Erdman, A.G., Sandor, G.N., *Mechanism Design: Analysis and Synthesis, Volume 1*, Prentice-Hall International (1997)
- [12] NIKRAVESH, P.E., *Computer-aided analysis of mechanical systems*, Prentice-Hall (1988)

- [13] Paul, B., "Circles and spheres," 1997. [Online]. Available: <http://paulbourke.net/geometry/circlesphere/>. [Accessed: 15-Jan-2016].

### AGRADECIMIENTOS

Al Grupo de Investigación en Ingeniería Mecánica de la Universidad de Pamplona (GIMUP).

### FOUR BAR LINKAGES POSITION ANALYSIS USING NATURAL COORDINATES

**Abstract** – In this article the use of natural coordinates for the formulation of the constraint equations of a four-bar linkages is proposed, to solve the problem of position at analytic form, in order to avoid the complexities of using the traditional method in which angular coordinates are used and where restrictions are derived from the closing condition loop. Was modeled using natural coordinates four-bar linkages with a coupler point, because the desired trajectory of this point is an issue of particular importance in the dimensional synthesis. The restrictions obtained were analytically resolved and then be implemented in the simulation mechanism for each of your configurations. Finally it is concluded that the use of natural coordinates for solving the problem of position of a four-bar linkages, originate constraint equations that can be solved analytically in a simple manner, and thus providing an alternative solution to the problem of position.

**Keywords** – Four-bar linkages, Position analysis, Natural coordinates.