



## DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES EM PLACAS COM ORIFÍCIOS CIRCULARES SUBMETIDAS À FLEXÃO

LUCIANO DE OLIVEIRA CASTRO LARA<sup>1</sup>, CARLOS FRIEDRICH LOEFFLER<sup>2</sup>,  
CARLOS ANDRÉS REYNA VERA-TUDELA<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Engenharia Mecânica, DEM/UFES

Av. Fernando Ferrari, 540, Bairro Goiabeiras, 29075-910, Vitória, ES - Brasil

<sup>2</sup>Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, PPGEM/UFES

Av. Fernando Ferrari, 540, Bairro Goiabeiras, 29075-910, Vitória, ES - Brasil

<sup>3</sup>Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, UFRJ

Km 7, Rodovia BR 465, 23890-000, Seropédica, RJ - Brasil

*(Recibido 11 de julio de 2017, para publicación 29 de septiembre de 2017)*

**Resumo** – A introdução de orifícios, entalhes e rasgos em elementos de máquinas, equipamentos e peças em geral, é procedimento comum, visando atender necessidades funcionais, particularmente o acoplamento entre partes afins. Entretanto, a presença desses incidentes geométricos não apenas diminui a área resistente dos componentes, como promove a ampliação do campo de tensões no seu entorno, demandando atenção especial do projetista quanto a sua resistência estrutural nesses casos. Um problema bastante interessante referente à concentração de tensões é o caso da flexão longitudinal de placas retangulares com orifício circular centralizado. Este possui uma série de características interessantes, sendo o propósito deste trabalho explorá-las através do recurso computacional do Método dos Elementos de Contorno, uma técnica de solução numérica simples e eficiente.

**Palavras-chave** – Concentração de tensão, placas com orifício, análise computacional de placas.

### 1. INTRODUÇÃO

Existe um grande número de pesquisas que investigam o comportamento mecânico de placas com orifício, sendo uma das principais preocupações a avaliação dos fatores de concentração de tensão [1-12].

Muitos dos problemas de concentração de tensões foram analisados através dos métodos matemáticos da teoria da elasticidade [13,14], permitindo levantarem-se importantes relações entre as dimensões da peça e do entalhe, resultando em um correspondente fator para a elevação de tensões.

Apesar dos esforços de pesquisadores [15,16], os quais buscam soluções exatas para tensões, deformações e deslocamentos de uma placa retangular com um orifício circular submetida a um momento de flexão, usando a função de tensão de Airy. Ainda existe uma grande limitação no processo de obtenção da solução analítica nos casos em que a geometria do corpo é mais complexa. Praticamente a totalidade das tabelas específicas de valores de concentração de tensões foram construídas a partir de fontes como Ryan e Fischer [2] e Frocht e Leven [17] onde um esforço considerável de pesquisa foi despendido no desenvolvimento e aplicação de métodos fotoelásticos, com relativo êxito.

As respostas encontradas através dos estudos teóricos e experimentais de placas foram corroboradas através de pesquisas que empregam a solução numérica e a aplicação de métodos de análise computacional de placas. Dentre os vários métodos discretos que foram utilizados para a avaliação dos fatores de concentração de tensão, o método de elementos finitos (FEM) é o mais utilizado para os problemas de placas com furo circular.

O propósito deste trabalho é avaliar o caso da flexão longitudinal de placas com orifício circular centralizado. Este possui uma série de características interessantes referentes ao fator de concentração de tensões. Para tal análise, se fará uso do recurso computacional do Método dos Elementos de Contorno (MEC).

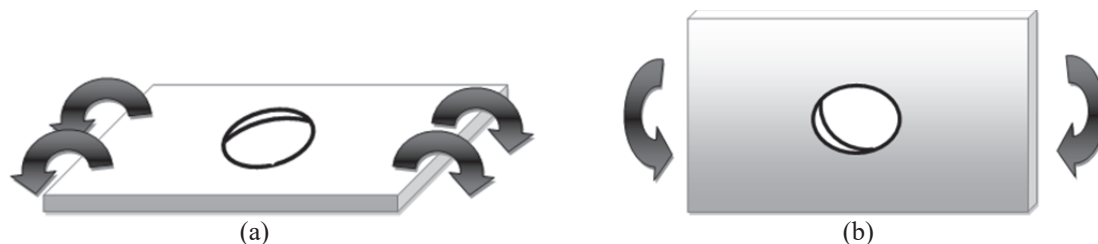


Fig. 1. (a) Placa com orifício circular sob flexão transversa; (b) Placa com orifício circular sob flexão longitudinal.

O Método dos Elementos de Contorno destaca-se dos demais métodos computacionais por ser uma técnica de contorno e não de domínio como as demais. Essa técnica é possível, porque, na formulação do método, o modelo formulado por equações diferenciais parciais, que descrevem o problema físico num domínio espacial e temporal, é convertido em equações integrais envolvendo somente valores de contorno ou condições iniciais [18]. Desta forma, para aplicação computacional em problemas compostos por variáveis espaciais, o processo de discretização só se faz necessário no contorno. Essa característica peculiar do MEC é uma de suas grandes vantagens, pois ao discretizar apenas o contorno, haverá uma menor entrada de dados e embora haja redução no volume dos dados, as operações matemáticas, geralmente, envolvem integrações singulares, fatores estes que, dependendo da extensão do problema, reduzem o esforço computacional.

Para este caso específico, de peças com orifício circular, que podem ser considerados atuando estruturalmente como vigas ou placas, um destaque especial comumente é dado ao caso da flexão transversa, apresentada na Fig. 1(a), pois nessa condição encontram-se alguns dispositivos de larga aplicação prática, como os elementos de molas planas.

Embora menos frequente na engenharia mecânica, mas comum na engenharia estrutural, se encontra o caso similar em que a flexão é longitudinal, ilustrado na Fig. 1(b).

Esse último problema é rico em peculiaridades, que o torna ímpar em todo o conjunto de casos de Mecânica dos Materiais.

Antes de prosseguir nas apresentações das peculiaridades do problema, é necessário melhor detalhar o conceito de fator de concentração de tensão, apresentando as principais definições a esse respeito.

## 2. FATORES DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÃO

Os orifícios, ranhuras e entalhes são aqui denominados de incidentes geométricos, pois considera-se que suas dimensões são relativamente pequenas quando comparadas às principais dimensões da peça. De acordo com essa hipótese, graças ao Princípio de Saint-Venant, a distribuição de tensões em regiões afastadas não são afetadas pelo orifício, obedecendo aos modelos mecânicos prescritos pela resistência dos materiais e ratificados pela teoria da elasticidade (quando tais modelos são disponíveis). No caso de placas, a solução é acessível e bem conhecida, sendo o perfil do tensões normais linear e tendo valor nulo na chamada linha neutra, que é definida pelo centroide da seção transversal da viga. As tensões nessas regiões geometricamente não perturbadas são denominadas nominais e os picos de tensão, que ocorrem nas extremidades superiores da seção reta da viga, são as máximas tensões nominais.

O fator de concentração de tensão  $K_t$  é definido como a relação da tensão máxima,  $S_{max}$ , com a tensão nominal,  $S_{nom}$ , isto é,

$$K_t = \frac{S_{max}}{S_{nom}} \quad (1)$$

Especificamente para o caso de uma placa com orifício circular sob flexão longitudinal, Peterson [19] define tres tipos de fatores de concentração de tensão.

O primeiro é  $K_{tg}$ , esse fator compara a maior tensão atuante na peça, junto ao orifício (posição A mostrada na Fig. 2), com o valor máximo nominal, relativamente distante do incidente geométrico (posição D

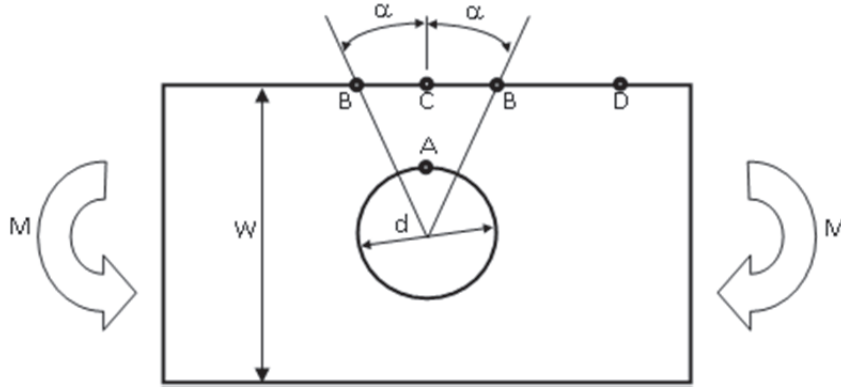
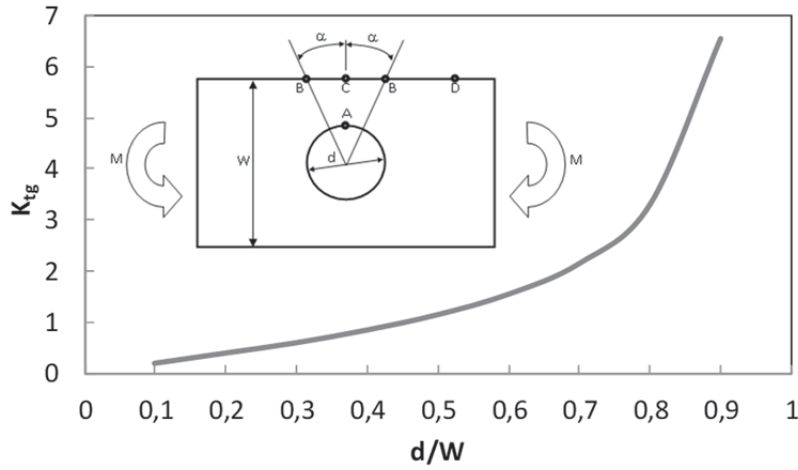


Fig. 2. Placa com orifício circular sob flexão longitudinal.

Fig. 3. Fator de concentração de tensão ( $K_{tg}$ ) em uma placa com orifício circular sob flexão longitudinal [19].

mostrada na Fig. 2). Assim, convém destacar,  $K_{tg}$  é uma razão entre tensões que surgem em áreas resistentes diferentes [19].

Nos casos de solicitação axial, onde as tensões normais se distribuem uniformemente, é fácil avaliar teoricamente que o efeito de um entalhe circular produz um pico de tensões nos pontos localizados na seção reta exatamente junto ao orifício.

Todavia, para o caso de flexão em placas, existe uma distribuição não uniforme de esforço, que resulta nas tensões nominais máximas atuando junto à extremidade superior da seção resistente. Como o orifício se localiza junto às regiões próximas à linha neutra, a identificação do ponto de tensão máxima não é imediata.

De qualquer modo, para efeito de definição,  $S_{max}$  é considerado como o valor de tensão real que ocorre na menor seção reta, junto ao orifício. A Fig. 3 mostra os valores de  $K_{tg}$  em função das dimensões uma placa com orifício circular sob flexão longitudinal.

Como dito anteriormente, o fator de concentração de tensão é definido como a relação da tensão máxima,  $S_{max}$ , com a tensão nominal,  $S_{nom}$ . Howland e Stevenson [20] mostram matematicamente que  $K_{tg}$  é representado por:

$$K_{tg} = \frac{S_{max}}{6M/W^2t} \quad (2)$$

Onde  $M$  é o momento fletor,  $W$  a altura da placa e  $t$  é a espessura da placa.

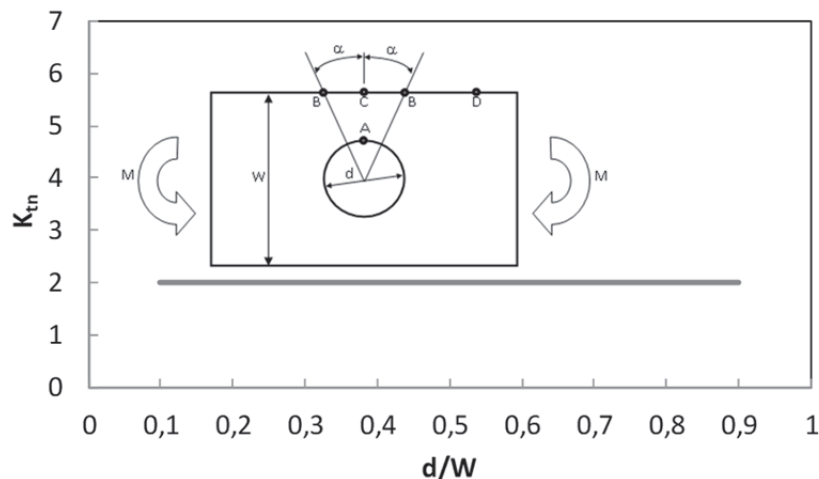


Fig. 4. Fator de concentração de tensão ( $K_m$ ) em uma placa com orifício circular sob flexão longitudinal [19].

Em função da redução da área, devido ao aumento do diâmetro do orifício, as tensões reais na seção crítica crescem bastante. Logo, por envolver pontos pertencentes a seções diferentes,  $K_{tg}$  leva em conta não apenas o efeito da concentração de esforços, mas também a redução da seção reta AC. Nota-se pelo gráfico de  $K_{tg}$ , que para valores de  $d/W$  menores do que 0,45, o entalhe em si não torna a placa mais fraca, mas em termos de projeto  $K_{tg}$  é no mínimo igual a unidade. Em termos práticos, tal fator é pouco utilizado, sendo o preterido pelos coeficientes mostrados a seguir, pois relacionam pontos numa mesma seção.

O segundo fator de concentração de tensão denomina-se de  $K_m$ , o quociente entre a maior tensão real junto ao entalhe (posição A mostrada na Fig. 2) e a tensão nominal correspondente ao raio do orifício  $d/2$ .

A Fig. 4 mostra os valores de  $K_m$  em função das dimensões uma placa com orifício circular sob flexão longitudinal.

Matematicamente que  $K_m$  é representado por:

$$K_m = \frac{S_{\max}}{6Md/(W^3 - d^3)t} \quad (3)$$

Onde  $d$  é o diâmetro do orifício circular.

Percebe-se um resultado surpreendente. O fator de concentração de tensões é sempre igual a 2, para qualquer relação entre altura da viga e o diâmetro do orifício. Concorrem para a ratificação deste resultado trabalhos de pesquisadores como Howland e Stevenson [20] com ferramental matemático, Heywood [21], Ryan e Fischer [2] e Frocht e Leven [17] através de experimentos fotoelásticos.

O terceiro fator de concentração de tensão, não menos importante, denominado  $K'_m$ , compara a tensão máxima no orifício com a tensão máxima nominal na extremidade superior da seção da placa (posição C mostrada na Fig. 2).

O comportamento é ainda bastante curioso, pois  $K'_m$  versus a razão  $d/W$  é uma relação linear, que pode ser expressa por:

$$K'_m = \frac{2d}{W} \quad (4)$$

Por esta última expressão, pode-se perceber que para diâmetros menores do que a metade da altura, o valor de  $K'_m$  é menor do que a unidade, o que significa que a tensão máxima passa ocorrer na posição C (Fig. 2) e não mais junto à superfície do orifício.

Segundo Peterson [19], a Fig. 5 mostra os valores de  $K'_m$  em função das dimensões uma placa com orifício circular sob flexão longitudinal.

Matematicamente que  $K'_m$  é representado por:

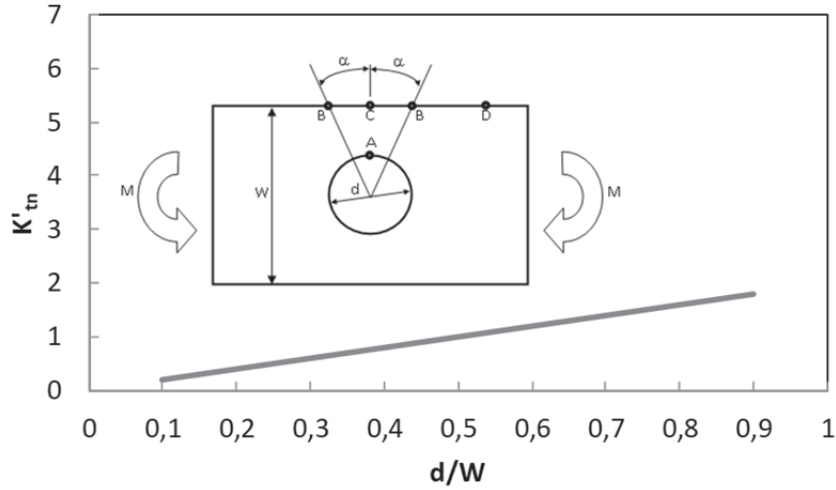


Fig. 5. Fator de concentração de tensão ( $K'_m$ ) em uma placa com orifício circular sob flexão longitudinal [19].

$$K'_m = \frac{S_{\max}}{6 M W / (W^3 - d^3) t} \quad (5)$$

Embora possa parecer que haja um alívio de concentração de tensão junto ao incidente geométrico, essa interpretação não é correta. Ocorre que a definição de  $K'_m$  considera no seu numerador a tensão máxima real no orifício, que se torna menor do que a tensão presente na extremidade superior da seção para diâmetros pequenos, ou seja, menores do que a metade da altura da placa.

Na próxima seção será abordado recurso computacional utilizado neste trabalho, especificamente o Método dos Elementos de Contorno (MEC).

### 3. APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Apesar de sua relativa recentidade, o método dos elementos de contorno encontra-se plenamente consolidado em diversos campos de aplicação, particularmente nos casos pertinentes à Mecânica dos sólidos. O êxito do método pode ser confirmado em abundante literatura especializada, conforme pode ser encontrada a partir da referência [18].

Para a aplicação do método é importante definir a formulação do MEC para elasticidade linear.

A Equação de Navier, que é uma equação de equilíbrio em termo de deslocamentos, é representada em um sistema 2-D como:

$$G u_{j,kk} + \frac{G}{(1-2\nu)} u_{k,kj} + b_j = 0, \quad \text{em } \Omega \quad (6)$$

Onde  $b_j$  representa o efeito de domínio (neste trabalho é considerado o caso onde a de carga de domínio é nula).

O MEC basicamente transforma equações diferenciais parciais, que governam o domínio do problema, em equações integrais envolvendo valores de contorno, após a introdução de funções de ponderação denominadas soluções fundamentais. Considera-se que existe continuidade de deslocamentos nos pontos de contorno  $\zeta$ , desta forma a representação integral da componente  $u_j$  de deslocamento é dada por:

$$C_{ij}(\zeta) u_j(\zeta) + \int_{\Gamma} u_j(x) p_{ij}^*(\zeta; x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} p_j(x) u_{ij}^*(\zeta; x) d\Gamma(x) \quad (7)$$

Onde  $\Gamma$  representa o contorno do problema;  $u_{ij}^*$  e  $p_{ij}^*$  na formulação tradicional correspondem à solução fundamental de Kelvin ( $u_{ij}^K$  e  $p_{ij}^K$ );  $C_{ij}$  é um coeficiente relacionado à geometria do corpo e  $\zeta$  é o ponto fonte.

As soluções fundamentais de Kelvin para problemas bidimensionais são apresentadas por Brebbia, Telles e Wrobel [22] nas equações (8) e (9):

$$u_{ij}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln \left( \frac{1}{r} \right) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right] \quad (8)$$

$$p_{ij}^* = \frac{-1}{4\pi G(1-\nu)r} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} ((1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,j}r_{,i}) - (1-2\nu)(r_{,i}r_{,j} - r_{,j}r_{,i}) \right] \quad (9)$$

Onde  $p_{ij}^*$  e  $u_{ij}^*$  representam as forças de superfície e deslocamentos na direção  $j$  devido a uma força unitária na direção  $i$ ;  $r$  é a distância entre o ponto fonte e o ponto calculado;  $\nu$  é o coeficiente de Poisson e  $G$  é o módulo de cisalhamento.

Segundo Brebbia, Telles e Wrobel [22] é usual em equações integrais de contorno, na elasticidade, começar assumindo a denominada Identidade de Somigliana, dada na equação (10), que nada mais é do que a equação (7) para pontos fonte situados no interior:

$$u_i(\zeta) + \int_{\Gamma} u_j(\zeta) p_{ij}^*(\zeta; X) d\Gamma = \int_{\Gamma} p_j(X) u_{ij}^*(\zeta; X) d\Gamma \quad (10)$$

Derivando esta última expressão em relação às coordenadas do ponto  $\zeta$ :

$$\frac{du_i(\zeta)}{dx_k(\zeta)} = \int_{\Gamma} p_j(X) u_{ij,k}^*(\zeta; X) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} u_j(X) p_{ij,k}^*(\zeta; X) d\Gamma(X) \quad (11)$$

A equação (11) fornece as componentes das deformações específicas que, através da Lei de Hooke, permitem encontrar as tensões nos pontos internos.

Então, pode-se escrever diretamente que a expressão das tensões para os pontos internos é:

$$\sigma_{ij}(\zeta) = \int_{\Gamma} p_k(X) u_{ijk}^*(\zeta; X) d\Gamma(X) - \int_{\Gamma} u_k(X) p_{ijk}^*(\zeta; X) d\Gamma(X) \quad (12)$$

Onde  $u_{ijk}^*$  e  $p_{ijk}^*$  podem ser definidos para duas dimensões como:

$$u_{ijk}^* = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ (1-2\nu)(r_{,j}\delta_{ki} + r_{,i}\delta_{jk} - r_{,k}\delta_{ij}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right\} \quad (13)$$

e

$$\begin{aligned} p_{ijk}^* = & \frac{G}{2\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} \left[ (1-2\nu)r_{,k}\delta_{ij} + \nu(r_{,j}\delta_{ik} + r_{,i}\delta_{jk}) - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] \right. \\ & + 2\nu(n_i r_{,j}r_{,k} + n_j r_{,i}r_{,k}) + (1-2\nu)(\beta n_k r_{,i}r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) \\ & \left. - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

Neste trabalho a técnica utilizada apenas com uma ferramenta de trabalho eficiente para calcular e traçar os perfis das tensões atuantes em diversas partes da placa sob flexão, especialmente junto ao orifício, comparando-os com os resultados obtidos por Peterson [19] e mostrando como se processa a curiosa redistribuição de esforços comentada anteriormente. Cabe ressaltar que a visualização do perfil de distribuição de tensões na seção crítica da placa, para diversas relações  $d/W$ , é inviável de se realizar analiticamen-

te ou experimentalmente, por diversas razões, entre as quais se inclui a complexidade e o custo dessa empreitada.

Sintetizando, no procedimento numérico empregado, faz-se um modelo discretizado do problema, denominado “malha de elementos”, cujo maior refinamento indica garantia de melhor representação do seu comportamento. Por questões ligadas principalmente a relação custo/benefício entre malhas muito refinadas, que resultam em dispêndio computacional elevado, sem acarretar precisão significativa dos resultados, procura-se fazer malhas com número equilibrado de nós. Esses últimos são pontos representativos do corpo, nos quais são colhidos os valores das incógnitas desejadas como solução do problema.

Conforme foi destacado, não é objetivo deste trabalho abordar a peculiaridade do método dos elementos de contorno, e sim utilizá-lo para cumprir os objetivos já expostos.

#### 4. SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Foi considerada uma placa fletida pela ação de dois conjugados  $M$ , iguais e de sentidos opostos, que atuam em um de seus planos principais. Tomando como origem das coordenadas o centróide da seção transversal coincidente com o plano principal da flexão, segundo Fig. 6.

A flexão é simulada através de um carregamento aplicado nas extremidades, formado por tensões normais que variam linearmente a partir da linha neutra. O problema é considerado em estado plano de tensões, e deste modo a espessura da placa é aqui omitida. Os elementos de contorno utilizados são isoparamétricos lineares.

As malhas discretizadas neste problema foram de 224 pontos nodais e 39 pontos internos, conforme mostrado na Fig. 7.

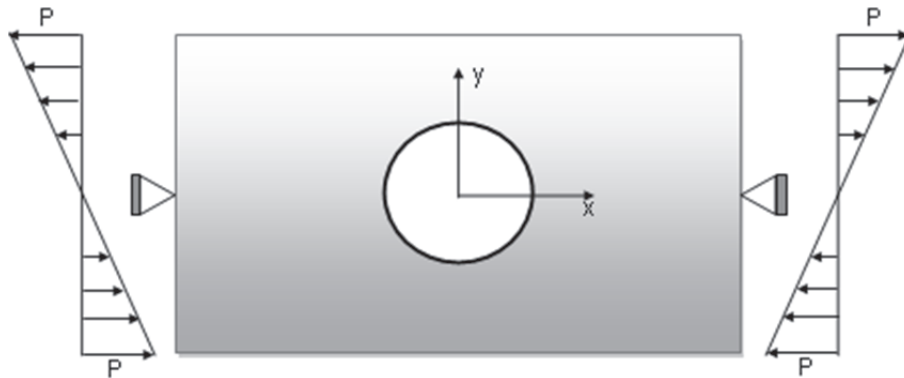


Fig. 6. Placa fletida pela ação de dois conjugados  $M$ , iguais e de sentidos opostos.

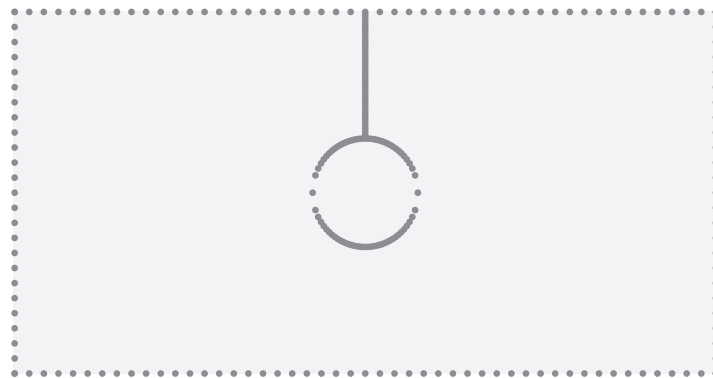


Fig. 7. Placa discretizada em 224 pontos nodais ( $220 + 4$  duplos) e 39 pontos internos.

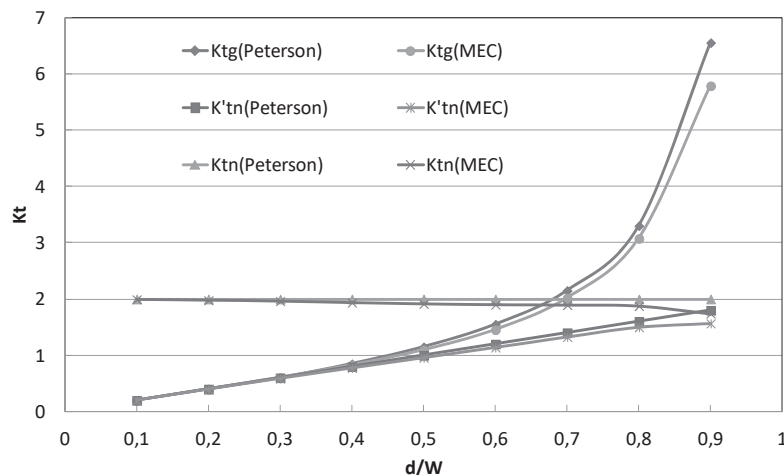


Fig. 8. Comparação entre os valores numéricos obtidos pelo MEC e os valores obtidos por Peterson, [19].

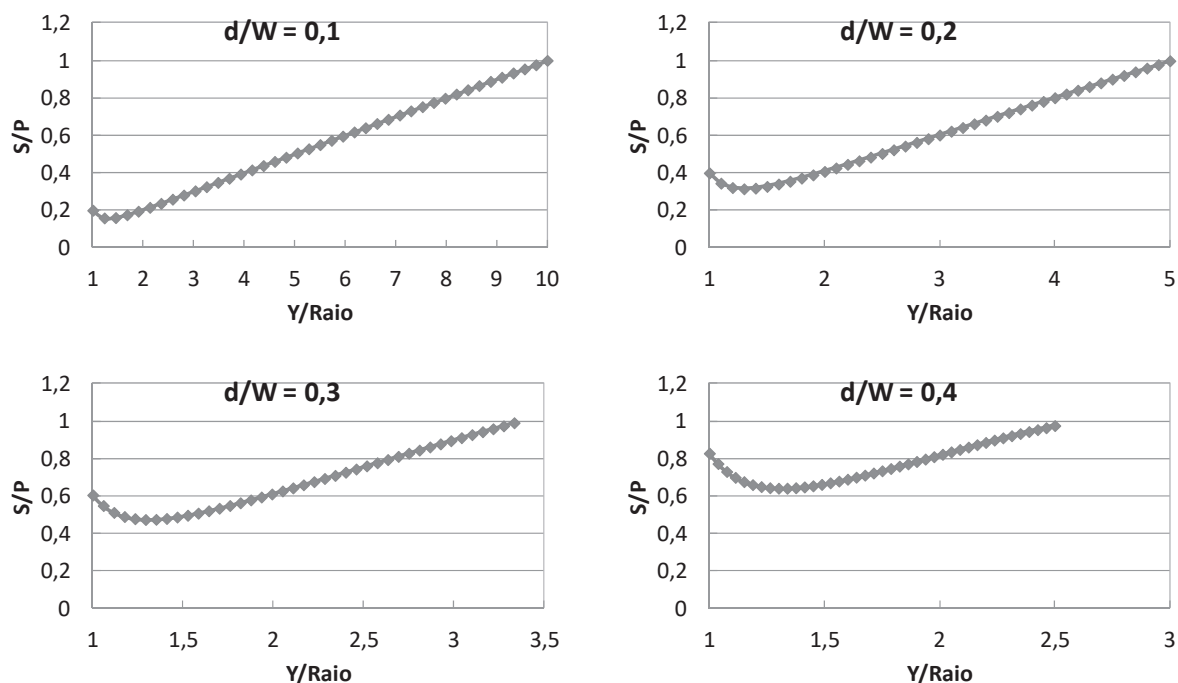


Fig. 9. Perfis de tensão normal, situados entre  $d/W$  igual a 0,1 a 0,4, ao longo da seção resistente.

Primeiramente é apresentada na Fig. 8 a comparação entre os resultados experimentais fotoelásticos para os coeficientes  $K_{tg}$ ,  $K_{tn}$  e  $K'_{tn}$ , colhidos em Peterson [19], e os valores numéricos obtidos com o método dos elementos de contorno.

Os resultados apresentam-se bastante bons. Embora a precisão dos mesmos se reduza para os maiores valores de  $d/W$ , ainda encontram-se dentro de uma precisão bastante satisfatória.

Não obstante o interessante na comparação realizada, o objetivo deste trabalho é traçar a distribuição de tensões ao longo da menor seção resistente, perturbada pela presença do orifício. Uma vez constatado que estejam bem representados valores de tensão máxima, usadas para compor os coeficientes de concentração de tensão apresentados, pode-se confiar na precisão dos valores de tensão em pontos intermediários.

Nas Fig. 9, 10 e 11 que se seguem são mostrados os perfis de tensão normal ( $S$ ) ao longo da seção resistente, de coordenada  $Y$ , para valores variáveis do diâmetro  $d$  do orifício. Os valores se situam entre a razão  $d/W$  mínima igual a 0,1 e máxima de 0,9.



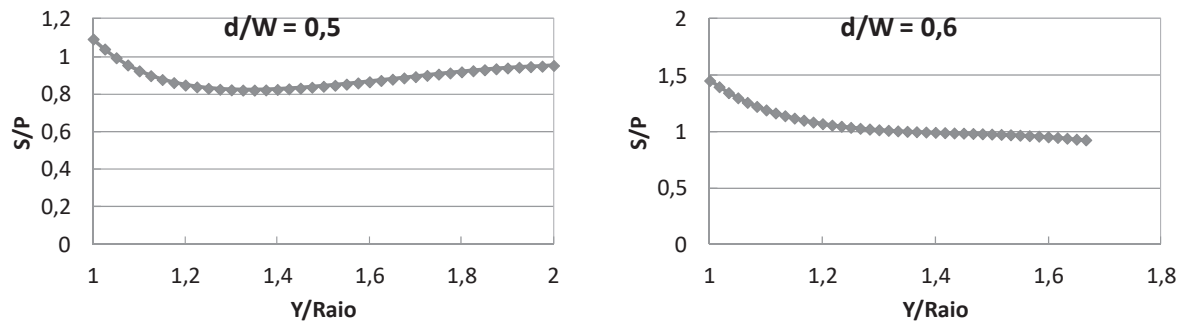


Fig. 10. Perfis de tensão normal,  $d/W$  igual a 0,5 e 0,6, ao longo da seção resistente.

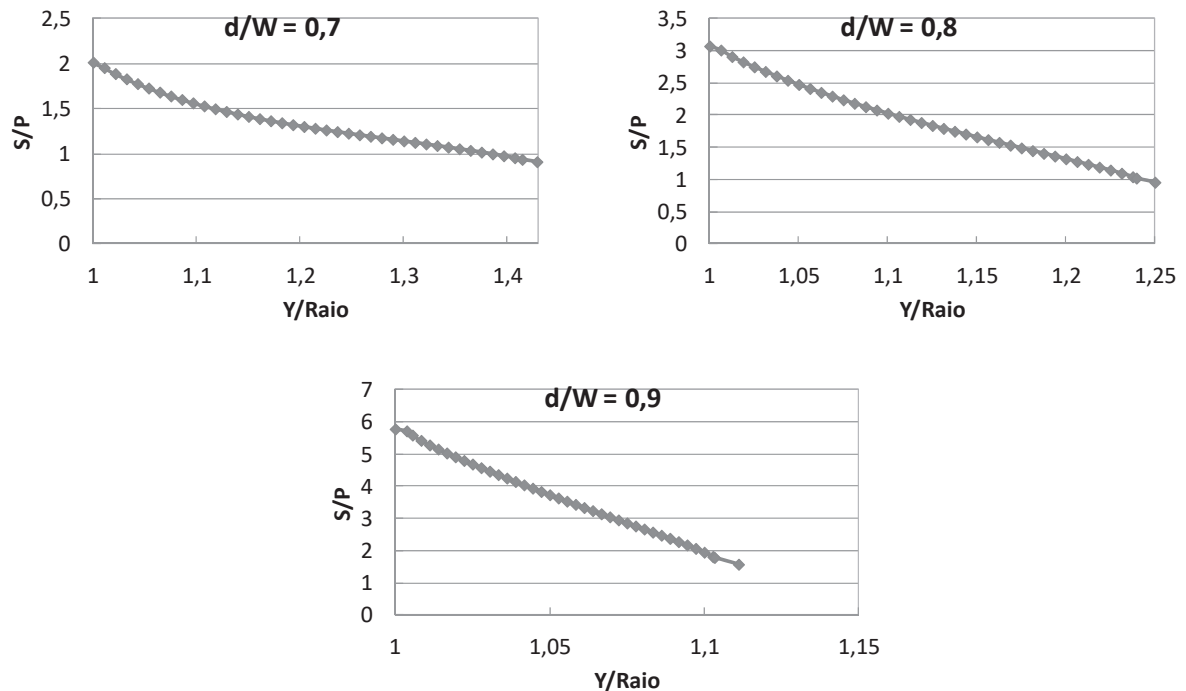


Fig. 11. Perfis de tensão normal, situados entre  $d/W$  igual a 0,7 a 0,9, ao longo da seção resistente.

Os perfis de tensão situados entre  $d/W$  igual a 0,1 a 0,4 (Fig. 9) mostram que para diâmetros menores do que a metade da altura, a tensão máxima ocorre junto a superfície externa da placa e não junto à superfície do orifício. Contudo, verifica-se que essa diferença diminui a medida que o diâmetro do orifício aumenta.

E essa diferença praticamente não existe quando o diâmetro do orifício se aproxima de um valor próximo da metade da altura da placa, como mostrado na Fig. 10 para uma razão  $d/W$  igual a 0,5, mas logo em seguida, para uma razão  $d/W$  igual a 0,6 (Fig. 10), a tensão máxima passa a ocorrer junto à superfície do orifício.

A partir da razão  $d/W$  igual a 0,7 até 0,9 a tensão máxima que ocorre junto à superfície do orifício só aumenta juntamente com o do diâmetro do orifício.

Além dos perfis de tensão normal ( $S$ ) ao longo da seção resistente AC (Fig. 2), foram avaliadas as tensões no segmento CE (Fig. 12). De acordo com Peterson [19] o ângulo  $\alpha = 30^\circ$  é independente da relação  $d/(d-W)$  no intervalo investigado.

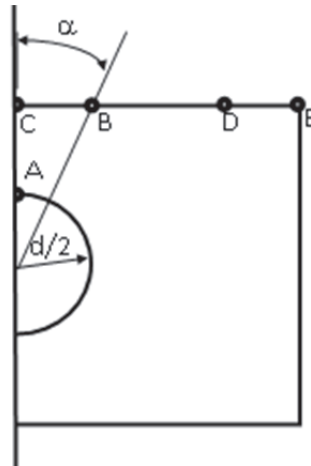


Fig. 12. Posições relevantes na placa com orifício circular sob flexão longitudinal.

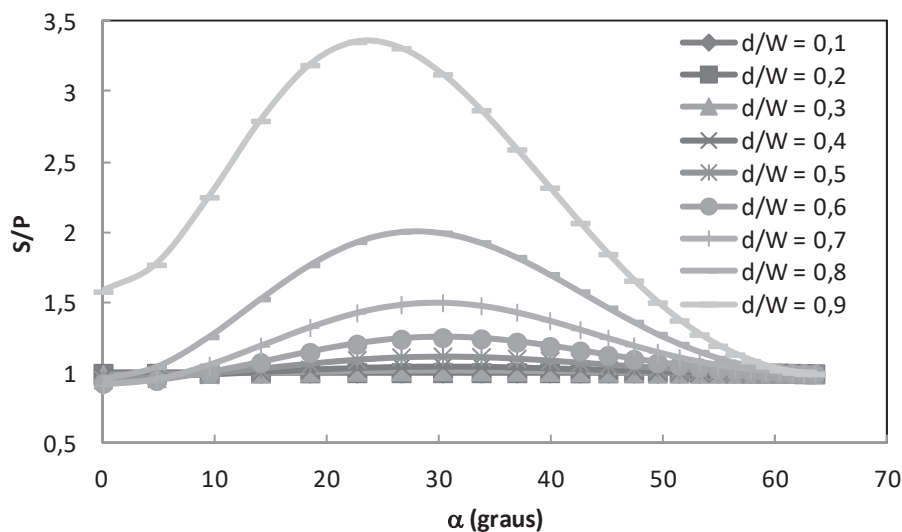


Fig. 13. Tensões normais ao longo da superfície da placa, obtidas por meio do MEC.

Os resultados obtidos por meio do MEC para as tensões normais ( $S$ ) na posição de  $\alpha = 30^\circ$  são mostrados na Fig. 13.

Para as razões  $d/W$  variando de 0,1 a 0,7 a tensão máxima é sempre atingida para um ângulo  $\alpha = 30^\circ$ , de acordo com a teoria de Peterson [19], contudo para as razões 0,8 e 0,9 as tensões máximas tendem para a posição C, ocorrendo em ângulos de  $27^\circ$  e  $23^\circ$  respectivamente, a perda de precisão que pode ser justificada pelo aumento dos valores de  $d/W$ , mas ainda com resultados bastante satisfatórios.

Conforme já exposto anteriormente, o fator de concentração de tensão  $K'_{tn}$  versus a razão  $d/W$  é uma relação linear, que pode ser expressa por  $2d/W$ . Para este mesmo caso, onde a tensão  $S_{nom}$  na posição C (Fig. 12) foi determinada matematicamente, verifica-se que a  $S_{nom}$  calculada é aproximadamente igual a  $S_{max}$  na posição B, determinada pelo MEC. De forma que pode-se dizer que o fator  $K'_{tn}$  também pode ser determinado pela relação seguinte:

$$K'_{tn} = \frac{S_{max}^A}{S_{max}^B} \quad (15)$$

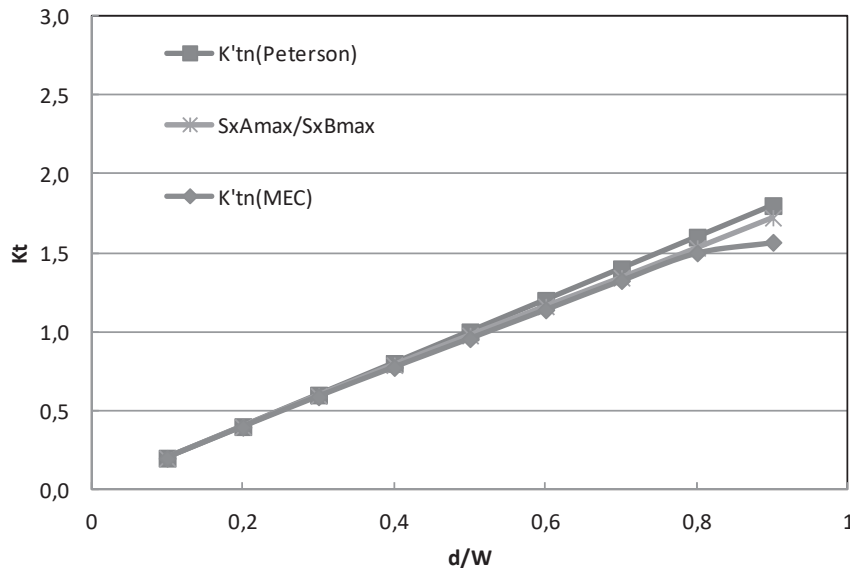


Fig. 14. Comparação entre os valores  $K'_t$  obtidos pelo MEC, os obtidos por Peterson [19] e os obtidos por meio da relação  $S_{x\text{Amax}}^A/S_{xB\text{max}}^B$ .

A Fig. 14 apresenta estes resultados e compara com os resultados obtidos pelo MEC assim como os mostrados por Peterson [19]. Nota-se que os resultados, considerando a relação mostrada na equação (15), são muito bons.

## 5. CONCLUSÕES

A aplicação dos métodos numéricos discretos representa um grande avanço tecnológico. A reprodução de resultados desta natureza, envolvendo análise de concentração de tensões, quando feita pelas técnicas experimentais convencionais, é extremamente difícil e custosa. No entanto, com os modernos recursos computacionais, é uma tarefa relativamente simples, que se torna a cada dia mais acessível e confiável.

A simulação computacional do problema permitiu observar mais alguns fatos interessantes, que vem assim se somar aos já discutidos anteriormente. Pode-se perceber que a intensidade da tensão, junto à extremidade superior da seção, permanece praticamente inalterada para quaisquer valores de  $d/W$ , não obstante a seção reta se reduzir e os momentos fletores aplicados serem constantes.

Também percebe-se que para valores  $d/W$  grandes, particularmente o colhido para uma razão 0,9, a distribuição de tensões na seção reta AC aproxima-se de uma forma linear, onde a tensão máxima que ocorre junto à superfície do orifício aumenta juntamente com o do diâmetro do mesmo.

A simulação computacional do problema também permitiu avaliar as tensões normais ( $S$ ) que ocorrem ao longo da superfície da placa e verificar que especificamente na posição de B da placa ocorrem as máximas tensões, e que essas tensões são aproximadamente iguais as tensões nominais na posição C.

Essas novas observações vêm reforçar o caráter atípico do problema de flexão transversal em vigas com orifício circular, caso único em toda a casuística da mecânica dos sólidos. Isso significa uma demanda de atenção redobrada nos projetos em que o modelo físico concebido em projeto se aproxima do caso citado, para que haja o adequado aproveitamento da capacidade resistiva do componente sem qualquer comprometimento da segurança do mesmo.

## AGRADECIMIENTOS

Esta pesquisa foi apoiada pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - *CNPq* (Brasil).

## REFERÊNCIAS

- [1] Goodier, J.N., "The Influence of Circular and Elliptical Holes on the Transverse Flexure of Elastic Plates", *Philosophical Magazine and Journal of Science*, **22**(145), 69-80 (1936)
- [2] Ryan, J.J. Fischer, L.J., "Photoelastic analysis of stress concentration for beams in pure bending with a central hole", *Journal of the Franklin Institute*, **225**(5), 513-526 (1938)
- [3] Lo, C.C., Leissa, A.W., "Bending of Plates With Circular Holes", *Acta Mechanica*, **4**, 64-78 (1967)
- [4] Lee, C.W., Conlee, G.D., "Bending and twisting of thick plates with a circular hole", *Journal of the Franklin Institute*, **285**, 377-385 (1968)
- [5] Schijve, J., Fraga, W.E., Hewitt, R.L., "Comparison of an engineering estimate with a numerical solution for the stress concentration factor of a hole near a circular edge notch", *International Journal of Fatigue*, **8**(3), 111-118 (1986)
- [6] Bert, C.W., "Generalized Bending of a Large Plate Containing a Circular Hole", *Mechanics Research Communications*, **15**(1), 55-60 (1988)
- [7] Pilkey, W.D., *Peterson's stress concentration factors*, 2nd ed. John Wiley and Sons, New York (1997)
- [8] Young, W.C., Budynas, R.G., *Roark's formulas for stress and strain*, 7th ed. McGraw-Hill, New York (2002)
- [9] Paloto, J.C., Santos, R.D., Dominguez, P., "Stress concentration factors for a circular hole in curved beams under bending loads", *Blackwell Publishing Ltd j Strain*, **39**, 27-30 (2003)
- [10] Kubair, D.V., Bhanu-Chandar, B., "Stress concentration factor due to a circular hole in functionally graded panels under uniaxial tension", *International Journal of Mechanical Sciences*, **50**, 732-742 (2008)
- [11] Yang, Z., Kim, C.B., Beom, H.G., Cho, C., "The stress and strain concentrations of out-of-plane bending plate containing a circular hole", *International Journal of Mechanical Sciences*, **52**, 836-846 (2010)
- [12] Padhiyar, B., Sharma, P.K., Mishra, Y., "Experimental Stress Analyses For Simply Beam Having Opposite Elliptical Notch In ANSYS-12.0", *International Journal of Advanced Technology in Engineering*, **2**(5), 287-291 (2014)
- [13] Kirsch, E.G., "Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre", *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, **42**, 797-807 (1898)
- [14] Timoshenko, S.P., Goodier, J.N., *Teoria da elasticidade*, 3 ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois (1980)
- [15] Kang, J.H., "Exact solutions for stresses, strains, and displacements of a rectangular plate with an arbitrarily located circular hole subjected to in-plane bending moment", *International Journal of Mechanical Sciences*, **89**, 482-486 (2014)
- [16] Woo, H.Y., Leissa, A.W., Kang, J.H., "Exact solutions for stresses, strains, displacements, and the stress concentration factors of a perforated rectangular plate by a circular hole subjected to in-plane bending moment on two opposite edges", *Journal of Engineering Mechanics*, **140**(6), 1-8 (2014)
- [17] Frocht, M.M., Leven, M.M., "Factors of Stress Concentration for Slotted Bars in Tension and Bending", *Journal of Applied Mechanics*, **18**(1), 107-115 (1951)
- [18] Brebbia, C.A., Walker, S., *Boundary Element Techniques in Engineering*, Newnes-Butterworths, London (1980)
- [19] Peterson, R.E., *Stress concentration factor*, New York: John Wiley and Sons (1974)
- [20] Howland, R.C.I., Stevenson, A.C., "Bi-harmonic analysis in a perforated strip", *Philosophical Transactions of the Royal Society*, **A232**, 707-720 (1933)
- [21] Heywood, R.B., *Desing Against Fatigue of Metal*, Reinhold Publishing Corporation (1962)
- [22] Brebbia, C.A., Telles, J.C.F., Wrobel, L.C., *Boundary Element Techniques*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg (1984)

## STRESS ANALYSIS OF PLATES WITH CIRCULAR HOLES IN PLANE BENDING

**Abstract** – Holes, notches, fillets and grooves are geometrical incidents which have special function in machine elements, structures and others equipment. On the other hand, them produces stress peaks or stress concentra-

tion. Engineers and mechanical designers must be cautious and to pay attention with this effect. Longitudinal bending of rectangular plate with central circular hole is a very interesting kind of stress concentration problem. It has many different features those need to be studied carefully. The most important is the curious result that the stress concentration factor is independent of the relative size of the hole, and forms the only known case of a notch showing such independence. This paper purposes to make a study about the stress distribution using the Boundary Element Method, an efficient and easy numerical technique to analyze solid mechanics and engineering problems in general. Results are discussed carefully and they are presented in graphical form, to make easy their understanding.

**Keywords** – Stress concentration, Plate with central circular, Computational analysis of plates.

