



# CONTROL DEL ERROR DE TRANSMISIÓN CUASI-ESTÁTICO MEDIANTE REBAJE DE PUNTA EN ENGRANAJES RECTOS DE PERFIL DE EVOLVENTE

JOSÉ I. PEDRERO, MIGUEL PLEGUEZUELOS, MIRYAM B. SÁNCHEZ

UNED

Departamento de Mecánica  
Juan del Rosal 12, 28040 Madrid, España

(Recibido 30 de marzo de 2018, para publicación 15 de julio de 2018)

**Resumen** – En este trabajo se presenta un estudio de la influencia de la modificación del perfil en el reparto de carga y en la función de errores de transmisión, para engranajes rectos de perfil de evolvente. Se ha desarrollado un método de cálculo de la rigidez de la pareja de dientes con perfil modificado, válido para cualquier profundidad, longitud y forma de rebaje, incluido naturalmente el caso de ausencia de rebaje, y para contacto dentro o fuera de la línea de presión. A partir de la variación de la rigidez a lo largo del intervalo de engrane se han obtenido las curvas de variación del reparto de carga y del ángulo de retraso. Para ambas se han desarrollado fórmulas aproximadas sencillas que permiten la resolución del problema inverso, es decir la ecuación del rebaje requerido para una curva de reparto de carga o de error de transmisión predefinida.

**Palabras clave** – Engranajes rectos, rigidez de engrane, error de transmisión, reparto de carga, rebaje de punta.

## 1. INTRODUCCIÓN

Las deformaciones que experimentan los dientes de engranaje cuando transmiten carga inducen un desfase en el giro de ambas ruedas, de manera que la rueda conducida se retrasa respecto de la conductora, o lo que es lo mismo, respecto de la posición teórica que debía ocupar si la acción fuera idealmente conjugada. Este desfase provoca que la base del diente de la rueda conductora golpee la cabeza del diente de la rueda conducida antes del punto de inicio de contacto teórico, y por supuesto fuera de la línea de presión. Se produce, en definitiva, un choque entre ambos dientes, que es fuente de ruido, vibraciones y carga dinámica, y que reduce la capacidad de carga y la vida útil de la transmisión.

Este tipo de problemas se puede abordar mediante la modificación del perfil de los dientes. En efecto, un rebaje en la punta del diente conducido evitará el contacto prematuro con la base del diente conductor; y si el rebaje es el adecuado, el inicio del contacto se retrasará hasta el punto apropiado –el punto de inicio de contacto teórico–, asegurando un inicio de engrane suave. Sin embargo, esta modificación en la geometría del perfil puede tener influencia en la rigidez de la pareja de dientes; y ello no tanto por la insignificante variación geométrica –por lo general, de pocas micras– como por la influencia de esta variación en las condiciones de contacto, que pueden alterar parámetros de la transmisión tan importantes como el reparto de carga entre parejas de dientes en contacto simultáneo o el error de transmisión.

La modificación del perfil y su influencia en las condiciones de engrane ha venido siendo objeto de estudio e investigación desde bastante tiempo atrás. Lin *et al.* [1] presentaron en 1994 un estudio de la influencia de la profundidad y longitud de la modificación de perfil en la carga dinámica de dientes rectos, considerando modificaciones tanto lineales como parabólicas. Beghini *et al.* [2] desarrollaron un método iterativo para la reducción del error de transmisión mediante la modificación del perfil, también para engranajes rectos, que combinaba estudios por elementos finitos en dos dimensiones y técnicas de cálculo semianalíticas. Wang y Howard [3, 4] estudiaron la rigidez del engrane, incluyendo dientes con perfiles modificados. Tamminana *et al.* [5] estudiaron la relación entre los factores dinámicos y el error de transmisión dinámico mediante modelos de elementos finitos. Tavakoli y Houser [6] presentaron un algoritmo

para minimizar diferentes combinaciones de armónicos del error de transmisión mediante diferentes combinaciones de rebajes de punta y de base, para engranajes rectos exteriores e interiores, estándar y de alto grado de recubrimiento. Li [7] desarrolló un análisis por elementos finitos de las tensiones de rotura en la base y de contacto en engranajes rectos con errores de fabricación y montaje y con modificaciones de perfil. La misma técnica de elementos finitos fue utilizada por Tesfahunegn *et al.* [8] para estudiar la influencia de la forma de la modificación del perfil en las tensiones y el error de transmisión.

La relación entre la rigidez del engrane, el error de transmisión, la respuesta dinámica y la modificación del perfil continúa siendo objeto de estudio en la actualidad. Vexlex *et al.* [9] presentaron una serie de desarrollos teóricos para demostrar que la fluctuación del error de transmisión en el ciclo de engrane depende estrechamente de la longitud, profundidad y forma del rebaje del perfil. Bruyere y Vexlex [10] obtuvieron expresiones cerradas aproximadas para el rebaje del perfil que proporciona fluctuaciones mínimas del error de transmisión cuasi-estático bajo carga, mediante el método de las perturbaciones. Chen y Shao [11] desarrollaron un método de cálculo de la rigidez del engrane y el reparto de carga entre dientes de engranajes rectos con perfil modificado. Bruyere *et al.* [12] presentaron formulaciones analíticas para la longitud y profundidad de las modificaciones de perfil simétricas que minimizan las fluctuaciones del error de transmisión cuasi-estático en engranajes rectos y helicoidales de pequeña anchura. Li [13] estudió el efecto de los errores de alineación y las modificaciones del perfil en el engrane de dientes rectos. Ghosh y Chakraborty [14] analizaron la influencia de las modificaciones del perfil en la reducción de los niveles de vibración, en dentaduras rectas.

Recientemente, los autores [15] han presentado un estudio de la influencia de la modificación del perfil en la rigidez del engrane y el reparto de carga, para engranajes rectos estándar y de alto grado de recubrimiento. El desarrollo está basado en trabajos anteriores [16-19] en los que se obtuvo una expresión aproximada sencilla de la variación de la rigidez del engrane a lo largo del intervalo de contacto, que se expresa en función únicamente del grado de recubrimiento transversal. Se estudió la deformación de la pareja de dientes y el reparto de carga entre parejas en función de la carga total, obteniéndose una expresión del ángulo de adelanto del inicio de engrane, y de retraso de la finalización de engrane, para el caso de dientes sin modificación, así como la curva de transferencia de carga entre dientes, tanto en la zona de contacto no conjugado como en el interior del intervalo de contacto teórico. Asimismo, y una vez determinado el ángulo de retraso de la rueda conducida respecto de la conductora en cada posición del intervalo de engrane, se obtuvo la distribución de carga entre parejas de dientes con perfil modificado a partir de una deformación en cada pareja obtenida por diferencia entre la deformación correspondiente al ángulo de desfase y la profundidad de rebaje de perfil en el punto considerado. De esta manera se obtuvo una ecuación cerrada, relativamente sencilla, que permite obtener el reparto de carga en función de la modificación de perfil introducida, pero también la modificación de perfil requerida para una curva de reparto de carga preestablecida.

Dado que el ángulo de retraso de la rueda conducida es diferente en cada punto de la línea de engrane, la velocidad de rotación de esta rueda sufre fluctuaciones cíclicas, aun cuando la velocidad de la rueda conductora fuese perfectamente uniforme y se trabajara en ausencia de errores de fabricación y montaje. Esta fluctuación de la velocidad de salida es lo que se conoce como error de transmisión cuasi-estático, que al inducir cambios de velocidad, y por tanto aceleraciones y deceleraciones en la rueda conducida, es origen de sobrecarga dinámica y vibraciones. En el presente trabajo, y a partir de los fundamentos y desarrollos presentados en [15], se estudia la curva de error de transmisión cuasi-estático para engranajes rectos con y sin modificación de perfil. Se obtiene una ecuación que relaciona el error de transmisión con la ecuación del perfil modificado, cuya expresión resulta lo suficientemente sencilla como para abordar el problema inverso, de obtener la ecuación de la modificación del perfil a partir de la curva de error de transmisión preestablecida.

## 2. DIENTES SIN MODIFICACIÓN

En el presente apartado se describe el contacto entre dientes rectos sin modificación de perfil, cuando trabajan en condiciones de carga. El objetivo, obviamente, es establecer las bases del estudio del contacto cuando se introducen modificaciones en el perfil, que se desarrolla en los siguientes apartados. Puesto que

nada de ello es nuevo, la presentación será bastante concisa, orientada exclusivamente a lo que pueda ser necesario para posteriores desarrollos. Un análisis detallado, no obstante, puede encontrarse en las referencias [15-19].

En lo que sigue, será necesario hacer referencia a los engranajes de la transmisión, como piñón y rueda –con número de dientes menor y mayor, respectivamente– en determinadas ocasiones, y como ruedas conductora y conducida, en determinadas otras. Puesto que el análisis es válido tanto para cajas reductoras como multiplicadoras, y con el fin de no incurrir en incongruencias en la nomenclatura, en adelante piñón y rueda se designarán con los subíndices  $p$  y  $w$ , y las ruedas conductora y conducida con los subíndices 1 y 2.

### 2.1. Rigidez del engrane

La rigidez del engrane  $K_M$  se puede expresar como [19]:

$$K_M = \left( \frac{1}{k_{xp}} + \frac{1}{k_{sp}} + \frac{1}{k_{np}} + \frac{1}{k_{xw}} + \frac{1}{k_{sw}} + \frac{1}{k_{nw}} + \frac{1}{k_H} \right)^{-1} \tag{1}$$

donde  $k_x$ ,  $k_s$  y  $k_n$  son las rigideces a flexión, a cortadura y a compresión, y  $k_H$  es la rigidez de contacto, también llamada de Hertz. Estas rigideces se pueden calcular mediante las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_x} &= \frac{12}{Eb} \int_{y_p}^{y_c} \left[ (y_c - y) \cos \alpha_c - r_c \operatorname{sen} \frac{\gamma_c}{2} \operatorname{sen} \alpha_c \right]^2 \frac{dy}{e^3(y)} \\ \frac{1}{k_n} &= \frac{1}{Eb} \int_{y_p}^{y_c} \operatorname{sen}^2 \alpha_c \frac{dy}{e(y)} \\ \frac{1}{k_s} &= C_s \frac{1}{Gb} \int_{y_p}^{y_c} \cos^2 \alpha_c \frac{dy}{e(y)} \\ k_H &= \frac{\pi}{4} \frac{Eb}{1-\nu^2} \end{aligned} \tag{2}$$

en las cuales  $E$  es el módulo de elasticidad del acero,  $G$  el módulo de elasticidad transversal,  $\nu$  el módulo de Poisson,  $b$  el ancho de cara y  $C_s$  el factor de corrección del potencial por cortadura, que tiene en cuenta la distribución de esfuerzos cortantes en la sección –que, de acuerdo con el teorema de Colignon, no es uniforme –, y que para sección rectangular vale  $C_s = 1,2$ . El resto de parámetros que intervienen hacen referencia a las dimensiones que se muestran en la Fig. 1, en la que el subíndice  $c$  designa el punto de contacto  $C$  y  $r_b$  es el radio de base.

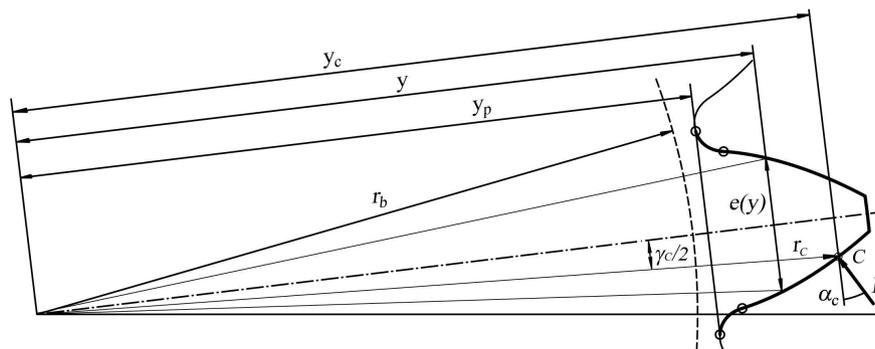


Fig. 1. Geometría del diente de perfil de evolvente.

Obviamente, la rigidez  $K_M$  depende del punto de contacto, y en consecuencia se podrá expresar en función de cualquier parámetro que defina dicho punto. En este trabajo se utiliza el parámetro  $\xi$  que, referido al punto de contacto  $C$  se define como:

$$\xi_c = \frac{z}{2\pi} \sqrt{\frac{r_c^2}{r_b^2} - 1} \quad (3)$$

Como los parámetros  $\xi$  de los puntos de contacto de piñón y rueda,  $\xi$  y  $\xi_w$ , respectivamente, están relacionados por la ecuación:

$$\xi_w + \xi = \lambda = \frac{z_2 + z_1}{2\pi} \operatorname{tg} \alpha'_t \quad (4)$$

en la que  $\alpha'_t$  es el ángulo de presión transversal de operación, la rigidez de contacto se podrá expresar en función únicamente del parámetro del punto de contacto del piñón, de manera que:

$$K_M = K_M(\xi) \quad (5)$$

Uno de los resultados más interesantes de los trabajos anteriores [16-19] es que la variación de la rigidez a lo largo del intervalo de engrane toma siempre un aspecto como el de la Figura 2a, lo que permitió obtener una expresión aproximada sumamente sencilla y de elevada precisión, de la forma [19]:

$$K_M(\xi) = K_{M \max} \cos(b_0(\xi - \xi_m)) \quad (6)$$

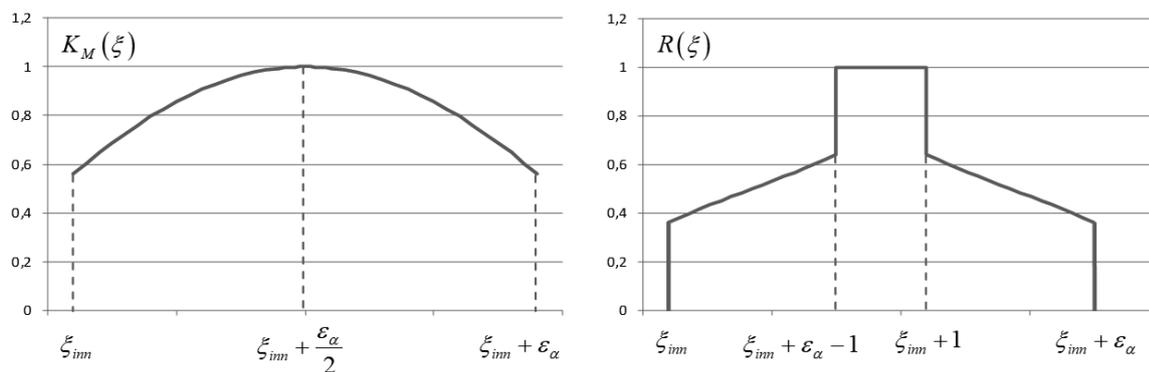
donde:

$$b_0 = \left[ \frac{1}{2} \left( 1.11 + \frac{\varepsilon_\alpha}{2} \right)^2 - 1.17 \right]^{-1/2}$$

$$\xi_m = \xi_{inn} + \frac{\varepsilon_\alpha}{2} \quad (7)$$

siendo  $\varepsilon_\alpha$  el grado de recubrimiento y el subíndice *inn* designa el punto inferior de contacto del piñón. Esta ecuación es válida para dientes con altura de cabeza igual al módulo  $m$  y holgura radial de funcionamiento nominal. Para diferentes valores de estos parámetros, la ecuación (6) sigue siendo válida, pero se han de emplear unos valores ficticios de  $\varepsilon_\alpha$  y de  $\xi_{inn}$  [18].

El valor de  $K_{M \max}$ , a día de hoy, todavía no ha sido estudiado en profundidad por ningún autor. Cabe plantearse buscar una ecuación aproximada que contemple la influencia de todos los parámetros geomé-



(a) Rigidez de engrane (b) Coeficiente de reparto

Fig. 2. Contacto entre dientes sin modificación de perfil.

tricos del diente, aunque el trabajo promete complejidad por el elevado número de ellos que intervienen, para todos los cuales se habría de encontrar algún tipo de correlación. Sin embargo, incluso sin conocer el valor de  $K_{M \max}$ , la ecuación (6) se revela de enorme utilidad, por dos razones: primero, porque el valor de  $K_{M \max}$  se podría obtener mediante un único estudio por elementos finitos (por ejemplo, cuando el contacto se produce en el punto primitivo de funcionamiento), o un único proceso de integración numérica de las ecuaciones (2), en ambos casos con un coste computacional pequeño; y segundo, porque para muchos de los cálculos que se realizan con la rigidez, ese valor de  $K_{M \max}$  no es necesario, como se mostrará a continuación.

### 2.2. Reparto de carga

El reparto de carga entre parejas de dientes en contacto simultáneo se representa por la ecuación:

$$R_i = \frac{F_i(\xi)}{F_T} = \frac{K_{M_i}(\xi)}{\sum_j K_{M_j}(\xi)} \tag{8}$$

donde  $R$  es el coeficiente de reparto,  $F$  la fuerza transmitida por la pareja de dientes,  $F_T$  la fuerza total transmitida, y los subíndices  $i$  y  $j$  hacen referencia a la pareja de dientes considerada y a todas las parejas de dientes en contacto simultáneo en el instante considerado, respectivamente. Se comprueba que, efectivamente, el reparto de carga, y por tanto el estado tensional del diente, no depende del valor de  $K_{M \max}$ .

Por otro lado, la diferencia de los parámetros  $\xi$  correspondientes a los puntos de contacto de dos parejas de dientes consecutivas es igual a 1 [16, 17], de manera que la ecuación (8) se puede expresar también como:

$$R_i(\xi) = \frac{F_i(\xi)}{F_T} = \frac{K_M(\xi)}{\sum_j K_M(\xi + (j - i))} \tag{9}$$

Reemplazando la ecuación (6) en la ecuación (9) se obtiene en coeficiente de reparto de carga de manera muy sencilla. Para el caso de engranajes rectos estándar, con grado de recubrimiento entre 1 y 2, el coeficiente de reparto se representa mediante el diagrama de la Figura 2b.

### 2.3. Error de transmisión

Recordando la definición de rigidez y teniendo en cuenta la ecuación (8), se tiene que la deformación de una pareja de dientes en la dirección de la fuerza que transmite –es decir, en la dirección normal a los perfiles en el punto de contacto, coincidente con la línea de presión– verifica:

$$\delta_i(\xi) = \frac{F_i(\xi)}{K_{M_i}(\xi)} = \frac{F_T}{\sum_j K_{M_j}(\xi)} = \delta(\xi) \tag{10}$$

Se aprecia que en un instante dado –o en una posición de engrane dada–, la deformación de todas las parejas de dientes es la misma, que no obstante varía con la posición de engrane, dando lugar al error de transmisión cuasi-estático. Esta deformación  $\delta(\xi)$  corresponde en la Fig. 3 con la distancia entre los puntos  $a$  y  $b$ , y también con la distancia entre los puntos  $c$  y  $d$ . El ángulo  $\varphi_2$  (que también es función de  $\xi$ ) representa el retraso angular de la rueda conducida respecto de la conductora, y su valor en cada posición de contacto viene dado por:

$$\varphi_2(\xi) = \frac{\delta(\xi)}{r_{b2}} = \frac{F_T}{r_{b2}} \left( \sum_j K_{M_j}(\xi) \right)^{-1} = \frac{F_T}{r_{b2}} \left( \sum_j K_M(\xi + (j - i)) \right)^{-1} \tag{11}$$

En definitiva, queda demostrado que el ángulo de retraso de la rueda conducida respecto de la conductora, que es lo que se conoce como error de transmisión cuasi-estático (QSTE, *Quasi-Static Transmission Error*), es inversamente proporcional a la suma de la rigidez de todas las parejas de dientes en contacto en

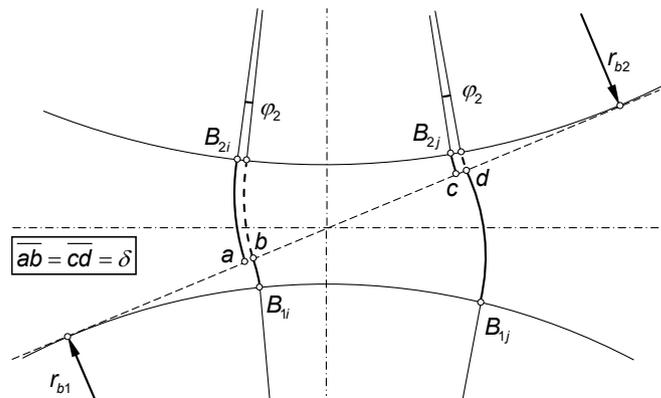


Fig. 3. Desfase entre ruedas por deformación de los dientes.

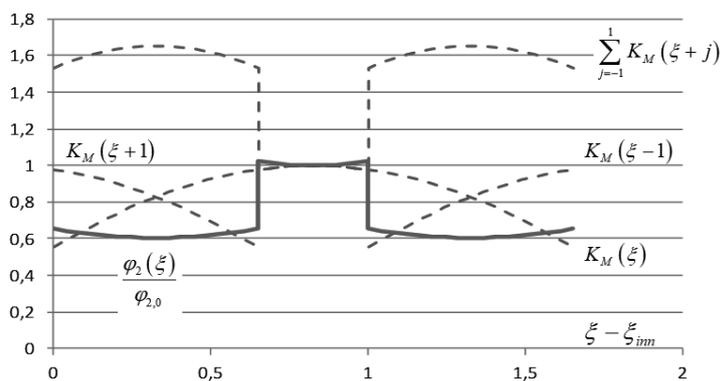


Fig. 4. Curva de error de transmisión cuasi-estático teórico (\$\epsilon\_a = 1,65\$).

cada instante, y que la variación de la rigidez a lo largo del ciclo de engrane es lo que ocasiona las fluctuaciones del QSTE.

El QSTE se puede calcular mediante las ecuaciones (11) y (6), si bien será necesario conocer el valor de \$K\_{M \max}\$. Sin embargo, para estudiar cómo es la variación del QSTE a lo largo del ciclo de engrane su valor se puede englobar en un factor de proporcionalidad, de manera que:

$$\varphi_2(\xi) = \left( \frac{F_T}{r_{b2} K_{M \max}} \right) \left( \sum_j \cos(b_0(\xi + j - i)) \right)^{-1} = \varphi_{2,0} \left( \sum_j \cos(b_0(\xi + j - i)) \right)^{-1} \tag{12}$$

Para el caso de engranajes estándar –con grado de recubrimiento entre 1 y 2– se obtiene una curva de error de transmisión como la representada en la Fig. 4, en la que se representan también, en línea de trazos, las curvas de rigidez de cada pareja, y de la rigidez total. Sin embargo, esta curva corresponde a unas condiciones de contacto ideales, pues en condiciones reales, y debido precisamente al desfase angular entre las dos ruedas, el contacto empieza antes y termina después de los límites teóricos del intervalo, y los procesos reales de carga y descarga de los dientes son progresivos, y no a saltos como en la Figura 2b.

### 2.4. Intervalo de contacto efectivo

La Fig. 5 representa el inicio de contacto real, que se produce cuando la base del diente de la rueda conductora choca con la cabeza del diente de la rueda conducida, fuera de la línea de presión y antes de alcanzar el punto de inicio de contacto teórico, representado por \$e\$ en la figura.

En adelante, la pareja de dientes que inicia el contacto –en el punto \$I\$– se designará con el número 0, y con números consecutivamente crecientes las que entraron en contacto con anterioridad. La designación

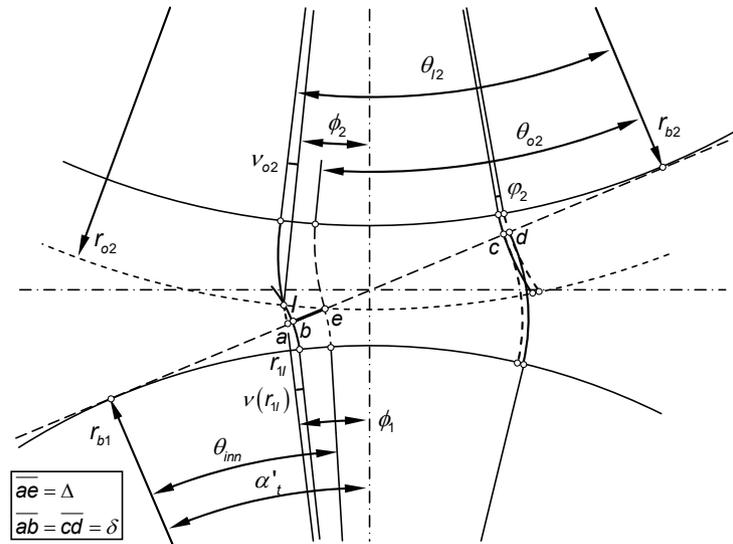


Fig. 5. Inicio real del contacto en un diente cargado.

de la última pareja de dientes en contacto coincidirá por tanto con la parte entera del grado de recubrimiento  $E_\alpha$ .

Si  $a$  y  $b$  son los puntos de intersección de la línea de presión con ambos perfiles (o su prolongación) al inicio del contacto en  $I$ , el adelanto del contacto viene descrito por el giro del piñón correspondiente al intervalo  $[b-e]$  de la Fig. 5, que de acuerdo con la nomenclatura indicada en la leyenda, viene dado por:

$$\Delta\phi = \left( \frac{\Delta - \delta}{r_{b1}} \right) \tag{13}$$

$\delta$  sería la deformación de las parejas 1 a  $E_\alpha$  en el instante justamente anterior al contacto. Puesto que el valor de  $\Delta$  es pequeño, las rigideces de las parejas anteriores ( $j > 0$ ) en la posición de la figura y en el punto teórico de inicio de contacto  $e$  (en que las parejas anteriores están contactando en el punto  $\xi_j = \xi_{inn} + j$ ) son prácticamente iguales, de manera se puede aceptar la aproximación:

$$\delta = \frac{F_T}{\sum_{j>0} K_{Mj}(\xi_{inn})} = \frac{F_T}{\sum_{j>0} K_M(\xi_{inn} + j)} \tag{14}$$

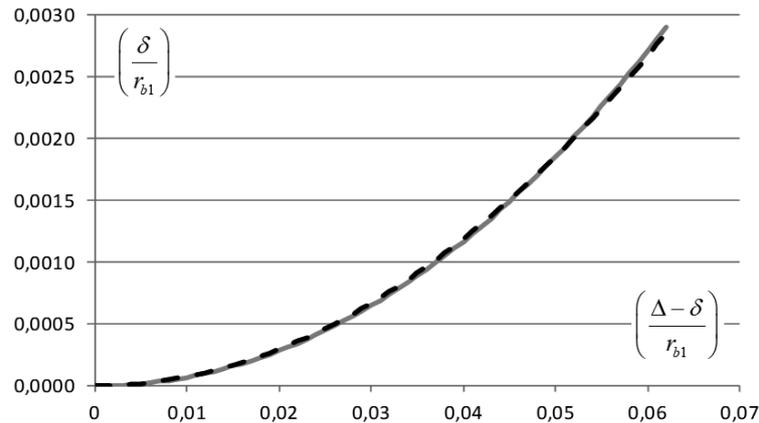
El objetivo es calcular  $\Delta$  en función de  $\delta$ . Para ello, de la Fig. 5 se deduce que:

$$\theta_{inn} - \frac{\Delta - \delta}{r_{b1}} - \nu(r_{i1}) + \phi_1 - \alpha'_t = 0 \tag{15}$$

donde  $\theta_{inn}$  es el ángulo de rodadura del punto de inferior contacto:

$$\theta_{inn} = \frac{2\pi}{z_1} \xi_{inn} \tag{16}$$

$r_{i1}$  y  $\nu(r_{i1})$  el radio y el ángulo polar del punto  $I$  en la evolvente,  $\alpha'_t$  el ángulo de presión de operación y  $\phi_1$  el ángulo representado en la figura.  $r_{i1}$  y  $\phi_1$  pueden obtenerse resolviendo el triángulo de vértices el punto  $I$  y los centros de ambas ruedas,  $O_1$  y  $O_2$ , del que se conocen dos lados –el radio de cabeza de la rueda conducida  $r_{o2}$  y la distancia entre centros de operación– y el ángulo  $\phi_2$ , que vale:

Fig. 6. Relación entre  $\Delta$  y  $\delta$ .

$$\phi_2 = \theta_{12} - \nu_{o2} - \alpha'_i = \frac{\Delta}{r_{b2}} + \arctg \sqrt{\left(\frac{r_{o2}}{r_{b2}}\right)^2 - 1} - \alpha'_i \quad (17)$$

De la ecuación (17) se infiere inmediatamente que  $r_{1l}$  y  $\phi_1$  van a depender, y de forma fuertemente no lineal, del valor de  $\Delta$ , de donde se deduce que la ecuación (15) permitirá calcular  $\delta$  en función de  $\Delta$  de manera sencilla, pero el problema planteado, que es el inverso: calcular  $\Delta$  en función de  $\delta$ , requerirá el empleo de técnicas de cálculo numérico. Afortunadamente, es posible encontrar una ecuación aproximada sencilla, pero de elevada precisión, que facilite los cálculos.

La Fig. 6 muestra la relación entre  $\delta$  y  $\Delta$ . La curva de trazo continuo se ha obtenido a partir de la ecuación (15), dando valores a  $\Delta$  y calculando  $\delta$ ; la curva de trazos representa una parábola de segundo grado de la forma:

$$\left(\frac{\Delta - \delta}{r_{b1}}\right) \approx \sqrt{\frac{1}{C_p} \left(\frac{\delta}{r_{b1}}\right)} \quad (18)$$

Se observa que el ajuste es francamente bueno y que la ecuación (18), en consecuencia, se puede utilizar para el cálculo. La manera más sencilla de calcular el coeficiente  $C_p$  es dar un valor cualquiera a  $\Delta$ , calcular  $\delta$  con la ecuación (15) y despejar  $C_p$  de la ecuación (18). En el ejemplo de la Fig. 6,  $C_p$  se calculó con un valor de  $\Delta$  de  $0,05r_{b1}$ .

En resumen, el adelanto del inicio del contacto por causa de la deformación de los dientes produce un incremento del grado de recubrimiento que se puede calcular como:

$$\Delta \varepsilon_\alpha = \frac{z_1}{2\pi} \Delta \phi = \frac{z_1}{2\pi} \left(\frac{\Delta - \delta}{r_{b1}}\right) = \frac{z_1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{C_p} \left(\frac{\delta}{r_{b1}}\right)} \quad (19)$$

con el valor de  $\delta$  que se obtiene de la ecuación (14). Naturalmente, también se produce un alargamiento del intervalo de contacto a la salida el contacto. La misma Fig. 5 sería válida para representar esta situación si se gira  $180^\circ$  y se cambian los subíndices 1 y 2. Por consiguiente, el proceso a seguir sería idéntico, con la salvedad que ahora las rigideces se habrían de calcular en el instante anterior a la separación de la cabeza del diente de la rueda conductora, con lo que la ecuación (14) tomaría la forma:

$$\delta = \frac{F_T}{\sum_{j \leq 0} K_{Mj}(\xi_o)} = \frac{F_T}{\sum_{j \leq 0} K_M(\xi_o + j)} = \frac{F_T}{\sum_{j \leq 0} K_M(\xi_{im} + \varepsilon_\alpha + j)} \quad (20)$$

teniendo en cuenta que ahora el diente  $j = 0$  sí se considera en el sumatorio, y que los demás dientes tienen  $j$  negativo. Hay, no obstante una ligerísima diferencia y es que, en este caso, el ángulo adicional que gira la rueda conductora en contacto no se expresa mediante la ecuación (13), sino:

$$\Delta\phi = \left( \frac{\Delta}{r_{b1}} \right) \tag{21}$$

No obstante, se puede encontrar una aproximación parabólica muy similar a la de la ecuación (18), de la forma:

$$\left( \frac{\Delta}{r_{b1}} \right) \approx \sqrt{\frac{1}{C_p} \left( \frac{\delta}{r_{b1}} \right)} \tag{22}$$

con lo que el incremento del grado de recubrimiento también se representa por la ecuación (19).

### 2.5. Transferencia de carga entre dientes y error de transmisión efectivo

A partir del momento en que se inicia el contacto en el punto  $I$ , la nueva pareja de dientes se va cargando progresivamente, hasta llegar al punto  $e$  de la Fig. 5 (punto inferior de contacto teórico), en que toma la carga teórica que corresponde a ese punto –pues el contacto ya se produce en la línea de presión–, y que de acuerdo con la Figura 2b ronda el 37% de la carga total. Queda por resolver la cuestión de cómo es ese proceso de carga del diente a lo largo del intervalo de contacto adicional.

Si se designa por  $\phi$  el ángulo girado por la rueda conductora desde el punto  $I$ , inicio real del contacto, el intervalo de contacto adicional en el inicio viene definido por  $0 \leq \phi \leq (\Delta - \delta)/r_{b1}$ . Por otro lado, para una rotación  $\phi$  de la rueda 1 dentro de ese intervalo, se cumple:

$$(\Delta - \delta)_{\phi=0} - (\Delta - \delta)_{\phi} = r_{b1}\phi \tag{23}$$

donde  $(\Delta - \delta)_{\phi=0}$  corresponde al inicio real del contacto y se calcula con las ecuaciones (18) y (14). Como se discutió más arriba, en esa posición, como en cualquier otra, el desfase relativo entre ambas ruedas es igual en todas las parejas de dientes, pero mientras en las parejas anteriores ( $j > 0$ ) el  $\delta$  asociado al desfase coincide con la deformación de la pareja, en la nueva pareja  $j = 0$  ese  $\delta$  se compone de dos intervalos: el primero de acercamiento relativo entre los dientes hasta que la base del primero choca con la cabeza del segundo, que se designará por  $\delta_G$ ; y el otro, de valor  $\delta - \delta_G$ , que corresponderá a la deformación de la pareja 0. En consecuencia, la fuerza que transmite cada pareja de dientes vendrá dada por:

$$\begin{aligned} F_0(\phi) &= K_{M0}(\phi)(\delta(\phi) - \delta_G(\phi)) \\ F_{j>0}(\phi) &= K_{Mj}(\phi)\delta(\phi) \end{aligned} \tag{24}$$

Como antes, las rigideces varían muy poco a lo largo del intervalo de contacto adicional, y su valor, para cualquier valor de  $\phi$ , se puede suponer constante e igual al que toman en el punto superior del mismo:

$$K_{Mj}(\phi) = K_{Mj}(\xi_{inn}) = K_M(\xi_{inn} + j) \tag{25}$$

en consecuencia, sumando todas las ecuaciones (24), se tiene:

$$\begin{aligned} F_T &= \sum_{j \geq 0} F_j(\phi) = \sum_{j \geq 0} K_{Mj}(\xi_{inn})\delta(\phi) - K_{M0}(\xi_{inn})\delta_G(\phi) \\ \delta(\phi) &= \frac{F_T + K_{M0}(\xi_{inn})\delta_G(\phi)}{\sum_{j \geq 0} K_{Mj}(\xi_{inn})} \end{aligned} \tag{26}$$

Naturalmente,  $\delta_G$  verifica la ecuación (18), de manera que, teniendo en cuenta la ecuación (23), se tiene que el desplazamiento  $\delta_G$  hasta contactar en la posición caracterizada por  $\phi$  es:

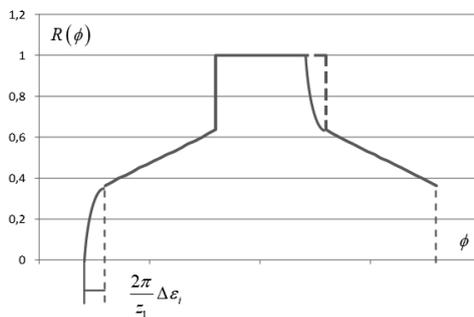


Fig. 7. Coeficiente de reparto de engranajes sin modificación de perfil bajo carga.

$$\left( \frac{\delta_G(\phi)}{r_{b1}} \right) = C_p \left( \frac{(\Delta - \delta)_\phi}{r_{b1}} \right)^2 = C_p \left( \frac{(\Delta - \delta)_{\phi=0} - r_{b1}\phi}{r_{b1}} \right)^2 \quad (27)$$

Las ecuaciones (26) y (27) permiten conocer  $\delta_G$  y  $\delta$  en función de  $\phi$ , de manera que el reparto de carga, obtenido a partir de las ecuaciones (24), es:

$$R_0(\phi) = \frac{F_0(\phi)}{F_T} = \frac{K_{M0}(\xi_{inn})}{\sum_{j \geq 0} K_{Mj}(\xi_{inn})} \left( 1 - \frac{\delta_G(\phi)}{\delta(0)} \right) = \frac{K_{M0}(\xi_{inn})}{\sum_{j \geq 0} K_{Mj}(\xi_{inn})} \left( 1 - \left( \frac{(\Delta - \delta)_{\phi=0} - r_{b1}\phi}{(\Delta - \delta)_{\phi=0}} \right)^2 \right)$$

$$R_{i>0}(\phi) = \frac{F_i(\phi)}{F_T} = \frac{K_{Mi}(\xi_{inn})}{\sum_{j \geq 0} K_{Mj}(\xi_{inn})} \left( 1 + \frac{K_{M0}(\xi_{inn})}{\sum_{j > 0} K_{Mj}(\xi_{inn})} \left( \frac{(\Delta - \delta)_{\phi=0} - r_{b1}\phi}{(\Delta - \delta)_{\phi=0}} \right)^2 \right) \quad (28)$$

Se aprecia que la curva de carga de la pareja de dientes 0 es una parábola, cuyo vértice se localiza en el punto inferior de contacto teórico,  $\xi = \xi_{inn}$ . La Fig. 7 representa la curva de reparto de carga en condiciones reales, para un engranaje recto con grado de recubrimiento entre 1 y 2. Cabe hacer constar, no obstante, que el proceso seguido y las ecuaciones desarrolladas son igualmente válidos para grados de recubrimiento mayores que 2.

En cuanto al error de transmisión, se puede comprobar fácilmente que las ecuaciones (11) y (12) continúan siendo válidas en los intervalos de contacto en que todas las parejas de dientes estén en contacto dentro de la línea de presión, pues todas las hipótesis sobre las que se desarrollaron ambas ecuaciones se cumplen igualmente en los puntos de estos intervalos. El QSTE, en cambio, es diferente cuando alguna pareja –la inicial o la final– está contactando fuera de la línea de presión. El desfase entre ambas ruedas, medido en la línea de presión, en estos otros intervalos de contacto se puede obtener mediante las ecuaciones (26) y (27):

$$\delta(\phi) = \frac{F_T + K_{M0}(\xi_{inn})\delta_G(\phi)}{\sum_{j \geq 0} K_{Mj}(\xi_{inn})} = \frac{F_T + K_{M0}(\xi_{inn}) \frac{C_p}{r_{b1}} \left( (\Delta - \delta)_{\phi=0} - r_{b1}\phi \right)^2}{\sum_{j \geq 0} K_{Mj}(\xi_{inn})} \quad (29)$$

Se aprecia que varía con el giro del piñón según una parábola de segundo grado, con vértice de nuevo en el punto inferior de contacto teórico. En la Fig. 8 se muestra la curva de error de transmisión efectivo, con la corrección de la ecuación (29), en la que se ha incluido también la modificación introducida por el alargamiento del contacto al final del intervalo de contacto. La influencia es totalmente simétrica, y su ecuación se obtendría mediante un desarrollo idéntico al que se acaba de presentar para el alargamiento al inicio del contacto.

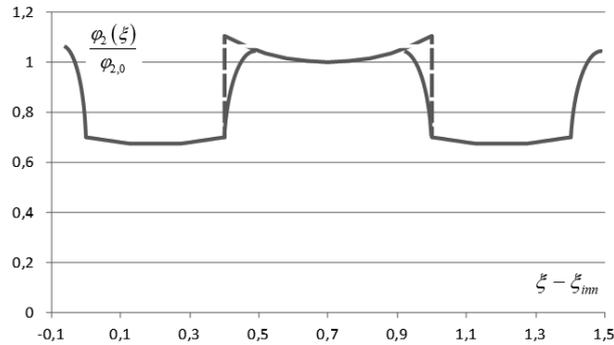


Fig. 8. Curva de error de transmisión cuasi-estático efectivo ( $\varepsilon_\alpha = 1,4$ ).

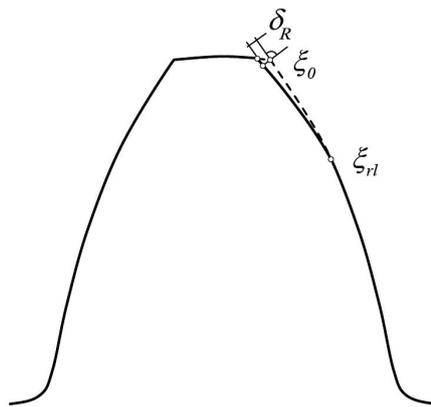


Fig. 9. Perfil modificado con rebaje de punta.

### 3. DIENTES CON PERFIL MODIFICADO

El objetivo que se persigue con la modificación del perfil es evitar el choque entre dientes que se produce fuera de la línea de presión por efecto de la deformación de los dientes bajo carga. A la vista de la Fig. 5, parece evidente que si rebaja la cabeza de la rueda 2 –o el punto correspondiente en la base de la rueda 1, aunque sería más complicado– una cantidad igual al valor de  $\delta(\xi_{inn})$ , dado por la ecuación (14), y en dirección normal al perfil, el inicio del contacto se retrasaría hasta el punto *e* de la figura, es decir, al punto de inicio de contacto teórico,  $\xi_{inn}$ . De esta manera, el engrane se produciría de forma suave, sin choques, y en el lugar apropiado.

La Fig. 9 muestra el perfil de un diente con rebaje. El rebaje en cada punto del perfil se mide en la perpendicular al perfil de evolvente, y el mayor de todos –el de la cabeza de la rueda 2, que debe valer  $\delta(\xi_{inn})$ – se conoce como profundidad de rebaje del perfil. Los rebajes se van haciendo progresivamente menores, hasta anularse en un punto donde el perfil rebajado entronca con el perfil de evolvente. La distancia entre el punto de cabeza y este punto de entronque define la longitud de modificación o rebaje. Finalmente, la ecuación de la curva del perfil modificado entre los dos puntos anteriores define la forma de la modificación.

En lo anterior, los puntos de contacto se han venido caracterizando por el parámetro  $\xi$  del punto del perfil de la rueda conductora. Del mismo modo, el rebaje en cada punto se definirá en función del parámetro  $\xi$  del contacto de ese punto, que coincidirá con el  $\xi$  del perfil sólo cuando el rebaje se realice en la rueda conductora. A modo de ejemplo, se acaba de indicar que el rebaje necesario para desplazar el inicio del contacto al punto teórico es  $\delta(\xi_{inn})$ , cuando, si se opera en la cabeza de la rueda conducida, hace referencia al punto  $\xi_{o2}$ , que es el que engrana con  $\xi_{inn}$ .

El rebaje en cada punto  $\delta_R(\xi)$  se medirá siempre en la dirección perpendicular al perfil de evolvente en el punto. El punto de finalización del rebaje, donde entronca con el perfil de evolvente, se designará por  $\xi_{rl}$ , y se denominará –tal vez impropriamente– longitud de rebaje, y se designará por  $\Delta_{\xi_r}$ , a la diferencia de los parámetros  $\xi$  de los extremos del rebaje, y por tanto,  $\Delta_{\xi_r} = \xi_{rl} - \xi_{inn}$  para el rebaje al inicio del contacto, y  $\Delta_{\xi_r} = \xi_o - \xi_{rl}$  al final del mismo. La razón de esta denominación es que esa longitud de rebaje será la longitud del intervalo en el que afecta el rebaje, en los diagramas de rigidez, coeficiente de reparto y error de transmisión, como los de las Figuras 2, 4 y 7. Además, se supondrá que en todo momento hay al menos una pareja de dientes en la que ambos perfiles contactan en puntos de la evolvente; y que el contacto de puntos de un perfil rebajado se produce siempre con puntos del perfil de evolvente del diente contrario. Es evidente que de no cumplirse alguna de estas dos hipótesis no se podría asegurar que el engrane se produzca dentro de la línea de presión, que es exactamente lo que se pretende conseguir con la modificación del perfil. Se supondrá finalmente que el rebaje en el inicio del contacto es el adecuado para retrasarlo hasta el punto de inicio teórico; es decir,  $\delta_R(\xi_{inn}) = \delta(\xi_{inn})$ , calculado con la ecuación (14).

### 3.1. Reparto de carga

En este caso, el  $\delta$  asociado al desfase entre ambas ruedas tendrá de nuevo dos componentes: la necesaria para absorber el rebaje y que los perfiles se toquen, que será igual al rebaje en el punto considerado, y la que produce deformación en la pareja de dientes; en consecuencia:

$$\delta_j(\xi) = \delta(\xi) - \delta_{Rj}(\xi) \quad (30)$$

donde el subíndice  $j$  designa la pareja de dientes, y donde  $\delta_{Rj}(\xi)$  es distinto de 0 para al menos un valor de  $j$ . De acuerdo con ello, la fuerza en cada pareja y la fuerza total vienen dadas por:

$$\begin{aligned} F_{j \geq 0}(\xi) &= K_{Mj}(\xi) (\delta(\xi) - \delta_{Rj}(\xi)) \\ F_T &= \sum_{j \geq 0} F_j(\xi) = \sum_{j \geq 0} K_{Mj}(\xi) \delta(\xi) - \sum_{j \geq 0} K_{Mj}(\xi) \delta_{Rj}(\xi) \end{aligned} \quad (31)$$

de donde:

$$\begin{aligned} \delta(\xi) &= \frac{F_T + \sum_{j \geq 0} K_{Mj}(\xi) \delta_{Rj}(\xi)}{\sum_{j \geq 0} K_{Mj}(\xi)} \\ R_i(\xi) &= \frac{K_{Mi}(\xi)}{\sum_{j \geq 0} K_{Mj}(\xi)} \left( 1 + \frac{1}{F_T} \sum_{j \geq 0} K_{Mj}(\xi) (\delta_{Rj}(\xi) - \delta_{Ri}(\xi)) \right) \end{aligned} \quad (32)$$

La última ecuación proporciona la curva de reparto de carga a lo largo del intervalo de engrane. Se trata de una formulación absolutamente general, válida para cualquier forma y longitud de rebaje, sin más restricciones que las ya mencionadas:

- La profundidad de rebaje es la apropiada para desplazar el inicio real del contacto al punto de inicio de contacto teórico.
- En todo momento, al menos una pareja de dientes contacta en puntos del perfil de evolvente, que es lo mismo que decir que al menos un  $\delta_{Rj}(\xi)$  es distinto de 0.
- Los puntos rebajados de un perfil contactan con puntos del perfil de evolvente del diente contrario.

En realidad, esta última restricción no es tal, pues en caso de que el contacto se produjera entre perfiles rebajados, la ecuación (32) seguiría siendo válida siempre que se tomara como  $\delta_{Rj}(\xi)$  la suma de los rebajes en ambos perfiles. Lo que ocurre es que, desde un punto de vista constructivo, es más sencillo inducir el rebaje en un solo diente que repartirlo entre los dos.

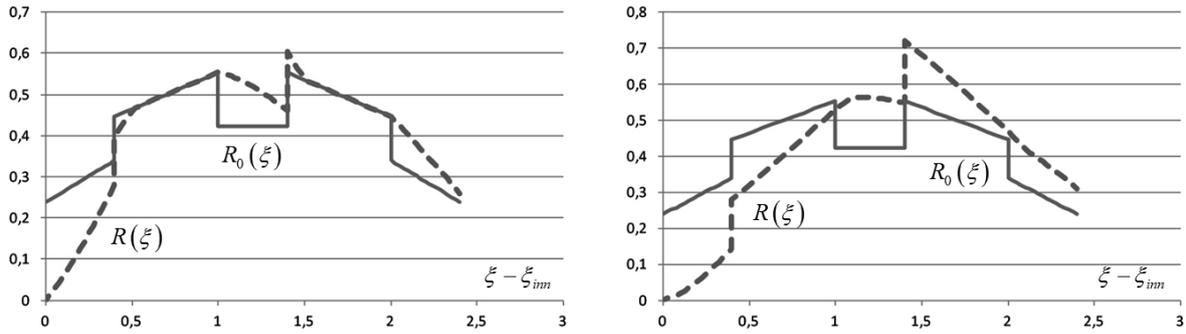


Fig. 10. Transferencia de carga en un engranaje HTCR de  $\varepsilon_\alpha = 2,4$ , con  $\Delta\xi_r = 0,5$  y  $\Delta\xi_r = 1,1$ .

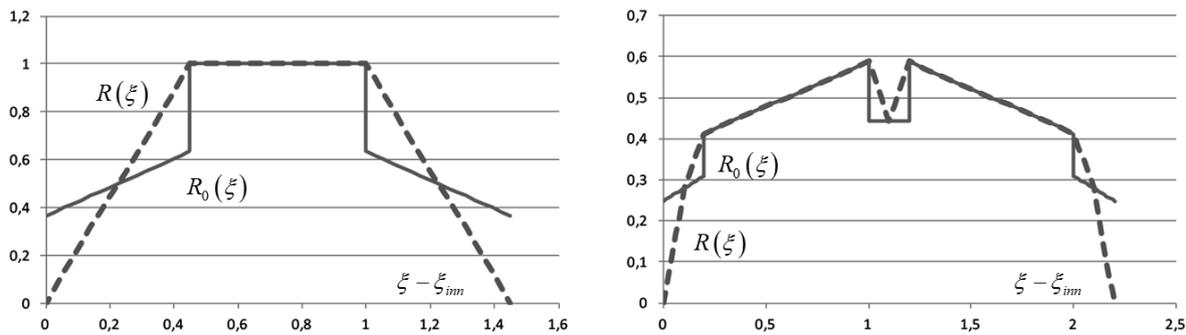


Fig. 11. Transferencia de carga continua ( $\varepsilon_\alpha = 1,45$  y  $\varepsilon_\alpha = 2,2$ ).

Por otro lado, el rebaje no debe alargarse más allá del intervalo de mayor número de parejas en contacto (intervalo de contacto máximo). En efecto, en engranajes de grado de recubrimiento menor que 2 no se cumpliría la segunda restricción –pues el rebaje afectaría al intervalo de contacto único–, y aunque en engranajes de alto grado de recubrimiento se podría tener una pareja contactando en el rebaje y otra en la evolvente en el intervalo de contacto mínimo, no produce ninguna mejora ni en la suavidad del contacto, ni en la carga máxima sobre los dientes, ni en el error de transmisión, como se verá más adelante. En todo caso, la ecuación (32) es totalmente válida, y permite obtener la curva de reparto de carga en esta situación. La Fig. 10 muestra el coeficiente de reparto de un engranaje recto de grado de recubrimiento 2,4, con rebaje lineal de longitud  $\Delta\xi_r = 0,5$  y  $\Delta\xi_r = 1,1$ .

En lo que sigue se supondrá que el rebaje afecta únicamente a la última pareja de dientes en contacto, y en el intervalo inferior de contacto máximo, es decir, el intervalo  $\xi_{inn} \leq \xi \leq \xi_{inn} + d_\alpha$ , donde  $d_\alpha$  representa la parte decimal de  $\varepsilon_\alpha$ . La única particularidad es que, si en algún momento fuese necesario un rebaje negativo, no se materializará, como es natural, ensanchando el diente, sino que se rebajará la cabeza del diente que esté finalizando el engrane en ese momento.

De acuerdo con ello, se tiene que  $\delta_{R_j}(\xi) = 0$  para  $\xi > \xi_{inn} + d_\alpha$ , y por consiguiente también para  $j > 0$ . Introduciendo esta condición en la ecuación (32) se obtiene la siguiente expresión para la curva de reparto de carga:

$$\begin{aligned}
 R_0(\xi) &= \frac{K_{M0}(\xi)}{\sum_{j \geq 0} K_{Mj}(\xi)} \left( 1 - \frac{1}{F_T} \sum_{j > 0} K_{Mj}(\xi) \delta_{R0}(\xi) \right) \\
 R_{i>0}(\xi) &= \frac{K_{Mi}(\xi)}{\sum_{j \geq 0} K_{Mj}(\xi)} \left( 1 + \frac{1}{F_T} K_{M0}(\xi) \delta_{R0}(\xi) \right)
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

Es de destacar que la primera de estas ecuaciones permite conocer no sólo la curva de reparto para una forma de rebaje dada, sino también la forma de rebaje requerida para una curva de reparto, es decir, para una curva de transferencia de carga, predefinida. En la referencia [15] se pueden encontrar las ecuaciones del rebaje que asegurarían un proceso de transferencia de carga continuo, tanto para engranajes estándar como de alto grado de recubrimiento, como aparecen representados en la Fig. 11.

Por último, cabe mencionar que, teniendo en cuenta que el rebaje en el punto  $\xi_{inn}$  coincide con la deformación de los dientes anteriores en ese punto, justo antes del inicio del contacto del nuevo diente, de la ecuación (14) se deduce que:

$$F_T = \sum_{j>0} K_{Mj}(\xi_{inn}) \delta_{R0}(\xi_{inn}) \quad (34)$$

con lo que la ecuación (33) se puede escribir como:

$$R_0(\xi) = \frac{K_{M0}(\xi)}{\sum_{j \geq 0} K_{Mj}(\xi)} \left( 1 - \frac{\sum_{j>0} K_{Mj}(\xi) \delta_{R0}(\xi)}{\sum_{j>0} K_{Mj}(\xi_{inn}) \delta_{R0}(\xi_{inn})} \right)$$

$$R_{i>0}(\xi) = \frac{K_{Mi}(\xi)}{\sum_{j \geq 0} K_{Mj}(\xi)} \left( 1 + \frac{K_{M0}(\xi) \delta_{R0}(\xi)}{\sum_{j>0} K_{Mj}(\xi_{inn}) \delta_{R0}(\xi_{inn})} \right) \quad (35)$$

que expresan los coeficientes de reparto en función de la profundidad de rebaje en el punto de inicio de contacto –cabeza de la rueda conducida– en lugar de la fuerza total transmitida.

### 3.2. Error de transmisión

Durante el desarrollo que se acaba de presentar, ha aparecido como resultado intermedio, necesario para obtener la curva de reparto de carga, la expresión de  $\delta(\xi)$  reflejada en la primera de las ecuaciones (32). Como se discutió en la Sección 2.3, esta distancia  $\delta(\xi)$  está directamente relacionada con el ángulo de retraso de la rueda conducida, y por tanto con el error de transmisión cuasi-estático:

$$\varphi_2(\xi) = \frac{\delta(\xi)}{r_{b2}} \quad (36)$$

Por consiguiente, se estudiará el QSTE mediante el análisis de las variaciones de  $\delta(\xi)$  a lo largo del ciclo de engrane, pues ambas magnitudes están relacionadas mediante un simple factor de proporcionalidad.

Para este análisis se introducirá un ligera modificación en la Ecuación (32): puesto que el rebaje en el punto  $\xi_{inn}$  ha de ser igual al valor de  $\delta$  en el instante anterior al inicio del contacto, de la misma ecuación (32) se tiene:

$$\delta(\xi_{inn}) = \frac{F_T + \sum_{j>0} K_{Mj}(\xi_{inn}) \delta_{Rj}(\xi_{inn})}{\sum_{j>0} K_{Mj}(\xi_{inn})} = \delta_{R0}(\xi_{inn}) \quad (37)$$

con lo cual:

$$F_T = \sum_{j>0} K_{Mj}(\xi_{inn}) [\delta_{R0}(\xi_{inn}) - \delta_{Rj}(\xi_{inn})] \quad (38)$$

y por tanto:

$$\delta(\xi) = \frac{\sum_{j>0} K_{M_j}(\xi_{inn}) [\delta_{R0}(\xi_{inn}) - \delta_{Rj}(\xi_{inn})] + \sum_{j \geq 0} K_{M_j}(\xi) \delta_{Rj}(\xi)}{\sum_{j \geq 0} K_{M_j}(\xi)} \tag{39}$$

expresión que puede dar una idea más intuitiva de la variación del QSTE al no depender de la fuerza total transmitida  $F_T$ . Si como en el caso anterior, se admite que el rebaje afecta únicamente al diente 0 y no más allá del intervalo inferior de contacto máximo, las ecuaciones (32) y (39) se simplifican, quedando de la siguiente manera:

$$\delta(\xi) = \frac{F_T + K_{M0}(\xi) \delta_{R0}(\xi)}{\sum_{j \geq 0} K_{M_j}(\xi)} = \frac{\sum_{j>0} K_{M_j}(\xi_{inn}) \delta_{R0}(\xi_{inn}) + K_{M0}(\xi) \delta_{R0}(\xi)}{\sum_{j \geq 0} K_{M_j}(\xi)} \tag{40}$$

La ecuación (40) proporciona directamente el valor de  $\delta(\xi)$ , y por tanto del error de transmisión cuasi-estático, en función de la curva de rebaje, sea cual sea la forma, longitud y profundidad. Pero se aprecia que también permite obtener, de manera inmediata, la curva de rebaje requerida para una curva de QSTE predeterminada:

$$\delta_{R0}(\xi) = \frac{\sum_{j \geq 0} K_{M_j}(\xi) \delta(\xi) - F_T}{K_{M0}(\xi)} \tag{41}$$

Teóricamente, la ecuación (41) permite controlar el error de transmisión, y darle cualquier forma que se desee; haciendo abstracción, eso sí, de si el rebaje que se obtenga se puede fabricar en la práctica o no. Pero si en esta fase del análisis se hace abstracción de ello, parece posible, en principio, obtener cualquier forma de curva de error sin más que modificar el perfil con el rebaje que proporciona la ecuación (41), cuyo manejo es además extremadamente sencillo.

Desafortunadamente, la cosa no es tan simple. Las restricciones que se han ido introduciendo hasta llegar a la ecuación (41) han de continuar verificándose, como es natural, para cualquier resultado que se obtenga a partir de esa ecuación, pues de otra manera tal resultado no sería válido. A modo de ejemplo, la primera idea que sugiere la ecuación (41) es obtener la ecuación de  $\delta_{R0}(\xi)$  que hace nulo el QSTE, o lo que es lo mismo, que hace  $\delta(\xi)$  constante. Pero si  $\delta(\xi)$  es constante y  $\delta(\xi_{inn})$  justo antes del inicio del contacto del diente 0 tiene que ser igual a  $\delta_{R0}(\xi_{inn})$ , se tendrá que cumplir:

$$\delta(\xi) = \text{cte} = \delta_{R0}(\xi_{inn}) \tag{42}$$

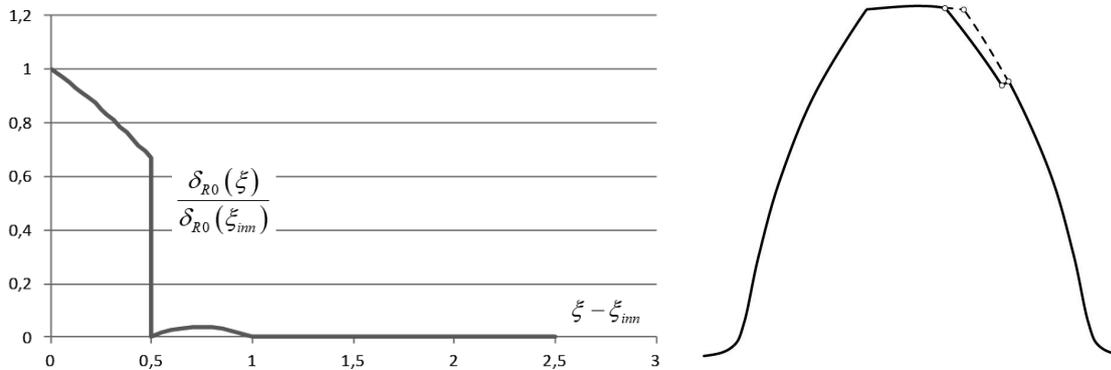
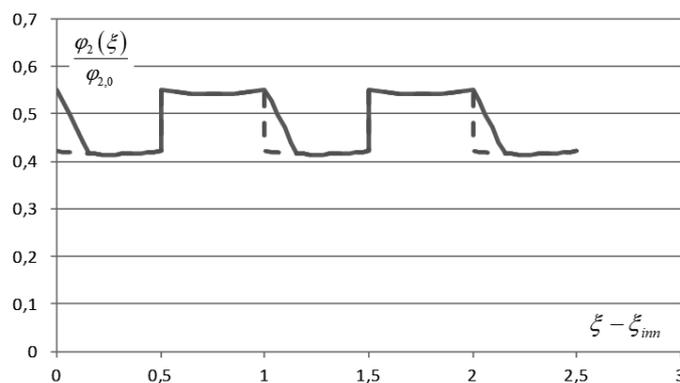
Sustituyendo en la ecuación (41) se obtiene un valor de  $F_T$  para  $\xi = \xi_{inn}$ :

$$F_T = \sum_{j \geq 0} K_{M_j}(\xi_{inn}) \delta(\xi_{inn}) - K_{M0}(\xi_{inn}) \delta_{R0}(\xi_{inn}) = \sum_{j>0} K_{M_j}(\xi_{inn}) \delta(\xi_{inn}) \tag{43}$$

que introducido en la propia ecuación (41) proporciona una curva de rebaje:

$$\frac{\delta_{R0}(\xi)}{\delta_{R0}(\xi_{inn})} = \frac{\sum_{j \geq 0} K_{M_j}(\xi) - \sum_{j>0} K_{M_j}(\xi_{inn})}{K_{M0}(\xi)} \tag{44}$$

Teóricamente, con un rebaje como el de la ecuación (44), el QSTE, es decir, el ángulo de desfase entre la rueda conductora y la conducida sería constante, y consecuentemente, la velocidad de salida sería uniforme. El problema es que, si se representa el rebaje de la ecuación (44) se obtiene una curva como la de la Fig. 12. Se puede observar que al principio el rebaje presenta una forma más o menos lineal; pero llega un punto –que coincide con el instante en que la más alejada de las parejas en contacto finaliza su engrane– en el que el rebaje desciende bruscamente. Es un resultado razonable: en el momento en que una pareja de dientes finaliza su engrane, la rigidez del conjunto disminuye bruscamente, por lo que la rueda conductora tendería a acercarse a la conducida, aumentando el ángulo de retraso, y consecuentemente el

Fig. 12. Rebaje de perfil teórico para QSTE nulo ( $\varepsilon_\alpha = 2,5$ ).Fig. 13. Curva de QSTE para dientes con rebaje lineal al inicio del engrane ( $\varepsilon_\alpha = 2,5$ ).

valor de  $\delta(\xi)$ . Para evitarlo, y que  $\delta(\xi)$  continúe siendo constante, habría que ensanchar el diente, para que así aleje al diente conducido, con la misma brusquedad con que la rigidez disminuye, lo que se traduce en un rebaje de perfil que, obviamente, no es realizable ni eficaz en la práctica, como se puede apreciar en la misma Fig. 12. Es verdad que el salto no sería en realidad tan brusco, pues como se discutió en el apartado 2.5, si el perfil no se modifica en la salida del engrane, la variación de la rigidez es parabólica, y el rebaje sería algo más suave; pero el aspecto del perfil del diente sería prácticamente el mismo.

Con el rebaje del perfil en el inicio del contacto se consigue que los saltos en los valores de la rigidez y del QSTE a la entrada de una nueva pareja de dientes –los saltos hacia abajo de las curvas de las Fig. 4 y 8– se suavicen. La Fig. 13 muestra la curva del QSTE para un rebaje lineal. Obviamente, un rebaje igual en la finalización del contacto producirá un suavizado idéntico en los saltos hacia arriba.

Como es natural, ambas curvas de QSTE, con y sin rebaje, son coincidentes en los puntos del intervalo de contacto en que ninguna pareja de dientes contacta en la zona rebajada. Por consiguiente, si se tiene en cuenta que la ecuación (41) se dedujo para rebajes que afectarían sólo al intervalo inferior de contacto máximo, las diferencias entre las curvas de QSTE estarán localizadas en los intervalos en que alguna pareja de dientes contacte en puntos del rebaje, y por consiguiente en los intervalos de contacto máximo. Pero si el valor del QSTE no se altera en los intervalos de contacto mínimo –en los que alcanza su máximo valor– y también ha de ser coincidente en algún punto del intervalo de contacto máximo –en el que alcanza el valor mínimo–, la consecuencia es inmediata: no es posible reducir la amplitud de fluctuación del error de transmisión cuasi-estático. O dicho de otra forma, sólo es posible actuar sobre la forma de la curva de error.

A pesar de que la conclusión a que se acaba de llegar limita notablemente el campo de utilización de la ecuación (41), el control sobre la forma de la curva todavía ofrece un margen para la optimización de la transmisión, que vale la pena explorar.

#### 4. OPTIMIZACIÓN DE LAS CURVAS DE REPARTO DE CARGA Y ERROR DE TRANSMISIÓN

Como se ha indicado con anterioridad, la fluctuación del error de transmisión, es decir, del desfase relativo entre piñón y rueda, provoca variaciones en la velocidad de salida aun cuando la de entrada permanezca constante. Y si hay variaciones cíclicas de velocidad significa que hay aceleraciones y deceleraciones, también cíclicas, sobre el diente. Estas aceleraciones y deceleraciones cíclicas son el origen de la sobrecarga dinámica.

Ya se ha discutido que esas variaciones de la velocidad no son evitables, por lo que tampoco son evitables las sobrecargas dinámicas que inducen. Pero la carga dinámica máxima que aparezca será directamente proporcional a la máxima aceleración instantánea, es decir, a la máxima variación instantánea de la velocidad. Parece, por tanto, que un criterio de optimización razonable podría ser intentar minimizar el valor máximo de la variación instantánea de la velocidad.

En la Fig. 13 se puede apreciar que la aceleración instantánea máxima se presenta en el punto en que la pendiente de la curva de QSTE sea máxima (en valor absoluto). Y si esa pendiente máxima ha de ser mínima, se ha de cumplir que la curva de QSTE sea una recta, desde el punto de inicio del contacto hasta el punto medio del intervalo inferior de contacto máximo, como la que se representa en la Fig. 14. Como se aprecia fácilmente, es necesario un rebaje simétrico en la finalización del engrane, que gobierne el segmento derecho de la V, para evitar el salto de subida. Este rebaje se calcula de idéntica forma a como se calcula el primero, por lo que se omitirá su desarrollo; pero sin olvidar que, para un QSTE como el de la Fig. 14, ha de ser considerado.

La curva de error de transmisión deseada en la primera mitad del intervalo es:

$$\delta(\xi) = \delta_{\min} + \frac{\delta_{\max} - \delta_{\min}}{\frac{d_{\alpha}}{2}} \left( \xi_{\text{inn}} + \frac{d_{\alpha}}{2} - \xi \right) \quad \text{para} \quad \xi_{\text{inn}} \leq \xi \leq \xi_{\text{inn}} + \frac{d_{\alpha}}{2} \quad (45)$$

donde  $\delta_{\max}$  y  $\delta_{\min}$  son los valores del  $\delta$  en los dos extremos del semi-intervalo, que coinciden con los valores de  $\delta$  en los mismos puntos de la curva del diente sin rebaje, y por tanto:

$$\begin{aligned} \delta_{\max} &= \delta(\xi_{\text{inn}}) = \frac{F_T}{\sum_{j>0} K_{Mj}(\xi_{\text{inn}})} \\ \delta_{\min} &= \delta\left(\xi_{\text{inn}} + \frac{d_{\alpha}}{2}\right) = \frac{F_T}{\sum_{j \geq 0} K_{Mj}\left(\xi_{\text{inn}} + \frac{d_{\alpha}}{2}\right)} \end{aligned} \quad (46)$$

y por otro lado:

$$F_T = \sum_{j>0} K_{Mj}(\xi_{\text{inn}}) \delta(\xi_{\text{inn}}) = \sum_{j>0} K_{Mj}(\xi_{\text{inn}}) \delta_{R0}(\xi_{\text{inn}}) \quad (47)$$

Reemplazando las ecuaciones (45), (46) y (47) en la ecuación (41) se obtiene la curva de rebaje que minimiza la sobrecarga dinámica. Aunque el procedimiento de obtención de la fórmula es sumamente sencillo, la expresión resultante es farragosa y no aporta nada especial, razón por la que se omite su desarrollo. Su representación gráfica, para un engranaje estándar y otro de alto grado de recubrimiento, se muestra en los diagramas de la Fig. 15.

La Fig. 16 representa los diagramas de reparto de carga asociados a estos rebajes. En ambos casos se aprecia un proceso de transferencia de carga continuo, muy similar a los de la Fig. 11. Esto proporciona un primer resultado interesante, pues queda probado que una modificación del perfil óptima desde el punto de vista de minimizar la sobrecarga dinámica, es también óptima desde el punto de vista de asegurar la continuidad en la transferencia de carga. Sin embargo, esta aparentemente feliz coincidencia no es sino la consecuencia de una segunda conclusión que se puede extraer de lo anterior, que es la escasísima influencia de la forma del rebaje en el reparto de carga.

En efecto, la modificación del perfil afecta al reparto de carga únicamente en los intervalos en los que el contacto se produce en puntos del rebaje, y fuera de esos intervalos coincide con la curva de reparto teórica, como se puede observar en la Fig. 17, que representa la curva de reparto de carga con un rebaje de pequeña longitud tanto en la cabeza del piñón como en la de la rueda. Los intervalos de la curva de reparto correspondientes a las zonas de rebaje tienen los extremos perfectamente definidos; por ejemplo, para el primer intervalo:  $R = 0$  en  $\xi = \xi_{inn}$ , si la profundidad de rebaje es la adecuada al principio y al final del intervalo de contacto, y  $R = R_0(\xi_{inn} + \xi_r)$  en  $\xi = \xi_{inn} + \xi_r$ , siendo  $R_0$  el coeficiente de reparto de la pareja de dientes sin rebaje. En definitiva, la profundidad de rebaje determina el primer punto de los intervalos, y la longitud de rebaje el segundo. Entre ambos, la forma del rebaje determinará la curva de coeficiente de reparto que los une.

Sin embargo, si se tiene en cuenta que el eje de abscisas representa una magnitud proporcional al ángulo girado por el piñón, por diversas que puedan ser las formas del rebaje, pero admitiendo que han de ser funciones continuas y derivables de la variable espacial, la curva de coeficiente de reparto va a salir siempre con aspecto muy similar al de una recta. Además, a diferencia de la curva de error de transmisión, en la que todo lo que se alejara de una recta, con igual pendiente en todos sus puntos, suponía la existencia de puntos de mayor pendiente, y por tanto de mayor carga dinámica, en el caso del reparto de carga, que la curva coincidiera exactamente con una recta, o sólo se aproximara a ella, a efectos de funcionamiento es totalmente irrelevante.

En cambio, es de destacar que si la longitud de rebaje en la cabeza de ambos dientes es igual a la mitad de la parte decimal del grado de recubrimiento, los dos intervalos de la curva de reparto de carga se encuentran en el punto medio del intervalo de contacto máximo, y por lo que se acaba de discutir, el resultado será siempre una curva como las mostradas en la Fig. 16. Esto es lo que ocurre con el rebaje para mínima carga dinámica, y de ahí la coincidencia de que también sea óptimo desde el punto de vista del reparto de carga.

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha desarrollado un modelo de reparto de carga y de error de transmisión cuasi-estático para engranajes rectos con modificación de perfil, válido indistintamente para engranajes estándar –con grado de recubrimiento entre 1 y 2– y de alto grado de recubrimiento –entre 2 y 3–. Está basado en la hipótesis de que el retraso de la rueda conducida respecto de la conductora debido a la deformación de los dientes bajo carga es el mismo en todas las parejas de dientes en contacto simultáneo. Esta hipótesis se obtiene de aplicar la condición de energía de deformación mínima a un medio elástico en el que la rigidez es independiente del desplazamiento. Ello permite un planteamiento muy intuitivo del problema, en el que el comportamiento de la pareja de dientes viene descrito por la condición de que el desfase en la línea de presión tiene que ser igual a la deformación de la pareja más el rebaje de la misma, en cada punto de contacto.

Partiendo de una expresión aproximada de la variación de la rigidez de la pareja de dientes a lo largo de la línea de engrane, previamente desarrollada y contrastada, se ha obtenido la curva de error de transmisión para engranajes sin modificación de perfil, dentro del intervalo de contacto teórico, así como el incremento de la longitud de contacto por la deformación de los dientes y la curva de reparto de carga en ese intervalo de contacto adicional, que se ha demostrado que se ajusta perfectamente a una parábola de segundo grado, para la que se ha obtenido una ecuación aproximada sencilla, de muy elevada precisión. Del mismo modo, se ha obtenido también la curva de error de transmisión en este intervalo de contacto adicional.

Con idéntico planteamiento, y mediante un desarrollo totalmente paralelo, se han obtenido las curvas de reparto de carga y de error de transmisión para engranajes con modificación de perfil, y se han desarrollado las ecuaciones correspondientes en función de la profundidad, longitud y forma del rebaje. Gracias a la simplicidad de la formulación utilizada, las ecuaciones obtenidas permiten expresar no sólo el coeficiente de reparto y el error de transmisión a lo largo del intervalo de engrane en función de la ecuación del rebaje, sino también la ecuación del rebaje requerida para una curva de reparto o de error de transmisión pre-determinadas.

Desafortunadamente, las restricciones del problema limitan considerablemente el campo de elección de las funciones objetivo, en particular de la función de error de transmisión. En efecto, la profundidad del rebaje debe coincidir con la deformación de las parejas anteriores en el punto inferior de contacto teórico; por otro lado, la longitud de rebaje no debe exceder la del intervalo de contacto máximo; y con ambas restricciones se concluye que no es posible reducir la amplitud de variación del error de transmisión.

Se ha demostrado que los rebajes que proporcionan transferencia de carga continua son los rebajes simétricos, que se aplican en la cabeza de ambas ruedas, con una longitud en cada una igual a la mitad de la del intervalo de contacto máximo. También se ha obtenido la ecuación del rebaje simétrico que minimiza la carga dinámica que ocasiona la variación de la velocidad del diente debida a la fluctuación cíclica del error de transmisión cuasi-estático, y se ha comprobado que este rebaje también proporciona transferencia de carga continua.

Las hipótesis establecidas a lo largo del desarrollo del trabajo (combinación de rigideces en serie, ángulo de retraso igual para todos los dientes y variación de rigidez insignificante en los intervalos de contacto adicionales) se alcanzan por la aplicación de principios perfectamente válidos para el caso de los dientes de engranaje (trabajo dentro del rango de rigidez independiente de la deformación, energía de deformación mínima, y longitud muy pequeña de los intervalos de contacto adicionales, respectivamente). Sin embargo, no se ha tenido en cuenta la influencia de factores como los errores de alineación de los ejes, los errores de fabricación o las vibraciones inducidas por los choques entre dientes, que podrán establecer limitaciones a la aplicación del método propuesto.

### AGRADECIMIENTOS

Los autores desean dejar constancia de su agradecimiento a la Dirección General de Investigación Científica y Técnica por la financiación del proyecto de investigación DPI2015-69201-C2-1-R “Distribución de carga y cálculo resistente de engranajes con geometría modificada”, así como a la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de la UNED por la acción 2017-MEC27, “Modelos de cálculo de engranajes cilíndricos”.

### REFERENCIAS

- [1] Lin, H.H., Oswald, F.B., Townsend, D.P., “Dynamic loading of spur gears with linear or parabolic tooth profile modifications”, *Mechanism and Machine Theory*, **29**(8), 1115-1129 (1994)
- [2] Beghini, M., Presicce, F., Santus, C., “A method to define profile modification of spur gear and minimize the transmission error”, *AGMA Paper 04FTM3*, Alexandria VA (2004)
- [3] Wang, J., Howard, I., “Finite element analysis of high contact ratio spur gears in mesh”, *Journal of Tribology*, **127**(3), 469-483 (2005)
- [4] Wang, J., Howard, I., “Comprehensive analysis of spur gears in mesh with various types of profile modifications”, *Proceedings International Conference on Mechanical Transmissions*, Chongqing, P.R. China (2006)
- [5] Tamminana, V.K., Kahraman, A., Vijayakar, S., “A study of the relationship between the dynamic factors and the dynamic transmission error of spur gear pairs”, *Journal of Mechanical Design*, **129**(1), 75-84 (2007)
- [6] Tavakoli, M.S., Houser, D.R., “Optimum profile modifications for the minimization of static transmission errors of spur gears”, *Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, **108**(1), 49-67 (1986)
- [7] Li, S., “Finite element analyses for contact strength and bending strength of a pair of spur gears with machining errors, assembly errors and tooth modifications”, *Mechanism and Machine Theory*, **42**(1), 88-114 (2007)
- [8] Tesfahunegn, Y.A., Rosa, F., Gorla, C., “The effects of the shape of tooth profile modifications on the transmission error, bending and contact stress of spur gears”, *Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, **224**, 1749-1758 (2010)
- [9] Velex, P., Bruyere, J., Houser, D.R., “Some analytical results on transmission errors in narrow-faced spur and helical gears: influence of profile modifications”, *Journal of Mechanical Design*, **133**(3) (2011)
- [10] Bruyere, J., Velex, P., “Derivation of optimum profile modifications in narrow-faced spur and helical gears using a perturbation method”, *Journal of Mechanical Design*, **135**(7) (2013)

- [11] Chen, Z., Shao, Y., “Mesh stiffness calculation of a spur gear pair with tooth profile modification and tooth root crack”, *Mechanism and Machine Theory*, 62, 63-74 (2013)
- [12] Bruyere, J., Gu, X., Velex, P., “On the analytical definition of profile modifications minimizing transmission error variations in narrow-faced spur and helical gears”, *Mechanism and Machine Theory*, 92, 257-272 (2015)
- [13] Li, S., “Effect of misalignment error, tooth modifications and transmitted torque on tooth engagements of a pair of spur gears”, *Mechanism and Machine Theory*, 83, 125-136 (2015)
- [14] Ghosh, S.S., Chakrabort, G., “On optimal tooth profile modification for reduction of vibration and noise in spur gear pairs”, *Mechanism and Machine Theory*, 105, 145-163 (2016)
- [15] Pedrero, J.I., Pleguezuelos, M., Sánchez, M.B., “Load sharing model for spur gears with tip relief”, *Proceedings of the International Conference on Gears 2017*, Munich (2017)
- [16] Pedrero, J.I., Artés, M., Fuentes, A., “Modelo de distribución de carga en engranajes cilíndricos de perfil de evolvente”, *Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica*, 3, 31-43 (1999)
- [17] Pedrero, J.I., Pleguezuelos, M., Artés, M., Antona, J.A., “Load distribution model along the line of contact for involute external gears”, *Mechanism and Machine Theory*, 45(5), 780-794 (2010)
- [18] Sánchez, M.B., Pleguezuelos, M., Pedrero, J.I., “Enhanced model of load distribution along the line of contact for non-standard involute external gears”, *Meccanica*, 48(3), 527-543 (2013)
- [19] Sánchez, M.B., Pleguezuelos, M., Pedrero, J.I., “Approximate equations for the meshing stiffness and the load sharing ratio of spur gears including hertzian effects”, *Mechanism and Machine Theory*, 109, 231-24 (2017)

### **CONTROL OF THE QUASI-STATIC TRANSMISSION ERROR BY TIP RELIEF OF INVOLUTE SPUR GEARS**

**Abstract** – This work presents a study on the influence of profile modifications in the load sharing and the transmission error functions, for involute spur gears. A calculation method for the meshing stiffness for tooth pairs with modified profile has been developed which is valid for any amount, length and shape of modification –including of course the case of no modification– and for contact both inside and outside the pressure line. The curves of the load sharing and the delay angle have been obtained from the variation of the meshing stiffness along the path of contact. For both curves, simple approximate equations are presented which enable to solve the inverse problem, i.e., the equation of the required profile modification for predefined functions of load sharing or transmission error.

**Keywords** – Spur gears, Meshing stiffness, Transmission error, Load sharing, Tip relief.