Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica. Vol. 23, N.º1, pp. 45-53, 2019

MATRICES POLINOMIALES Y ECUACIONES DIFERENCIALES

SONIA V. JACAMO, LEONOR E. DE LA TORRE, GRACIELA B. GANYITANO, CLAUDIA R. FERNÁNDEZ

Universidad Nacional de San Juan
Facultad de Ingeniería
Departamento de Matemática
Avenida Libertador General San Martín 1109, San Juan, Argentina

(Recibido 19 de marzo de 2018, revisado 12 de febrero de 2019, para publicación 13 de marzo de 2019)

Resumen – Las ecuaciones diferenciales (E.D) y los sistemas de ecuaciones diferenciales (S.E.D) surgen naturalmente al estudiar problemas en física, mecánica, economía, biología, etc. Su resolución no es una tarea fácil de llevar a cabo, requiriendo para ello de numerosos cálculos. Debido a estos inconvenientes surge esta propuesta, la que consta de cinco secciones, las que se explican brevemente a continuación. La sección uno se divide en dos subsecciones, en la subsección 1.1 se recuerdan conceptos propios de Álgebra Lineal, como son matriz polinomial, matriz compañera y linealización, en la subsección 1.2, se enuncia un teorema que establece la solución de un S.E.D que hace uso de los conceptos recordados en la subsección 1.1. En la sección dos se mencionan situaciones interesantes en las cuales aparecen S.E.D de distintos órdenes, prestando atención a los sistemas de ecuaciones de segundo orden que surgen en mecánica, como por ejemplo, el estudio de masas acopladas unidas por resortes. En la sección tres figuran ejemplos resueltos junto con un problema de aplicación, los que se resuelven por medio de sistemas de E.D de orden superior aplicando el teorema. La sección cuatro está destinada a conclusiones finales, se hará notar fundamentalmente la practicidad del uso del teorema en la resolución de S.E.D de segundo orden no homogéneos, los que usualmente requieren de numerosos cálculos y trabajo tedioso para su resolución, por último en la sección cinco se listan las referencias bibliográficas.

Palabras clave – Matriz polinomial, matriz compañera, linealización, ecuaciones diferenciales.

1. INTRODUCCIÓN

Generalmente, nos encontramos con matrices polinomiales cuando estudiamos S.E.D ordinarias con coeficientes constantes. Estos sistemas forman la base de muchos modelos matemáticos y son formulados para resolver varios problemas de ingeniería. Algunas veces la teoría básica para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias es insuficiente o difícil de implementar, debido a estos inconvenientes se recurre a otra forma de trabajo, integrando conceptos de Álgebra Lineal y Cálculo.

Nuestro objetivo es el desarrollo de una teoría espectral para el polinomio de la matriz mónica, para lo cual comenzamos nuestro análisis con polinomios mónicos por dos razones. En primer lugar, los polinomios de matrices surgen frecuentemente en las aplicaciones. En segundo lugar, el estudio de polinomios mónicos permite ver con mayor claridad las principales características de la teoría espectral.

La existencia de soluciones de un S.E.D. se justifica usando conceptos relacionados con la teoría espectral de matrices polinomiales, fundamentalmente los conceptos de linealización y matriz compañera, los que abordaremos muy brevemente, enunciaremos sin demostración un Teorema que hace uso de los mismos, el lector interesado en realizar un estudio más minucioso del tema puede consultar [1] y [2].

1.1. Conceptos básicos

Toda matriz de orden n,

$$L(\lambda)=\begin{bmatrix} p_{11}(\lambda) & \dots & p_{1n}(\lambda) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1}(\lambda) & \dots & p_{nn}(\lambda) \end{bmatrix} \in M_{n\times n}(C(\lambda))$$

cuyos elementos son polinomios en λ con coeficientes constantes, puede ser expresada por:

$$L(\lambda) = A_l\lambda^l + A_{l-1}\lambda^{l-1} + \cdots + A\lambda + A_0 = \sum_{j=0}^{l} A_j\lambda^j \quad (1)$$

$L(\lambda)$ expresada en la forma (1) es llamada matriz polinomial de grado l. Cuando $A_l = I$, siendo I la matriz identidad, la matriz polinomial es llamada mónica. Las matrices A_i son cuadradas de orden n con elementos complejos y l es el número natural representando el mayor grado de los polinomios $p_{ij}(\lambda)$.

Dos matrices $A(\lambda)$ y $B(\lambda)$ del mismo orden son equivalentes y escribiremos $A(\lambda) \sim B(\lambda)$, si existen matrices inversibles $E(\lambda)$ y $F(\lambda)$ tal que $A(\lambda) = E(\lambda)B(\lambda)F(\lambda)$.

Primero encontraremos una matriz polinomial lineal $\lambda I - A$ que sea equivalente a una matriz polinomial mónica dada $L(\lambda)$. Está claro que no existe tal linealización si la atención se limita a las matrices de orden $n \times n$ (el tamaño de $L(\lambda)$ es el mismo). Para hacer posible la equivalencia de un polinomio lineal $L(\lambda)$ a un polinomio lineal $\lambda I - A$, debemos extender el tamaño de nuestras matrices y elegir una matriz polinomial $\lambda I - A$ de orden $n.l$.

Lema 1.1.1 $\lambda I - A$ y $\lambda I - B$ son equivalentes si y sólo si A y B son similares.

Todo polinomio mónico $p(\lambda) = \lambda^l + a_{l-1}\lambda^{l-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ tiene asociada una matriz de orden $l \times l$ llamada matriz compañera, definida como sigue

$$C_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{l-1} \end{bmatrix}$$

con la propiedad $\det(\lambda I - C_p) = p(\lambda)$.

Trasladando este concepto a matrices, obtenemos que cualquier matriz polinomial mónica $L(\lambda) = \sum_{j=0}^{l} A_j\lambda^j$ tiene asociada una matriz de orden $l.n$ definida por

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & I_n \\ -A_0 & -A_1 & -A_2 & \ldots & -A_{l-1} \end{bmatrix} \quad (2)$$

llamada matriz primera compañera de $L(\lambda)$.

Sean las matrices de orden $n.l$

$$F(\lambda) = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda I & I & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda I & I \end{bmatrix}$$

Y

$$E(\lambda) = \begin{bmatrix} B_{l-1}(\lambda) & B_{l-2}(\lambda) & B_{l-3}(\lambda) & \cdots & B_0(\lambda) \\ -I_n & 0_n & 0_n & \cdots & 0_n \\ 0_n & -I_n & 0_n & \cdots & 0_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_n & 0_n & 0_n & -I_n & 0_n \end{bmatrix}$$

con

$$B_{l-k}(\lambda) = \lambda^{l-k}I + \sum_{j=1}^{l-k} \lambda^{l-j-k}A_{l-j}, \text{ para } k = 1, \cdots, l-1 \text{ y } B_0(\lambda) = I_n$$

Es sencillo verificar la igualdad

$$E(\lambda)(\lambda I_{n.l} - C_1) = \begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix} F(\lambda)$$

Esto es, $\lambda I_{n.l} - C_1 \sim \begin{bmatrix} L(\lambda) & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}$ y se verifica además que $\det(\lambda I_{n.l} - C_1) = \det(L(\lambda))$

La matriz $\lambda I_{n.l} - A$ es llamada linealización de $L(\lambda)$ (también se suele decir que A es la linealización de $L(\lambda)$).

Lema 1.1.2 Para cualquier complejo λ que no sea autovalor de $L(\lambda)$ se verifica la siguiente ecuación:

$$[L(\lambda)]^{-1} = P_1(\lambda I - C_1)^{-1} R_1$$

donde

$$P_1 = [I_n \quad 0 \quad \dots \quad 0] \in M_{n \times n.l}$$

y

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix} \in M_{n.l \times n}$$

1.2. Solución de E.D. Aplicación de la matriz primera compañera

En esta subsección se muestra cómo la matriz (2) es usada para resolver ecuaciones diferenciales homogéneas y no homogéneas conectadas con una matriz polinomial $L(\lambda) = I\lambda^l + \sum_{j=0}^{l-1} A_j \lambda^j$ de orden n.

Teorema 1.2.1[1] Dada la E.D.

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)x(t) = \frac{d^l x}{dt^l} + \sum_{j=0}^{l-1} A_j \frac{d^j x}{dt^j} = f(t),$$

donde $f(t)$ es una función vectorial n −dimensional continua sobre $t \in (-\infty, \infty)$, entonces la solución está dada por la fórmula

$$x(t) = P_1 e^{tC_1} x_0 + P_1 \int_0^t e^{(t-s)C_1} R_1 f(s) ds$$

con $x_0 \in C^{n.l}$ arbitrario. En particular la solución general de la ecuación homogénea $L\left(\frac{d}{dt}\right)x = 0$ está dada por la expresión:

$$x(t) = P_1 e^{tC_1} x_0$$

2. APLICACIONES DE LAS E.D Y LOS S.E.D [3], [4]

Los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden surgen de forma natural cuando se analizan situaciones en la física, la biología, la mecánica, etc.

A continuación mostraremos ejemplos interesantes en los que se evidencia cómo modelar una situación determinada por un S.E.D de primer y segundo orden.

a) Drenado de tanques

Sean los tanques de salmuera **A**, **B**, **C** con volúmenes de 20, 40 y 60 litros, respectivamente, como se muestra en la Fig. 1

Se supone que el fluido ingresa al tanque **A** a una tasa *r*, drena de **A** a **B** a la velocidad *r*, desagua de **B** a **C** a la velocidad *r*, luego drena del tanque **C** a tasa *r*. Por lo tanto, los volúmenes de los tanques permanecen constantes. Sea *r* = 10, para ilustrar las ideas, se supone una agitación uniforme de cada tanque, lo que

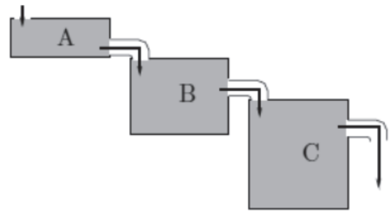

Fig. 1. Tanques de salmuera A, B, C.

implica una concentración uniforme de sal en cada tanque. Con $x_1(t), x_2(t)$ y $x_3(t)$ denotamos la cantidad de sal en el tiempo *t* en cada tanque.

Suponemos que hemos agregado al tanque **A** agua que no contiene sal. Por lo tanto, la sal en todos los tanques finalmente se pierde en los desagües. La cascada de tanques está modelada por *la ley de equilibrio químico*

tasa de cambio = *tasa de entrada* - *tasa de salida*.

Aplicación de la ley de equilibrio, justificada en el análisis de compartimentos, resulta en el sistema diferencial

$$\begin{cases} x_1' = -\dfrac{1}{2}x_1 \\ x_2' = \dfrac{1}{2}x_1 - \dfrac{1}{4}x_2 \\ x_3' = \dfrac{1}{4}x_2 - \dfrac{1}{6}x_3 \end{cases}$$

b) Sistemas de masas acopladas

Los sistemas de masas acopladas ilustran la posibilidad de modelar distintos dispositivos que aparecen en la técnica y la ingeniería modernas.

El modelo de la Fig. 2 representa la relación con la respuesta dinámica de edificios sometidos a sismos. El edificio se modela como un conjunto de masas con acoplamiento elástico-viscoso, y se estudia el control de las sacudidas sísmicas acoplando edificios con frecuencias propias diferentes.

En otro contexto, el de la ingeniería minera, se puede utilizar un modelado dinámico a partir de dos masas acopladas para estudiar y tratar de controlar las vibraciones de la dinámica torsional de una sarta de perforación.

Muchos ejemplos pueden obtenerse de la técnica de automoción. Los vehículos pueden modelarse como un conjunto de sólidos acoplados mediante fuerzas restauradoras y disipativas. Considérese por ejemplo la relación dinámica entre una carrocería autoportante y el chasis sobre el que se apoya. Partes mecánicas esenciales también se modelan mediante acoplamiento de masas, bien con dinámica lineal en el

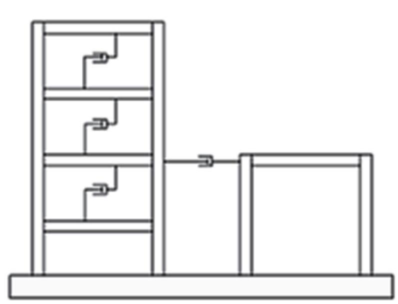

Fig. 2. Modelo para edificio sometido a sismos.

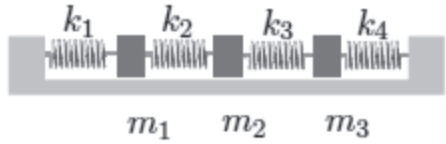

Fig. 3. Tres masas conectadas por resortes.

caso de los sistemas de amortiguación, o con dinámica torsional, como ocurre con los árboles de transmisión.

c) Sistemas de resorte de masa acopladas

Tres masas están unidas entre sí por cuatro muelles, supondremos que las mismas pueden deslizarse a lo largo de una superficie horizontal sin fricción como se muestra en la Fig. 3.

En nuestro análisis usamos las siguientes constantes, variables y suposiciones.

- Masa: Se supone que las masas m_1, m_2 y m_3 son masas puntuales.
- Constantes: Concentradas en su centro de gravedad.
- Constantes de resorte: La masa de cada resorte es insignificante. Los resortes operan según la ley de Hooke: Fuerza = k (elongación). Las constantes k_1, k_2, k_3 y k_4 denotan las constantes de Hooke. Los resortes se restablecen después de la compresión y la extensión.
- Variables de Posición: Los símbolos $x_1(t), x_2(t)$ y $x_3(t)$ denotan la posición de masa a lo largo de la superficie horizontal, medidos desde posiciones de equilibrio, más hacia la derecha y menos hacia la izquierda.
- Puntas fijas: El primer y último resorte están unidos a las paredes fijas.

El método de competencia se usa para derivar las ecuaciones de movimiento. En este caso, la ley es

Segunda Ley de Fuerza de Newton = Suma de las Fuerzas de Hooke.

Las ecuaciones del modelo son:

$$\begin{cases} m_1 x_1''(t) = -k_1 x_1(t) + k_2[x_2(t) - x_1(t)], \\ m_2 x_2''(t) = -k_2[x_2(t) - x_1(t)] + k_3[x_3(t) - x_2(t)], \\ m_3 x_3''(t) = -k_3[x_3(t) - x_2(t)] - k_4 x_3(t). \end{cases}$$

Las ecuaciones se justifican en el caso de todas las variables positivas mediante la observación que los primeros tres resortes son alargados por x_1, $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$, respectivamente. El último resorte está comprimido por x_3, lo que explica el signo menos.

d) Vibraciones mecánicas

Al estudiar sistemas mecánicos en los que aparecen varios cuerpos, como el que muestra la Fig. 4 aparecen de una manera natural sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, como las que permiten estudiar el movimiento de tales cuerpos.

Suponemos que los cuerpos están en equilibrio, es decir, no hay movimiento y los pesos de cada cuerpo se compensan con la fuerza de cada muelle proporcionada por la ley de Hooke. Tiramos del cuerpo M_2 hacia abajo, produciéndose también un desplazamiento de M_1, y a continuación soltamos el cuerpo M_2, produciéndose así un movimiento. Si suponemos que no hay fuerzas debidas al rozamiento y denotamos por F_1 la fuerza recuperadora del primer muelle y F_2 la del segundo, tenemos por la segunda ley de Newton la ecuación

$$M_2 {y_2}'' = F_2$$

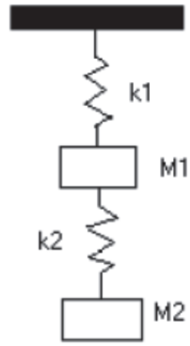

Fig. 4. Ejemplo de sistema mecánico.

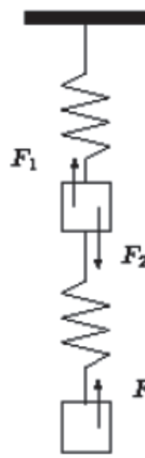

Fig. 5. Sistema mecánico en movimiento.

donde y_2 es lo que se ha separado el cuerpo M_2 de la posición de equilibrio. Para el cuerpo M_1tenemos la siguiente ecuación de movimiento

$$M_1 y_1'' = F_1 - F_2,$$

según el esquema de fuerzas de la Fig. 5, suponiendo que el movimiento de ambos cuerpos es hacia arriba y que ambos muelles están estirados, por lo que la fuerza recuperadora tiende a contraerlos.

Ahora bien, por la ley de Hooke, $F_1 = -k_1 y_1$, donde y_1 es el desplazamiento del primer cuerporespecto de la posición de equilibrio. Por otro lado, $F_2 = -k_2(y_2 - y_1)$, dado que el estiramiento del segundo muelle es $y_2 - y_1$. Las ecuaciones de movimiento son entonces

$$\begin{cases} M_1 y_{1=}'' = -(k_1 + k_2)y_1 + k_2 y_2, \\ M_2 y_2'' = k_2 y_1 - k_2 y_2 \end{cases}$$

Si el sistema de muelles hubiera estado en un tanque con un líquido, apareciendo entonces una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad con constante de proporcionalidad c_1 para el primer cuerpo y c_2 para el segundo, tendríamos ahora por la ley de Newton

$$\begin{cases} M_1 y_{1=}'' = F_1 - F_2 - F_{r1}, \\ M_2 y_2'' = F_2 - F_{r2} \end{cases}$$

donde F_{r1} y F_{r2} denotan las fuerzas de rozamiento. Entonces

$$\begin{cases} M_1 y_{1=}'' = -(k_1 + k_2)y_1 + k_2 y_2 - c_1 y_1{}', \\ M_2 y_2'' = k_2 y_1 - k_2 y_2 - c_2 y_2', \end{cases}$$

2.1. Métodos de resolución. Ventajas del uso del Teorema1.2.1.

Existen numerosos métodos para dar la solución analítica de una E.D o de un S.E.D, pero estos pueden ser de difícil y ardua implementación, requiriendo para ello de un manejo apropiado de Álgebra Lineal y de Cálculo.

En cambio, con el Teorema 1.2.1, visto anteriormente, la solución se obtiene de manera sencilla y de forma natural. Dado un S.E.D, homogéneo o no, lo primero que debemos hacer es hallar su expresión matricial para luego, aplicando el Teorema 1.2.1 y ya sea en forma manual o con ayuda de algún software, obtener la solución.

La aplicación del teorema mencionado evita los inconvenientes que surgen del estudio de los autovalores de la matriz de coeficientes del S.E.D y sin tener que reducir el sistema a un sistema de orden uno con la introducción de nuevas variables.

3. EJEMPLOS RESUELTOS

Ejemplo 1 Obtener la solución analítica del siguiente S.E.D cuyas ecuaciones son

$$\begin{cases} \dfrac{d^3x_1(t)}{dt^3} - \dfrac{d^2x_1(t)}{dt^2} + \dfrac{d^2x_2(t)}{dt^2} + \dfrac{dx_2(t)}{dt} - x_2(t) = 0 \\ \dfrac{d^3x_2(t)}{dt^3} + \dfrac{d^2x_2(t)}{dt^2} = 0 \end{cases}$$

Trabajando algebraicamente,

$$\begin{bmatrix} \dfrac{d^3x_1(t)}{dt^3} - \dfrac{d^2x_1(t)}{dt^2} + \dfrac{d^2x_2(t)}{dt^2} + \dfrac{dx_2(t)}{dt} - x_2(t) \\ \dfrac{d^3x_2(t)}{dt^3} + \dfrac{d^2x_2(t)}{dt^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{d^3x_1(t)}{dt^3} \\ \dfrac{d^3x_2(t)}{dt^3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dfrac{d^2x_1(t)}{dt^2} + \dfrac{d^2x_2(t)}{dt^2} \\ \dfrac{d^2x_2(t)}{dt^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{dx_2(t)}{dt} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x_2(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{d^3x_1(t)}{dt^3} \\ \dfrac{d^3x_2(t)}{dt^3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{d^2x_1(t)}{dt^2} \\ \dfrac{d^2x_2(t)}{dt^2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{dx_1(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d^3x}{dt^3} + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{dx}{dt} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esta última ecuación está asociada a la matriz polinomial mónica $L(\lambda)$, de grado tres y orden dos

$$L(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda^3 + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \lambda + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

cuya matriz primera compañera es:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in M_{6\times 6}$$

Por el Lema 1.1.1 sabemos que $\det(\lambda I_6 - C_1) = \det(L(\lambda)) = \lambda^6 - \lambda^4 = \lambda^4(\lambda^2 - 1)$, entonces los autovalores de $L(\lambda)$ son: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0, \lambda_5 = 1$ y $\lambda_6 = -1$.

Ahora calcularemos e^{tC_1} y aplicaremos el Teorema 1.2.1 para dar la solución general del sistema planteado.

Tomando $f(x) = e^{tx}$ y $R(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^3 + a_1x + a_0$ y haciendo $f(C_1) = R(C_1)$, resulta $e^{tC_1} = a_5C_1^5 + a_4C_1^4 + a_3C_1^3 + a_2C_1^2 + a_1C_1 + a_0I_6$.

Los coeficientes a_i son la solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} f(0) = R(0) \\ f'(0) = R'(0) \\ f''(0) = R''(0) \\ f'''(0) = R'''(0) \\ f(1) = R(1) \\ f(-1) = R(-1) \end{cases}$$

$$a_0 = 1, a_1 = t, a_2 = \frac{1}{2}t^2, a_3 = \frac{1}{6}t^3, a_4 = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}t^2 - 1, a_5 = -\frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{6}t^3 - t$$

Luego

$$e^{tC_1} = \begin{bmatrix} 1 & {}^{t} - \frac{1}{2}\,{}^{2} - \;-1 & ttte & -\frac{1}{6}\,{}^{3} & {}^{t} - tet\,1 & -\frac{1}{2}\,{}^{t} - \frac{1}{2}\,{}^{-t} - \frac{1}{6}\,{}^{3} + \frac{1}{2}\,{}^{2}ttee - 1 \\ 0 & 1 & 0 & t & 0 & {}^{-t} + te - 1 \\ 0 & {}^{t} - te - 1 & 1 & -\frac{1}{2}\,{}^{2} & et - 1 & \frac{1}{2}\,{}^{-} - \frac{1}{2}\,{}^{tt} - \frac{1}{2}\,{}^{2} + ttee \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & e^{-t} + 1 \\ 0 & e^t - 1 & 0 & - & et & -\frac{1}{2}\,{}^{t} - \frac{1}{2}\,{}^{-t} - tee1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación homogénea es:

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e^{tC_1} x_0$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 & e^t - \frac{1}{2}t^2 - t - 1 & t & -\frac{1}{6}t^3 & e^t - t - 1 & -\frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - 1 \\ 0 & 1 & 0 & t & 0 & e^{-t} + t - 1 \end{bmatrix} x_0$$

Ejemplo 2 Retomando el ejemplo a) de la sección anterior, tenemos el sistema

$$\begin{cases} x_1' = -\frac{1}{2}x_1 \\ x_2' = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_2 \\ x_3' = \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{6}x_3 \end{cases}$$

que escrito en forma matricial resulta

$$\begin{bmatrix} x_1' + \frac{1}{2}x_1 \\ x_2' - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \\ x_3' - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{6}x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Trabajando de la misma manera que en el ejemplo anterior, obtenemos la matriz polinomial mónica de grado uno y orden tres:

$$L(\lambda)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\lambda+\begin{bmatrix}1/2&0&0\\-1/2&1/4&0\\0&-1/4&-1/6\end{bmatrix}$$

cuya matriz compañera es $C_1=-A_0$. Usando el Teorema 1.2.1 encontramos la solución general

$$x(t)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}e^{-1/2t}-\frac{6}{5}e^{-1/4t}+\frac{27}{10}e^{1/6t}&0&0\\-e^{-1/2t}-2e^{-1/4t}&\frac{5}{24}e^{-1/2t}+\frac{8}{5}e^{-1/4t}+\frac{9}{10}e^{1/6t}&0\\\frac{1}{4}e^{-1/2t}+\frac{6}{5}e^{-1/4t}-\frac{9}{20}e^{1/6t}&-\frac{4}{5}e^{-1/2t}+\frac{31}{40}e^{-1/4t}-\frac{213}{320}e^{1/6t}&\frac{2}{9}e^{-1/2t}+\frac{8}{5}e^{-1/4t}+\frac{1}{20}e^{1/6t}\end{bmatrix}x_0$$

4. CONCLUSIONES FINALES

Como puede observarse en los ejemplos tratados, la solución de un S. E. D de órdenes superiores homogéneos se encuentra fácilmente usando el Teorema 1.21.

Es decir no aparecen las complicaciones usuales al tratar de resolver sistemas de órdenes superiores, el problema se reduce entonces a encontrar la expresión matricial del sistema de ecuaciones diferenciales y construir la matriz compañera, para luego hacer uso efectivamente del Teorema 1.21.

REFERENCIAS

[1] Gohberg, I., Lancaster, P., Rodman, L., *Matrix Polynomials. Monic Matrix Polynomials*, SIAM, Philadelphia, 11-29 (2009)

[2] Lancaster, P., Tismenetsky, M., *The theory of matrices, Computer Science and Applied Mathematics*, Segunda Edición, 490- 520 (1985)

[3] http://www.math.utah.edu/~gustafso/2250systems-de.pdf

[4] Cánovas Peña, J., *Apuntes de ecuaciones diferenciales*, 73-75 (2004)

POLYNOMIAL MATRICES AND DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abstract – Differential equations (E.D) and systems of differential equations (S.E.D) arise naturally when studying problems in physics, mechanics, economics, biology, etc.Its resolution is not an easy undertaking to carry out, requiring numerous calculations. It is due to these drawbacks that this proposal arises, which consists of five sections, which we will briefly explain. Section one is divided into two subsections, subsection 1.1 recalls concepts seen in Linear Algebra, such as polynomial matrix, companion matrix and linearization, in subsection 1.2, a theorem is stated that establishes the solution of a SED that makes use of the concepts recalled in subsection 1.1. In section two interesting situations are mentioned in which S.E.D of different orders appear, paying attention to the systems of second order equations that arise in mechanics, as for example, the study of coupled masses joined by springs. In section three there are solved examples together with an application problem, which are solved by means of higher order E.D systems applying the theorem. Section four is intended for final conclusions, it will be noted fundamentally the practicality of using the theorem in the resolution of non-homogeneous second order SEDs, which usually require numerous calculations and tedious work for resolution, finally in section five Bibliographic references are listed.

Keywords – Polynomial Matrix, Companion Matrix, Linearization, Differential equations.