



# ANÁLISIS TERMOMECAÁNICO DE UN REACTOR MEDIANTE EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS Y SU VERIFICACIÓN A PARTIR DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

CLAUDIO GABRIEL CANGELOSI, HECTOR CLAUDIO SANZI

Universidad Tecnológica Nacional  
Facultad Regional Haedo  
Paris 537, Haedo, Buenos Aires, Argentina

*(Recibido 4 de octubre de 2019, revisado 13 de enero de 2020, para publicación 24 de febrero de 2021)*

**Resumen** – Las plantas industriales de alta capacidad tecnológica, tales como petroquímicas, refinerías, químicas, alimenticias, metalúrgicas, nucleares, entre otras, poseen componentes contenedores de presión, cañerías y equipos operando en condiciones extremas. En la actualidad, la tecnología alcanzada en el diseño de dichas plantas, permiten operar con sus equipos a elevadas presiones y temperaturas o en situaciones desfavorables en cuanto a la degradación (principalmente la corrosión) de los materiales, pero siempre manteniendo los límites de seguridad y control requeridos por sus operadores. La seguridad y el perjuicio económico que significaría la posible falla de un equipo instalado en la planta, en particular el caso de los reactores, diseñados para operar en altas presiones y temperaturas, requieren de un exhaustivo y apropiado análisis que asegure su integridad estructural a lo largo de su vida útil. En los últimos años, han surgido nuevas especificaciones destinadas a la adecuada selección de los materiales y a cumplir con requerimientos de análisis más exigentes, los cuales se incorporan en el diseño, la fabricación y la inspección. Un reactor de origen nuclear de baja potencia para uso en investigación científica o para abastecimiento energético en regiones aisladas, es tomado como base del presente trabajo, cuyo diseño se encuadra entre las denominadas “Centrales Modulares de Última Generación”. Para el análisis, se determinó la distribución térmica sobre el cuerpo del reactor a través del planteo de las ecuaciones diferenciales de Transferencia de Calor, resueltas por el Método de las Diferencias Finitas donde se determinó la distribución térmica y el estado tensional asociado y donde los resultados se presentan en forma adimensional, de sencilla resolución y de uso práctico. Para corroborar los resultados obtenidos, se planteó un modelo tridimensional por elementos finitos.

**Palabras clave** – Convección natural, tensiones de origen térmico, elementos finitos.

## 1. INTRODUCCION

Las plantas industriales de alta capacidad tecnológica, tales como petroquímicas, refinerías, químicas, alimenticias, metalúrgicas, nucleares, entre otras, poseen componentes contenedores de presión operando en condiciones extremas de presión y/o temperatura o en situaciones desfavorables en cuanto a la degradación (principalmente la corrosión) de los materiales, pero siempre manteniendo los límites de seguridad y control requeridos por sus operadores.

Para esta situación es requerido un exhaustivo y apropiado análisis que, junto con los requerimientos y especificaciones incorporados en los códigos de aplicación destinados a seleccionar adecuadamente los materiales y cumplir con las pautas para el diseño y fabricación, aseguren la integridad del componente a lo largo de su vida útil.

El problema de transferencia de calor por conducción y convección entre un fluido y la pared interna de un recipiente a presión ha sido estudiado y tratado ampliamente, existiendo suficiente literatura del caso.

En este trabajo se presenta una metodología de análisis a partir del planteo de las ecuaciones diferenciales de Transferencia de Calor por conducción y convección resueltas por el Método de Diferencias Finitas, para determinar la distribución térmica y el estado tensional asociado, para la condición operativa normal

y sobre las paredes cilíndricas de un recipiente contenedor de presión, válido para aquellas zonas del recipiente lo suficientemente alejadas de transiciones o cambios bruscos o ahusamientos del espesor.

El componente a presión, sobre el cual se realizó el presente estudio, se trata de un reactor nuclear de baja potencia, encuadrado entre las denominadas “Centrales Modulares de Última Generación”.

Los resultados de la distribución de temperatura y tensiones desarrolladas sobre dicho componente se presentan expresados en gráficos y tablas mediante una formulación general adimensional de rápida y de práctica aplicabilidad.

Para corroborar los resultados obtenidos, se plantea un modelo tridimensional por elementos finitos, utilizando el programa Ansys [1].

El estudio se lleva a cabo bajo los lineamientos del Código ASME Sección III División 1, Sub-Sección NB “Quality Class” Clase 1 [2].

Si bien el procedimiento propuesto trata de un componente cuyo proceso está relacionado con su uso en la industria nuclear, el alcance y conceptos generales son aplicables para un reactor de características similares, utilizado en la industria convencional.

### 1.1. Descripción general y operativo del reactor para uso en investigación (RPR)

El presente estudio se lleva a cabo para un reactor de investigaciones utilizado en la industria nuclear, y diseñado con el objeto de analizar su factibilidad, en cuanto a su construcción, manejo y uso, bajo los lineamientos del Código ASME Sección III División 1, Sub-Sección NB “Quality Class” Clase 1 [2].

La principal diferencia del reactor nuclear del instalado en una planta convencional es que se trata de un componente integrado, es decir, tanto el circuito Primario (núcleo, generadores de vapor y refrigerante primario), incluyendo los mecanismos de control, como el Secundario, se encuentran contenidos en el mismo Recipiente de Presión del Reactor (RPR).

El refrigerante primario circula por el interior del RPR, debido a un fenómeno de convección natural, evitando de esta manera el uso de bombas. El fluido primario es “Agua Liviana”, comúnmente conocido como agua destilada, que incorpora un tratamiento anti-desincrustante. Esta característica hace que los reactores de Agua Liviana sean más simples y menos costosos.

Al no utilizar bombas para la circulación del fluido, se evita el uso de generadores eléctricos de emergencia que deban proveer energía para el funcionamiento en operación, o para los sistemas de control asociados a la seguridad, como es habitual en los reactores tradicionales.

La Fig. 1, muestra una representación simplificada y un corte de un Reactor Nuclear típico (RPR) utilizado en investigaciones.

El equipo consiste en 12 (doce) Generadores de Vapor, ubicados de forma radial y perpendicular al eje axial del recipiente y en la parte superior de este. Cada Generador está constituido por 6 (seis) camisas

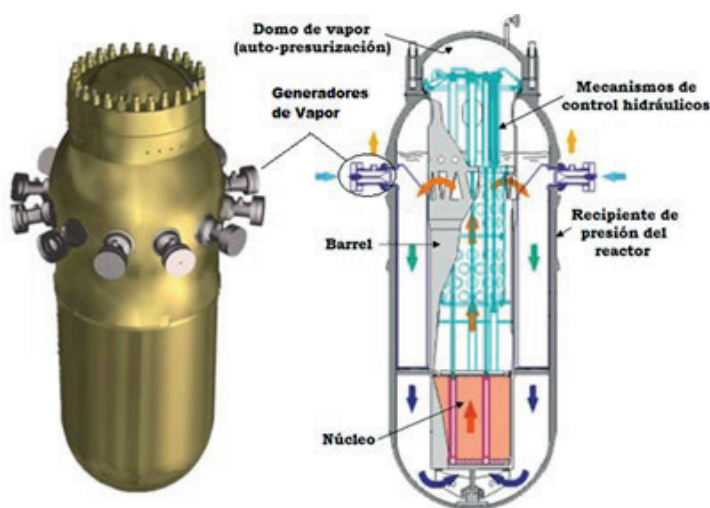


Fig. 1. Recipiente de presión del reactor nuclear.

tubulares, actuando, así como intercambiador de calor entre los circuitos Primario y Secundario, donde en el Primario el fluido gana temperatura en el interior del reactor y cede su calor al fluido del circuito Secundario, para que lo transforme en energía mecánica y luego eléctrica.

El fluido del circuito Primario toma energía térmica, circulando por convección natural, entre los espacios del núcleo central con elementos combustibles de uranio levemente enriquecido y posteriormente asciende por el centro del recipiente hacia la parte superior donde se encuentran los Generadores de Vapor, cediendo calor y así enfriado, retorna por las paredes al centro del reactor para repetir el ciclo.

Este movimiento se realiza por convección natural, es decir por la diferencia de densidades en un mismo fluido debido a un campo de temperaturas variable, en razón de espacio, y todo sometido a la acción de un campo gravitatorio. Este tipo de movimiento hace prescindir de cualquier medio mecánico externo (bombas), lo cual le confiere confiabilidad al proceso.

La transferencia de calor entre el fluido primario y secundario se realiza en dos pasos:

- Precalentamiento del condensado (secundario), proveniente de las turbinas, el cual toma temperatura en serpentines ubicados en la zona exterior inferior y media, del recipiente a presión (RPR), Fig. 2.
- Cambio de fase del fluido secundario, de líquido a gaseoso producido en los intercambiadores de calor denominados Generadores de Vapor.

En todo el proceso de transferencia de calor, se utiliza el cambio de fase del fluido primario de vapor a líquido, de manera de optimizar este proceso de intercambio. Por lo que se supone que el fluido primario está en fase de vapor cuando egresa de los generadores de vapor y comienza a condensarse a la altura inferior de los serpentines de calentamiento.

Para el análisis y para el fluido primario, se toman valores de temperatura y presión suponiéndolo totalmente en fase de vapor, ya que se corresponde con un caso operativo del Reactor. Esta hipótesis permite economizar considerablemente el esfuerzo analítico y computacional para el cálculo de tensiones y deformaciones.

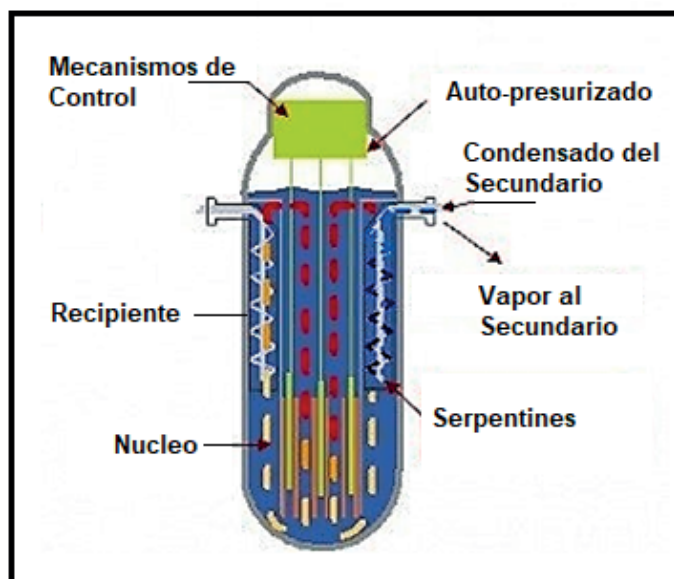


Fig. 2. Ubicación de los Serpentines dentro del recipiente de presión del reactor nuclear.

## 1.2. Geometría de detalle y datos generales del Reactor

El estudio se realiza en dos secciones cilíndricas del RPR que presentan diferentes espesores, en zonas alejadas de interferencias y transiciones. En la Fig. 3, se presenta un corte transversal y detalle dimensional general del reactor.

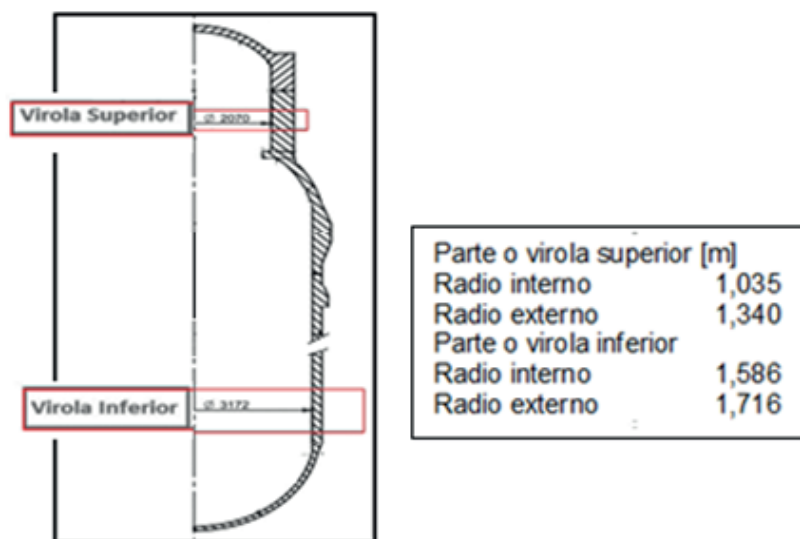


Fig. 3. Geometría de detalle del Reactor.

El material constituyente del recipiente es un ASME SA508 Gr.3 C1.1 [3]. Para la temperatura media de operación de 183 °C, se tiene los siguientes coeficientes [4] y [5]:

Conductividad térmica, $k$	40,53 W/m°C
Calor específico, $c$	491,7 J/kg°C
Densidad, $\rho$	7750 kg/m <sup>3</sup>
Módulo de Elasticidad, $E$	182,3 GPa
Coefficiente de dilatación térmica, $\alpha$	$1,27 \times 10^{-5} \text{°C}^{-1}$
Coefficiente de Poisson, $\nu$	0.3

El presente trabajo, propone un análisis a partir de la distribución de temperatura que se desarrollan en el cuerpo cilíndrico del reactor en su condición operativa, con el objeto de obtener las máximas tensiones térmicas, que aseguren su integridad, sobre la base del código de aplicación.

Bajo condiciones operativas normales, el reactor está sometido a un intercambio de calor entre la fase líquida y de vapor del fluido, y a altas presiones.

Para el análisis se asumen válidos los siguientes conceptos:

- El proceso se estudia en zonas alejadas de transiciones o cambios bruscos del espesor del reactor.
- La distribución de temperaturas se mantiene lineal a través del espesor, una situación muy aproximada a la real. Esta hipótesis permite economizar considerablemente el esfuerzo analítico y computacional para el cálculo de tensiones y deformaciones.

Dicha simplificación considera al recipiente parcialmente lleno de vapor y en contacto directo sobre las paredes de las virolas del recipiente. Este vapor fluye en el interior con caudales y temperaturas que fluctúan de acuerdo a las demandas operativas del conjunto.

## 2. TRATAMIENTO DIFERENCIAL DEL PROBLEMA

### 2.1. Análisis de Transferencia de Calor

De acuerdo a la geometría del componente y características del proceso, solo se presenta conducción de flujo calórico y variación de temperatura en sentido radial y uniforme en sentido axial.

La fórmula diferencial de partida para la determinación de la distribución de temperaturas y el estado tensional asociado es bien conocido y consta en la bibliografía específica [6], [7] y [8], entre otros, donde en todos los casos, es importante determinar el coeficiente de transferencia térmica por convección.

El Manual del Ingeniero Químico (R. Perry) [9] es bien utilizado en la industria y cuenta con gran respaldo experimental, mientras que el trabajo de L. Nobel [4], cuentan con el respaldo del Joint Nuclear Research Center. Vinculando entre si las ecuaciones de continuidad de los desplazamientos y de dilatación térmica, incluidas en referencia [8], a través de la dilatación térmica, tenemos un sistema de ecuaciones térmico estructural acoplado, el cual puede ser resuelto, entre otros, mediante el Método de Diferencias Finitas.

Mediante este procedimiento, los resultados obtenidos de la distribución de temperatura y tensiones desarrolladas pueden ser presentados a partir de una formulación general adimensionalizada, expresadas en gráficos y tablas de rápida y práctica aplicabilidad.

En este camino, a continuación, se presenta un procedimiento alternativo para determinar la distribución térmica y el campo tensional en el cuerpo cilíndrico del reactor.

Suponiendo que la temperatura en un sector del cuerpo cilíndrico del reactor es independiente de las coordenadas axial y circunferencial, el problema queda expresado a través de la siguiente ecuación de conducción de calor, en coordenadas cilíndricas [6]:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left( k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{k}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \text{ en } r_i \leq r \leq r_e \quad (1)$$

Con las siguientes condiciones de contorno y temporal:

$$h(T - T_b) = k \frac{\partial T}{\partial r} \quad \text{en } r = r_i ; t > 0 \quad (2.a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{en } r = r_e ; t > 0 \quad (2.b)$$

$$T = T_0 \quad \text{en } r_i \leq r \leq r_e ; t = 0 \quad (3)$$

Siendo:

$T(r,t)$  Temperatura para un valor de radio dado, función del tiempo;

$r$  Coordenada radial;

$t$  Tiempo;

$k$  Conductividad térmica del material del recipiente;

$c$  Calor específico;

$\rho$  Densidad;

$h$  Coeficiente de transferencia térmica por convección, entre la corriente del fluido (vapor) y la pared interna del coeficiente.

Donde, planteando las siguientes hipótesis:

a)  $c$ ,  $\rho$  y  $k$  se consideran constantes e independientes de la temperatura.

b) El fluido circula por el interior de la virola del RPR, con una variación de temperatura  $T_b$  lineal con el tiempo entre un instante inicial  $t_0$  arbitrario y un instante final  $t_f$ :

$$T_b(t) = T_{b0} + \frac{T_{bf} - T_{b0}}{t_f - t_0} \cdot (t - t_0) \quad (4)$$

$T_{b0}$  es la temperatura del fluido en  $t = t_0$  y  $T_{bf}$  su valor en  $t = t_f$ .

Adimensionalizando el problema diferencial, se definen las siguientes magnitudes:

Temperatura adimensional:

$$\theta(R, \tau) = \frac{T - T_{b0}}{T_{bf} - T_{b0}} \quad (5)$$

Coordenada radial adimensional:

$$R = \frac{r}{r_i} \quad (6)$$

Tiempo adimensional:

$$\tau = \frac{k}{c\rho r_i^2} t \quad (7)$$

Número de Biot:

$$Bi = \frac{r_i h}{k} \quad (8)$$

Introduciendo estas variables en el sistema diferencial (1-4), y luego de simples arreglos algebraicos, se llega al siguiente sistema diferencial:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial R} \quad \text{en } 1 \leq R \leq R_e \quad (9)$$

$$Bi(\theta - 1) = \frac{\partial \theta}{\partial R} \quad \text{en } R = 1; \tau > 0 \quad (10.a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial R} = 0 \quad \text{en } R = R_e = r_e/r_i; \tau > 0 \quad (10.b)$$

$$\theta = 0 \quad \text{en } 1 \leq R \leq R_0; \tau = 0 \quad (11)$$

Para cada situación particular, geometría del recipiente, velocidad o caudal del vapor, la relación entre  $h$  y  $\nu$  puede obtenerse a partir de relaciones conocidas de los números de Reynolds, de Nusselt y de Prandtl:

$$Re = \frac{VD}{\nu_b}; \quad Pr = \frac{\nu_b}{\alpha_b}; \quad Nu = \frac{hD}{k_b} \quad (12)$$

donde:

- $\nu$  Velocidad del fluido;
- $D$  Diámetro interno de la virola;
- $\mu_b$  Viscosidad cinemática del fluido;
- $\nu_b$  Viscosidad dinámica del fluido,  $\nu_b = \mu_b / \rho_b$
- $\rho_b$  Densidad “bulk” del fluido;
- $\alpha_b$  Difusividad térmica del fluido;
- $h$  Coeficiente de transferencia térmica pelicular;
- $k_b$  Conductividad térmica del fluido.

La relación matemática y empírica entre el Re del vapor y el Nu, se analiza en las referencias [5] y [9], por lo tanto, los únicos parámetros adimensionales del problema son entonces:

$$A = \frac{\theta_{bf} - \theta_{b0}}{\tau_f - \tau_0} = \frac{c\rho r_i^2}{k(t_f - t_0)} \quad (13)$$

$$\delta = \frac{r_e - r_i}{r_i} = R_e - 1 \quad (14)$$

## 2.2. Análisis de Deformaciones y Tensiones

El tratamiento analítico general para el presente problema es de complicada de resolución, por lo cual se propone un solución a partir del método de diferencias finitas, con un esquema explícito para las derivadas de primer grado y desarrollo de la Serie de Taylor, utilizando los primeros tres términos para la derivada espacial de segundo orden.

Para el parámetro A (expresión (13)), se consideran los valores de  $\theta_{bf}$ ,  $\theta_{b0}$ ,  $\tau_f$  y  $\tau_0$  que corresponden al caso de carga. Por su parte, para el parámetro  $\delta$  (expresión (14)), se consideran los valores de  $r_e$  y de  $r_i$  de las diferentes virolas a analizar.

En la Fig. 4 se presenta el recinto de cálculo y las condiciones de contorno.

Empleando una grilla en diferencias finitas,  $(x_i, t_j, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m)$ , se tiene:

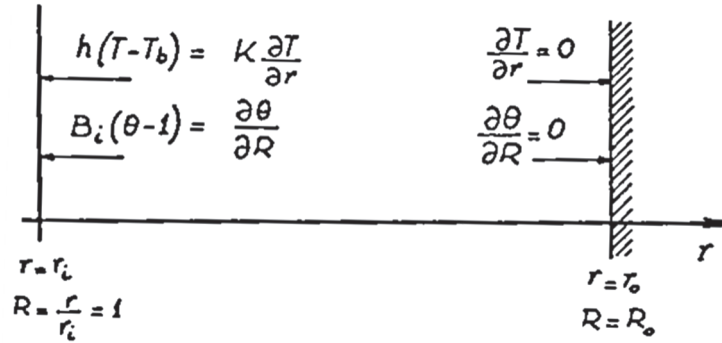


Fig. 4. Recinto de cálculo y condiciones de contorno.

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{\Delta \tau} (\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j}); \quad \Delta \tau = \tau_{j+1} - \tau_j \quad (15.a)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial R^2} = \frac{1}{\Delta R^2} [\theta_{i-1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i+1,j}]; \quad \Delta R = R_{i+1} - R_i \quad (15.b)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial \theta}{\partial R} = \frac{1}{R \Delta R} [\theta_{i+1,j} - \theta_{i,j}]; \quad \Delta R = R_{i+1} - R_i \quad (15.c)$$

Finalmente reemplazando las ecuaciones (15.a), (15.b) y (15.c) en la (9), resulta:

$$\theta_{i,j+1} = a\theta_{i+1,j} + b\theta_{i,j} + d\theta_{i-1,j} \quad (16)$$

siendo:

$$a = \frac{R \Delta \tau + \Delta R \Delta \tau}{R \Delta R^2} \quad (17)$$

$$b = \frac{R \Delta R^2 + 2 R \Delta \tau - \Delta \tau \Delta R}{R \Delta R^2} \quad (18)$$

$$d = \frac{\Delta \tau}{\Delta R^2} \quad (19)$$

El dominio espacial está comprendido entre  $R=1$  y  $R = R_e = 1 + \delta$ , siendo las condiciones de borde:

$$Bi(\theta_{1,j} - 1) = \frac{1}{\Delta R} [\theta_{2,j} - \theta_{1,j}] \quad \text{en } R = 1 \quad (20)$$

$$\theta_{n,j} = \theta_{n-1,j} \quad \text{en } R = R_e = 1 + \delta \quad (21)$$

De esta manera, queda así definido un sistema de diferencias finitas de tres incrementos, una para la coordenada espacial y las dos restantes para incrementos de la variable temporal.

Dicha propuesta se implementa en un programa en lenguaje Fortran, desarrollado expresamente para resolver este problema, denominado FORTRAN DIFFIN.

Una vez resueltas estas ecuaciones de forma numerica, se debe obtener el estado tensional adimensionalizado.

En este camino, planteando las ecuaciones constitutivas, de equilibrio y de compatibilidad, adecuadamente combinadas, se conduce a un sistema de ecuaciones diferenciales (generalmente en derivadas parciales) con sus respectivas condiciones de contorno [5], que permite resolver el tema tensional.

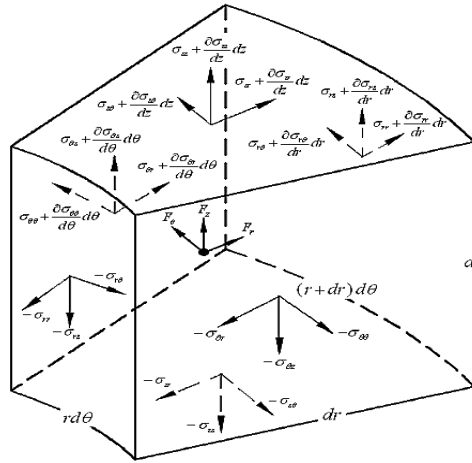


Fig. 5. Tensiones en un elemento sólido infinitesimal en coordenadas cilíndricas.

En la Fig. 5, se representa un elemento diferencial de volumen, en coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ , donde se presentan las tensiones expresadas en dicho sistema coordenado.

Suponiendo que el cuerpo cilíndrico del reactor es lo suficientemente largo como para que las condiciones de borde no varíen en la dirección  $z$ , nos queda:

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \frac{\partial \tau_z}{\partial z} = 0 \quad (22)$$

El equilibrio en las direcciones axial y circunferencial se satisface automáticamente, por lo cual, planteando el equilibrio en la dirección radial y despreciando infinitésimos de segundo orden, se llega a la ecuación siguiente:

$$\sigma_r \cdot r \cdot d\theta + 2\sigma_\theta \cdot dr \cdot \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = \left(\sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} dr\right) (r + dr) \cdot d\theta \Rightarrow \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (23)$$

Adimensionalizando, se llega a las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\sigma_r(R, \tau)}{E\alpha(T_{bf} - T_{bo})} = \frac{1 - \frac{1}{R^2}}{R_e^2 - 1} \int_1^{R_e} \theta(R', \tau) R' dR' - \frac{1}{R^2} \int_1^R \theta(R', \tau) R' dR \quad (24)$$

$$\frac{\sigma_\theta(R, \tau)}{E\alpha(T_{bf} - T_{bo})} = \frac{1 + \frac{1}{R^2}}{R_e^2 - 1} \int_1^{R_e} \theta(R', \tau) R' dR' + \frac{1}{R_e^2} \int_1^{R_e} \theta(R', \tau) R' dR' - \theta(R, \tau) \quad (25)$$

$$\frac{\sigma_z(R, \tau)}{E\alpha(T_{bf} - T_{bo})} = \frac{4\nu - 1}{R_e^2 - 1} \int_1^{R_e} \theta(R', \tau) R' dR' - \theta(R, \tau) \quad (26)$$

Como método de integración, para obtener tensiones, se usó la Regla Numérica de Simpson, incluida en el programa FORTRAN DIFFIN:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right] \quad (27)$$



### 3. RESULTADOS DEL ANÁLISIS

Para el presente estudio se adopta una variación lineal de la temperatura, entre los siguientes valores extremos inicial y final:

$$T_{bo} = 40^{\circ}\text{C} \quad \text{para } t_o = 0 \text{ seg.}$$

$$T_{bf} = 325^{\circ}\text{C} \quad \text{para } t_f = 21000 \text{ seg.}$$

Los datos geométricos para las dos virolas a considerar en el análisis son:

$$r_i = 1,035 \text{ m}; r_e = 1,340 \text{ m, resultando } \delta = 0,295$$

$$r_i = 1,586 \text{ m}; r_e = 1,716 \text{ m, resultando } \delta = 0,082$$

De acuerdo con las ecuaciones (8), (13) y (14), utilizando las variables para vapor de agua, definidas en [5] y [10], y las propiedades del material indicadas en [3], se tiene el coeficiente de transferencia térmica  $h = 3370 \text{ W/m}^2\text{C}$ .

Para el sector superior del reactor, donde  $\delta$  es igual a 0.295, resulta que la temperatura y tensiones circunferencial y longitudinal adimensionalizados se presentan en Figuras 6.1 a 6.3.

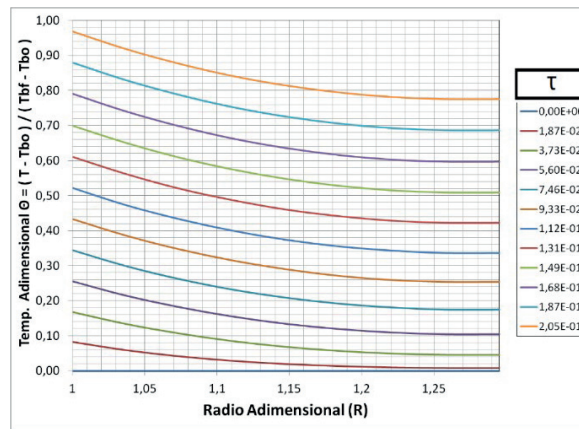


Fig. 6.1. Temperatura en función del Radio y distintos Tiempos. Resultados adimensionales.

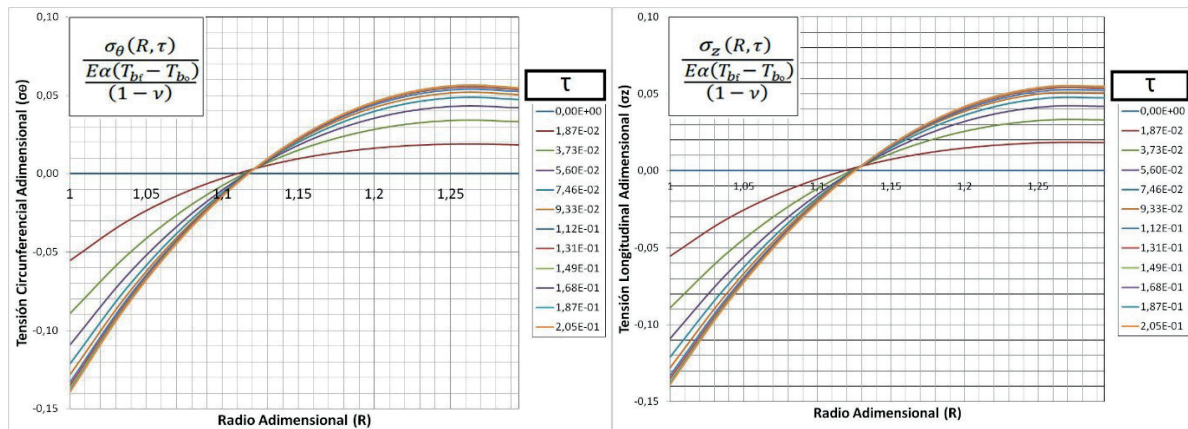


Fig. 6.2-6.3. Tensiones Circunferencial y Longitudinal en función del Radio y distintos Tiempos. Resultados adimensionales.

Siendo  $A = 4,842$  y  $Bi = 86,05$

Para el sector inferior del reactor, donde  $\delta$  igual a 0.082, resulta que la temperatura y tensiones circunferencial y longitudinal adimensionalizados se presentan en figuras 6.4 a 6.6.

Siendo  $A = 11,370$  y  $Bi = 131,87$

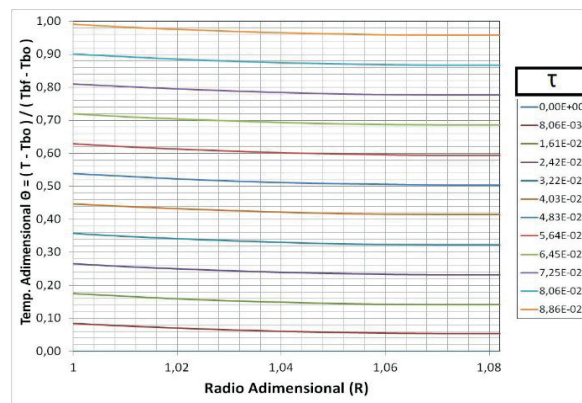


Fig. 6.4. Temperatura en función del Radio y distintos Tiempos. Resultados adimensionales

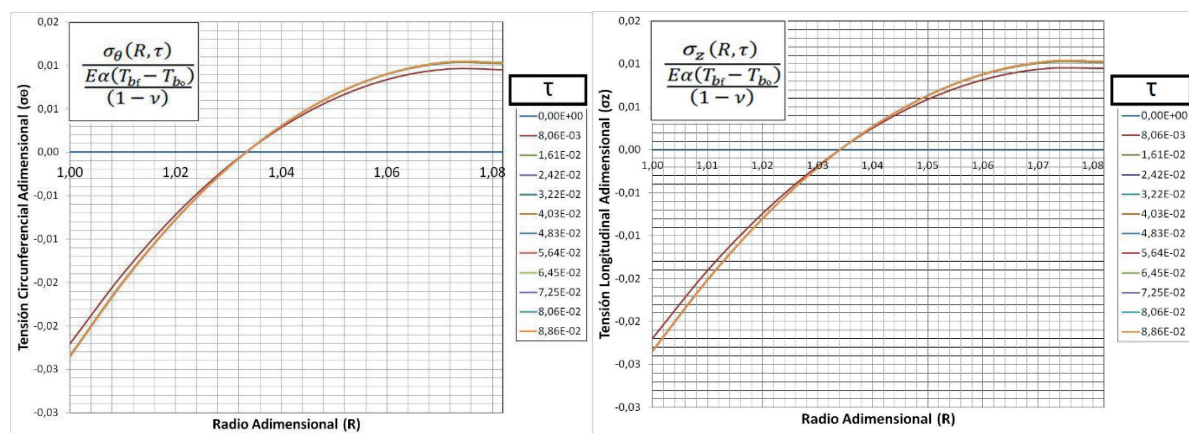


Fig. 6.5-6.6. Tensión Circunferencial y Longitudinal en función del Radio y distintos Tiempos. Resultados adimensionales.

#### 4. SIMULACIÓN COMPUTACIONAL

Para el análisis se ha seleccionado el sector que se corresponde con la virola superior, con radio interior  $r_i$  de 1,035 m y exterior  $r_e$  de 1,340 m, portrarse de las tensiones mayores que las alcanzadas en la inferior.

Previamente y a los fines de interpretación teórica, se presenta el desarrollo y tratamiento numérico del método de elementos finitos [12] y [13].

##### 4.1. Descripción del método de los Elementos Finitos.

Sea  $\Omega \subset R^3$  un dominio (abierto y acotado) ocupado por un sólido, cuyo contorno  $\partial\Omega = \Gamma$  está conformado por la unión disjunta de una frontera  $\Gamma_D$  (denominada frontera de Dirichlet) asociada a las condiciones de borde geométricas (CBG), y una frontera  $\Gamma_N$  (denominada frontera de Neumann), asociada a las condiciones de borde naturales (CBN) (es decir  $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  y  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ ).

La formulación fuerte del problema de elasticidad estacionario puede expresarse en los siguientes términos:

Siendo  $[H^n]^o$ ,  $[L^n]^o$  y  $[T^n]^o$  espacios funcionales, que son conjunto de funciones continuas de orden  $n$ , y definidas en un espacio vectorial de orden  $o$ , cuyo dominio puede ser el sólido en cuestión ( $\Omega$ ) o bien sus fronteras ( $\Gamma_D$ ,  $\Gamma_N$ ), y dado:

- un campo vectorial representativo de las fuerzas volumétricas  $f \in [L^2(\Omega)]^3$ .
- un campo prescrito en la frontera de Dirichlet  $g \in [H^1(\Gamma_D)]^3$ .

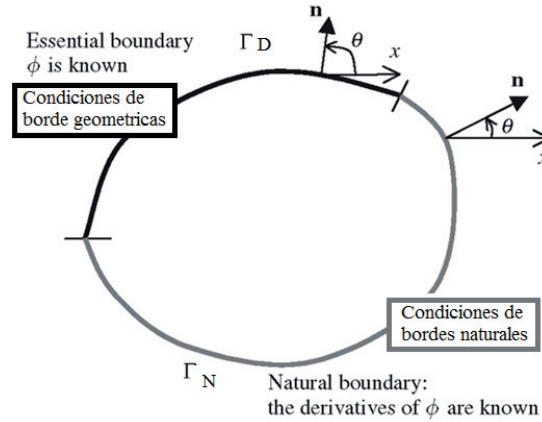


Fig. 7. Condiciones de bordes a aplicar sobre el sólido en estudio.

- un campo vectorial en la frontera de Neumann  $h \in [L^2(\Omega)]^3$ .

Y conocidos los parámetros positivos  $\lambda$  y  $\mu$ , se busca la solución vectorial  $u\{x,y,z\} \in [H^1(\Omega)]^3$  y el tensor de tensiones simétrico  $\sigma$  tal que cumpla:

$$\nabla \cdot \sigma = -f \text{ en } \Omega \quad (28)$$

$$\varepsilon(u) = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (\nabla u + (\nabla u)^T) \text{ en } \Omega \quad (29)$$

$$\sigma(u) = \lambda \text{tr}(\varepsilon)I + 2\mu\varepsilon \text{ en } \Omega \quad (30)$$

Satisfaciendo las condiciones de borde:

$$u = g \text{ en } \Gamma_D \text{ (Condición de borde geométrica)} \quad (31)$$

$$(\lambda \text{tr}(\varepsilon)I + 2\mu\varepsilon) \cdot \mathbf{n} = h \text{ en } \Gamma_N \text{ (Condición de borde natural)} \quad (32)$$

Donde, para cierto dominio  $\psi$ ,  $L^2$  es el conjunto de las funciones de cuadrado integrable, definido como:

$$L^2(\psi) = \{u \text{ integrables} : \int \psi u^2 d\psi < \infty\} \quad (33)$$

y donde  $H^1$  es el espacio de Sobolev de orden 1, definido como:

$$H^1(\psi) = \left\{u \in L^2(\psi) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\psi), \forall i\right\} \quad (34)$$

La expresión (28) representa la condición de equilibrio de un elemento diferencial de sólido, mientras que la expresión (29) plantea la compatibilidad geométrica entre deformaciones y tensiones, donde  $\varepsilon$  es el tensor de pequeñas deformaciones, el cual que puede interpretarse como la componente simétrica del tensor gradiente de desplazamientos.

La expresión (30) representa la ley de Hooke generalizada escrita en términos de los parámetros de Lamé ( $\lambda$  y  $\mu$ ) que mantienen, con el módulo de elasticidad del material  $E$  y con el coeficiente de Poisson  $\nu$ , las siguientes relaciones:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (35)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (36)$$

Con el objeto de simplificar el manejo analítico, las ecuaciones anteriores pueden reformularse de modo de asociar la única incógnita al campo de los desplazamientos  $u\{x,y,z\}$ .

La elección de los desplazamientos como variables básicas del problema obedece a que, conocidos estos, la obtención de los campos de deformaciones y tensiones requiere simples derivaciones y operaciones algebraicas ordinarias.

Para obtener tales expresiones, se parte de las ecuaciones de equilibrio, de las ecuaciones de compatibilidad y de la ley de comportamiento lineal isótropo, escritas (por comodidad) de acuerdo a la notación de índices repetidos:

$$\sigma_{ij,j} = -f_i \quad (37)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{u_{i,j} + u_{j,i}}{2} \quad (38)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda u_{k,k}\delta_{ij} \quad (39)$$

Agrupando se tiene:

$$\mu u_{i,jj} + \mu u_{j,ij} + \lambda u_{k,kj}\delta_{k,j} = -f_i \quad (40)$$

Y como  $u$  es una función bien definida (sin discontinuidades ni inflexiones abruptas), se cumple que:

$u_{j,ij} = u_{jji}$ , por lo que resulta:

$$(\lambda + \mu)u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} = -f_i \quad (41)$$

Las ecuaciones (38), (39) y (40), con  $i = 1, 2, 3$ , se conocen como ecuaciones de Navier y admiten ser expresadas en función de operadores usuales en teoría vectorial de campos, lo que resulta cómodo si se han de expresar en otros sistemas coordenados no cartesianos:

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot u) + \mu\Delta u = -f \quad (42)$$

El problema a resolver, expresado en términos de una única magnitud incógnita, resulta:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot u) + \mu\Delta u &= -f \text{ en } \Omega \\ u &= g \text{ en } \Gamma D \\ (\lambda \operatorname{tr}(\varepsilon(u))I + 2\mu\varepsilon(u)) \cdot \underline{n} &= h \text{ en } \Gamma N \end{aligned} \quad (43)$$

La resolución del problema mediante la aplicación del método de elementos finitos, en su formulación variacional, exige la multiplicación de la ecuación diferencial por una función de prueba bien comportada, y su posterior integración en todo el dominio.

$$\int \Omega [(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot u) + \mu\Delta u] \cdot v \, d\Omega = -\int \Omega f \cdot v \, d\Omega \quad (44)$$

La formulación fuerte de (43) es equivalente a la formulación débil de (44), para todo:

$$v \in [H1D(\Omega)]^3 \text{ con } H1D(\Omega) = \{v \in H1(\Omega) : v \text{ satisface las CBG en } \Gamma D\}$$

Al proponer una solución aproximada expresada como combinación lineal de ciertas funciones de forma, y elegir una función de prueba, la forma integral de (44) se transforma en un sistema lineal de ecuaciones algebraicas en los coeficientes de la combinación lineal.

A partir de la resolución de dicho sistema, se obtiene la solución aproximada del problema original. En general, el método de elementos finitos permite obtener sistemas algebraicos conformados por una matriz del sistema del tipo rala, lo cual facilita su resolución.

Debe considerarse, sin embargo, que en modelos reales, las condiciones del problema físico en general no son estacionarias sino transitorias, y la ecuación de equilibrio involucra una derivada temporal de segundo orden.

En problemas termo-mecánicos deben incluirse términos que involucren al campo escalar de temperaturas en todo el dominio, el cual constituye una solución del problema de conducción tridimensional del calor, sujeto a las condiciones de borde apropiadas. El problema térmico puede expresarse de acuerdo a:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \theta}{\partial t(x, t)} &= \alpha \Delta \theta + G \text{ en } \Omega \\
q_s &= -k \left( \frac{\partial \theta}{\partial n} \right) \text{ en } \Gamma q \\
\theta &= \theta_b \text{ en } \Gamma b \\
\theta(x, 0) &= \theta_0(x) \text{ en } \Omega \text{ (Condición inicial)}
\end{aligned} \tag{45}$$

Donde cada término se corresponde con:

- $x$  Vector de posición genérico,
- $\theta(x, t)$  Campo escalar de temperaturas en el sólido,
- $\alpha$  Difusividad térmica del material,
- $G$  Término fuente de la ecuación del calor,
- $q_s$  Flujo de calor en la frontera de Neumann  $\Gamma q$ ,
- $k$  Conductividad térmica del material,
- $\theta_b$  Temperatura prescrita en la frontera de Dirichlet,

$$\Gamma b \quad (\text{con } \Gamma q \cup \Gamma b = \Gamma = \partial \Omega \text{ y } \Gamma q \cap \Gamma b = \Phi),$$

$\theta_0$  Campo inicial de temperaturas.

El acoplamiento entre los problemas elástico y térmico se expresa mediante una ley constitutiva modificada (expresión 46) que involucra una propiedad térmica del material ( $\beta$ ), en adición a las 2 constantes elásticas independientes ( $\lambda$  y  $\mu$ ).

$$\sigma(u) = \lambda \text{tr}(\varepsilon)I + 2\mu\varepsilon - \beta(\theta - \theta_0)I \quad \text{en } \Omega \tag{46}$$

Siendo  $I$  el Tensor Identidad

El procedimiento de análisis descripto es programable y se puede llevar a cabo a partir de la utilización de un programa de elementos finitos.

En este camino, se plantea un modelo de cálculo tridimensional 3D de elementos finitos, utilizando el programa Ansys Student [1] para la resolución del campo elástico térmico y de tensiones.

Como ya se mencionó para dicha comparación, el estudio se realiza para un sector que se corresponde con la virola superior de radio interior  $r_i$  de 1,035 m y exterior  $r_e$  de 1,340 m, por corresponder tensiones considerablemente mayores que las presentes en la virola inferior.

#### 4.2. Presentación del Modelo Tridimensional 3D

Con el objeto de corroborar los resultados obtenidos del estudio presentado, se plantea un modelo tridimensional de elementos finitos, altamente densificado, para determinar la distribución de temperaturas y el estado tensional sobre el cuerpo del recipiente completo, incluyendo las transiciones y/o discontinuidades estructurales.

Para este caso, donde se requiere mayor detalle en el modelo planteado, es que se utiliza el Programa Ansys Student [1], para la resolución del campo elástico térmico y de tensiones, el cual presenta una gran versatilidad en cuanto a la selección del tipo de elementos utilizados y la posibilidad de contar con un programa para encarar un análisis detallado de integridad estructural.

Por lo tanto, se propone un modelo de elementos finitos tridimensional, utilizando los elementos Tetraédricos de 4 nodos externos y 6 nodos internos, identificados como C3D10: 10-Node Quadratic Triangular Prismatic Element del programa Ansys.

Teniendo en cuenta el plano de simetría geométrica y de cargas del recipiente, se consideró la mitad del mismo, es decir un sector de 180 grados, colocando las condiciones de borde adecuadas que representan el comportamiento completo del componente, Fig. 8.

Se ha propuesto una malla altamente densificada, refinando en las zonas más complejas del cuerpo del recipiente donde se presentan curvaturas pronunciadas o posibles discontinuidades estructurales.

Para las cargas térmicas, se considera que el flujo por convección (intercambiado con el vapor), en la zona interior del recipiente presenta un coeficiente de intercambio de película dado en acuerdo con las

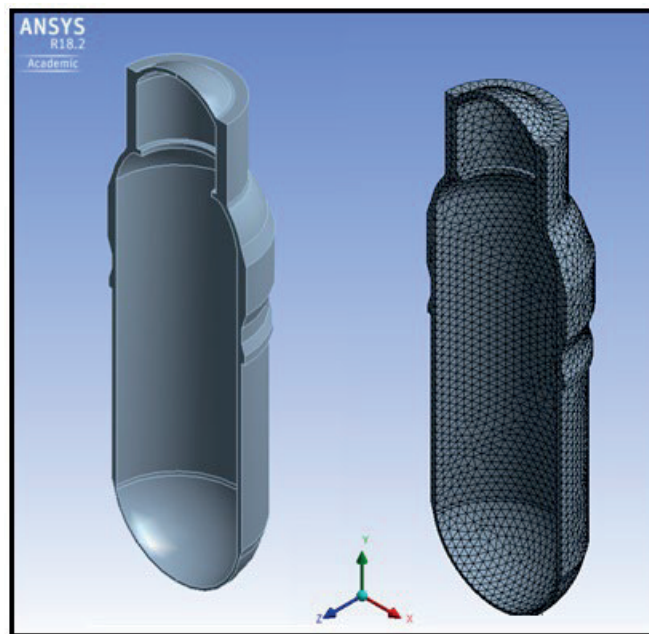


Fig. 8. Modelo de Elementos Finitos tridimensional del recipiente en estudio.

características del proceso (*Convective Heat Film Coefficient*) y datos tomados de simulaciones de proceso operativos del reactor [14, 15], con puntos límites de:

$T = 40\text{ }^{\circ}\text{C}$  para  $t = 0\text{ seg.}$

$T = 325\text{ }^{\circ}\text{C}$  para  $t = 21000\text{ seg.}$

Para las condiciones de borde, se consideró el plano de simetría XY, restringiendo los desplazamientos perpendiculares al plano de simetría, según eje Z.

A partir del modelo planteado, en la Fig. 9, se presentan los resultados obtenidos del estado tensional equivalente de Von Mises, referidos a un sistema de coordenadas cilíndricas, donde se observa que la Tensión Máxima alcanzada en la parte superior del cuerpo del recipiente, en el sector cilíndrico es de 143,53 MPa.

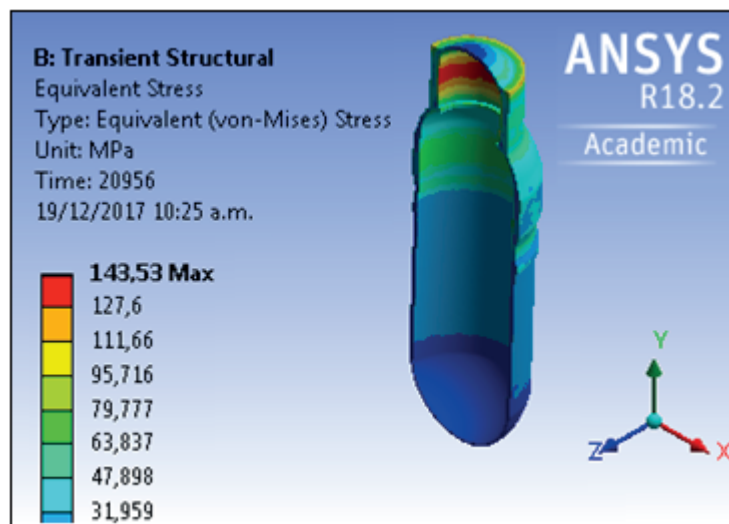


Fig. 9. Tensiones de Von Mises (MPa) del reactor.



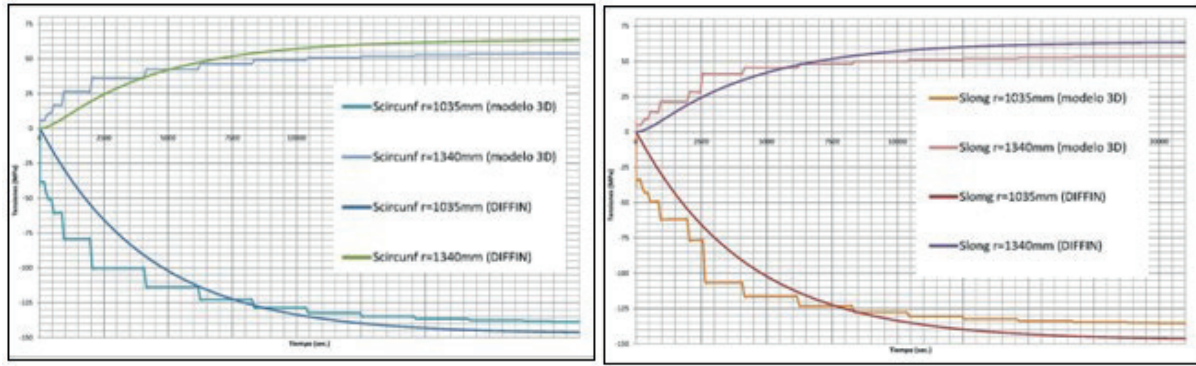


Fig. 10. Tensiones Circunferenciales (Scircunf.) y Longitudinales (Slong.) del Modelo 3D *versus* Diferencias Finitas (Programa FORTRAN DIFFIN).

## 5. COMPARACIÓN DE RESULTADOS DE ELEMENTOS FINITOS, RESPECTO DEL DE DIFERENCIAS FINITAS

Para los fines de la comparación, se toman los resultados obtenidos en la virola superior, tomando los valores de las tensiones Circunferenciales y Longitudinales, Fig. 10.

A continuación, se presenta la comparación de los resultados obtenidos mediante el Modelo Tridimensional 3D, respecto de Diferencias Finitas, a saber:

En ambas comparaciones, se observa que los resultados obtenidos mediante el procedimiento computacional por elementos finitos, respecto de la solución obtenida mediante Diferencias Finitas, proporciona un aceptable grado de aproximación, del orden del 5 al 8 por ciento.

Como ya fue mencionado anteriormente y teniendo en cuenta el programa de cálculo utilizado en versión estudiantil, y acotada dicha versión en su alcance y tiempos, los resultados obtenidos para los primeros instantes iniciales no deberían ser considerados para su comparación, ya que el paso de tiempo adoptado es excesivo para representar los gradientes de tensiones alcanzados.

## 6. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó una metodología de análisis a partir del planteo de las ecuaciones diferenciales de Transferencia de Calor por conducción y convección resueltas por el Método de Diferencias Finitas, para determinar la distribución térmica y el estado tensional sobre las paredes cilíndricas de un reactor de baja potencia para su uso en investigación científica, cuyo diseño se encuadra entre las denominadas “Centrales Modulares de Última Generación”, válido para aquellas zonas lo suficientemente alejadas de transiciones o cambios bruscos o ahusamientos del espesor.

El método de diferencias finitas propuesto fue resuelto a partir de la elaboración de un programa computacional específico, en lenguaje Fortran, desarrollado para este trabajo y denominado FORTRAN DIFFIN, el cual presenta sus resultados de la distribución de temperatura y tensiones, expresados en gráficos y tablas mediante una formulación general adimensional, que permite una interpretación muy rápida en tiempos de ingeniería y de sencilla aplicación.

Para corroborar los resultados obtenidos, se planteó un modelo tridimensional por elementos finitos, utilizando el programa Ansys [1]. De dicha comparación se constataron resultados muy similares, con pequeñas diferencias en sus magnitudes, ya que se trataba de la utilización de un programa acotado en la cantidad de elementos, para uso académico.

El estudio se llevó a cabo bajo los lineamientos del Código ASME Sección III División 1, Sub-Sección NB “Quality Class” Clase 1 [2]. El estado tensional obtenido deberá combinarse con el resto de los estados de cargas presentes, en particular peso y presión.

Si bien el procedimiento propuesto trata de un componente cuyo proceso está relacionado con su uso en la industria nuclear, el alcance y conceptos generales son aplicables para un reactor de características similares, utilizado en la industria convencional.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] ANSYS Program, Student Versión 18.1.
- [2] BPVC Section III, *Rules of Constructions for Nuclear Facility Components* (2015)
- [3] Especificaciones Técnicas para el material: ASME SA508 Gr.3.
- [4] The heat transfer coefficient as a function of steam quality for high-pressure once through flow boiling, with determination of the transition points between the regions of particular heat transfer, L. Nobel, Joint Nuclear research Center, Ispra Establishment, Italy (1970)
- [5] WASP: Water and Steam Properties. Version 1.21, Katmar Software. South Africa (1995)
- [6] Ibrahim, H., Guzelbey Coupled Thermoelastic Analysis of Thick-Walled Pressurized Cylinders, Begum Kanhkama, Aysegul Abusoglu, *International Journal of Energy and Power Engineering* (2013)
- [7] Lindon Thomas, *Fundamentals of Heat Transfer*, 1<sup>st</sup> ed, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA (1980)
- [8] S. Timoshenko, *Strenght of material part 2, advanced theory and problems*, 3rd Edition, D. Van Nostrand Company Inc., Princenton, NJ (1956)
- [9] R. Perry, *Manual del Ingeniero Químico*, VI edición (1992)
- [10] M. Ragheb, *Boiling Water Reactors*, Chapter 3 (2014)
- [11] BPVC Section VIII-Rules for Construction of Pressure Vessels Division 1, Edition 2015
- [12] Gatica, G.N., Marquez, A., Meddahi, S., "An augmented mixed finite element method for 3D linear elasticity problems", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **231**(2), 526-540 (2009)
- [13] Olivella, X.O., Agelet de Saracibar Bosch, C., *Mecánica de medios continuos para ingenieros*. Edición UPC (2000)
- [14] Thermo-Mechanical Stress Analysis of PWR Pressure Vessel and Nozzles under Grid Load-Following Mode, Argonne National Laboratory, ANL/LWRS-16/01
- [15] Desarrollo de una formulación general adimensional para la temperatura y las tensiones térmicas en el cuerpo de un reactor de investigaciones para su uso en la Industria Convencional y Nuclear, Tesis de Maestría en Ingeniería Estructural Mecánica, UTN-FRH, Ing. Claudio Cangelosi, Ing. Hector Sanzi (2019)

## THERMOMECHANICAL ANALYSIS OF A REACTOR USING THE FINITE DIFFERENCE METHOD AND ITS VERIFICATION FROM THE FINITE ELEMENTS METHOD

**Abstract** – High technological industrial plants such as petrochemicals, refineries, chemicals, food, metallurgical, nuclear, among others, have pressure container components, pipes and equipment operating in extreme conditions. At present, the technology achieved in the design of these plants, allow to operate with their equipment at high pressures and temperatures or in unfavorable situations in terms of degradation (mainly corrosion) of the materials, but always maintaining the safety and control limits required by their operators. The safety and economic damage that would mean the possible failure of equipment installed at the plant, in particular the case of reactors, designed to operate at high pressures and temperatures, require thorough and appropriate analysis to ensure their structural integrity over its lifetime. In recent years, new specifications have emerged for the proper selection of materials and to meet the most demanding analysis requirements, which are incorporated in design, manufacturing and inspection. A reactor of low power nuclear origin for use in scientific research or for energy supply in isolated regions, is taken as the basis of this work, whose design falls among the so-called "Modular Last Generation Centrals". For the analysis, the thermal distribution over the reactor body was determined through the approach of the differential Heat Transfer equations, resolved by the Finite Difference Method, where the thermal distribution and its associated tension status and where the results are presented in a-dimensional form, simple to resolve and practical to use. To corroborate the results obtained, a three-dimensional model was raised by finite elements method.



**Keywords** – Natural Convection, Thermal Origin Stresses, Finite Elements.