



ESTUDIO DE LA INFLUENCIA DE LAS FUERZAS EXTERNAS EN EL DESEMPEÑO DE FILTROS MODALES DISCRETOS

FEDERICO R. MASCH¹, ROGELIO L. HECKER^{1,2}

¹Facultad de Ingeniería, UNLPam, Argentina

²CONICET, Argentina

(Recibido 13 de marzo de 2023, para publicación 27 de marzo de 2023)

Resumen – Los filtros modales discretos se constituyen a partir de una suma ponderada de las señales de salida de sensores instalados sobre una estructura flexible. Las posiciones de los sensores resultan preponderantes en el desempeño del filtro, en especial cuando la cantidad de sensores utilizados es menor a la cantidad de componentes modales que se desean manipular. En este trabajo se presenta una nueva metodología de diseño de filtros modales discretos que identifica las posiciones de los acelerómetros y la posición de la fuerza externa para mejorar el desempeño de dichos filtros, aplicados a estructuras flexibles. Primero, para cada posición candidata de la fuerza externa, la metodología propuesta determina las posiciones de un número determinado de acelerómetros y sus ganancias, para que el filtro pueda aislar lo mejor posible el modo deseado en su salida. Para ello se implementa un criterio de mínimo error, utilizando la norma L_2 , entre la señal de salida del sistema nominal y la salida deseada, para cada una de las posibles configuraciones. Después de esto, se implementa un índice de desempeño que permite comparar la efectividad del filtro para diferente número de acelerómetros. Dicha metodología se implementó y se evaluó mediante simulaciones en el diseño de un filtro modal discreto sobre una viga esbelta flexible en una configuración de extremos empotrado-libre. Se presentan los resultados que muestran el mejor desempeño utilizando 1, 3 y 5 acelerómetros y que además identifican el lugar más efectivo para ubicar la fuerza externa. Los resultados evidencian que es posible diseñar un filtro modal con menor cantidad de acelerómetros que la cantidad de modos de vibración a manipular, considerando la posición de la fuerza externa como variable de diseño.

Palabras clave – Filtro modal, estructuras flexibles, ubicación de acelerómetros.

1. INTRODUCCIÓN

El concepto de filtro modal discreto fue propuesto por Meirovitch y Baruh [1] como una alternativa metodológica al concepto de filtro modal distribuido previamente desarrollado por los mismos autores. El filtro modal discreto se basa en la utilización de señales de salida de un conjunto de sensores instalados en una estructura flexible para conformar una composición modal específica en dichas señales de salida. En otras palabras, el filtro modal discreto permite la manipulación independiente de las componentes modales de un conjunto finito de modos de vibración en sus señales de salida.

En los años posteriores a la introducción del filtro modal discreto, se han presentado diversas metodologías de diseño e implementaciones en campos diversos como: control activo de vibraciones, identificación de parámetros modales, monitoreo de vibraciones, detección de daño estructural y detección de cargas [2-11]. Por un lado, Shelley [12] brindó una metodología con la cual determina las ganancias de estos filtros en base a respuestas en frecuencia de estructuras flexibles obtenidas de manera experimental. Preumont *et al.* [3], propuso también una metodología similar basada en respuestas en frecuencia experimentales y teóricas, estableciendo que el número de sensores debe ser al menos igual a la cantidad de componentes modales que se desean manipular de manera independiente por parte del filtro. En tanto Gawronski [13] y Friswell [14], propusieron metodologías basadas a partir de la utilización de modelos en variables de estado de la dinámica de la estructura flexible. La determinación de las ganancias del filtro en estas metodologías es abordada en base al concepto de señal error nula, es decir una diferencia nula entre las señales de salida deseadas y las señales de salida reales del filtro. En todas estas metodologías, las posiciones de los sensores no son consideradas variables de diseño. Esto se debe, a la premisa de disponer de una cantidad de sensores

igual o mayor a la cantidad de modos cuyas componentes modales se desean manipular, la cual le otorga al filtro la invarianza en su desempeño con respecto a las posiciones adoptadas para los sensores.

Posteriormente, Pagani Jr. y Trindade [6] demostraron que es posible establecer una composición modal deseada en las señales de salida del filtro mediante una adecuada selección de la posición de los sensores, con una cantidad de sensores menor a la cantidad de componentes modales manipuladas por el filtro. Su metodología utiliza un enfoque similar al de Preumont *et al.* [3], abordando el diseño a partir de la discretización del dominio frecuencial de respuestas teóricas. En un trabajo posterior, Trindade y Pagani Jr. [15] presentaron resultados numéricos y experimentales del impacto de las incertidumbres en la posición de los sensores y las ganancias del filtro en el desempeño de este último. Continuando con esta línea de trabajo, Shigueoka y Trindade [16] abordan la determinación de la configuración adecuada de posición de los sensores a partir de un dominio continuo de posiciones candidatas. Tanto el trabajo de Pagani Jr. y Trindade [6] como el trabajo de Shigueoka y Trindade [16] abordan el caso de diseño en el que la estructura flexible se encuentra sometida a una única fuerza de excitación externa.

Este trabajo presenta una metodología de diseño para filtros modales discretos en la cual se consideran las posiciones de los sensores y las posiciones de las fuerzas externas como variables de diseño. La metodología se apoya en la utilización de un modelo en variables de estado para describir la dinámica de la estructura flexible. El diseño del filtro en el dominio temporal evita la problemática de la sensibilidad del diseño con respecto a la discretización del dominio frecuencial, como ocurre en otras metodologías. A diferencia de las metodologías analizadas, esta permite el diseño de filtro modales discretos en estructuras flexibles sometidas a múltiples fuerzas externas, tal cual fue presentado en [17] con posiciones de las fuerzas predeterminadas. En este trabajo, la metodología es ampliada para considerar la influencia de las posiciones de las fuerzas externas en el desempeño de los filtros modales discretos. Más específicamente, la metodología propuesta determina las ganancias del filtro, las posiciones de los sensores y la ubicación de la fuerza externa a partir del criterio de minimización de la diferencia entre las señales de las salidas deseadas del filtro y las señales de las salidas teóricas del filtro, usando el concepto de la norma L_2 . La metodología se valida de forma numérica y para el caso del diseño de dos filtros modales cuyos objetivos particulares son aislar las componentes modales de aceleración del primer y segundo modo de vibración transversal de una viga flexible de sección rectangular constante, en una configuración de extremos empotrada-libre.

2. DINÁMICA NOMINAL

La dinámica nominal que describe las vibraciones de un cuerpo flexible sujeto a fuerzas externas se puede representar en variables de estado mediante la siguiente expresión:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_k\mathbf{u}, \quad (1)$$

donde el vector \mathbf{x} reúne los estados de n modos de vibración y está conformado por:

$$\mathbf{x} = [\omega_1 q_1 \quad \dot{q}_1 \quad \omega_2 q_2 \quad \dot{q}_2 \quad \cdots \quad \omega_n q_n \quad \dot{q}_n]^T. \quad (1.1)$$

Las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B}_k se definen como:

$$\mathbf{A} = \text{diag}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \dots, \mathbf{A}_n), \quad (1.2)$$

$$\mathbf{B}_k = [\mathbf{B}_{k1}, \mathbf{B}_{k2}, \dots, \mathbf{B}_{kn}]^T, \quad (1.3)$$

$$\mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} 0 & \omega_j \\ -\omega_j & 2\omega_j\zeta_j \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

$$\mathbf{B}_{kj} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varphi_j(r_1) & \varphi_j(r_2) & \cdots & \varphi_j(r_{n_u}) \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

donde la variable $q_j(t)$, describe el estado del j -modo de vibración de la estructura flexible, el cual tiene una frecuencia ω_j de resonancia, un factor de amortiguamiento ζ_j y una forma de modo $\phi_j(r)$ asociado.

Por otro lado, la salida de los acelerómetros en función de las variables de estado y de las entradas de excitación, se puede describir como:

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x} + \mathbf{D}_k \mathbf{u} \quad (2)$$

donde el vector \mathbf{s}_k reúne la salida de n_s acelerómetros, donde el subíndice k se usa para distinguir diferentes combinaciones de las posiciones de n_u entradas, expresadas en el vector \mathbf{u} , con posibles posiciones de los n_s acelerómetros. Por conveniencia las siguientes matrices se expresan como:

$$\mathbf{C}_k = \mathbf{P}_k \mathbf{R} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{D}_k = \mathbf{P}_k \mathbf{V}_k, \quad (2.2)$$

donde la matriz \mathbf{P}_k reúne la contribución en magnitud de cada forma de modo, ϕ_j , en la ubicación r_i de cada uno de los acelerómetros. Por lo tanto, cada elemento queda definido como:

$$\mathbf{P}_{k(ij)} = \phi_j(r_i) \quad i = 1, 2, \dots, n_s \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3)$$

Por otro lado, \mathbf{R} y \mathbf{V}_k , para el caso de usar acelerómetros quedan definidas como:

$$\mathbf{R} = \Delta \mathbf{A} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{V}_k = \Delta \mathbf{B}_k \quad (2.5)$$

donde $\Delta_{(ij)} = \delta_{i(j-1)}$ es la delta de kronecker. En la práctica se puede tener el caso de que los acelerómetros presenten un determinado ancho de banda o que se quiera filtrar la salida de los mismos para no tener influencia del ruido de las señales. En estos casos, se puede asumir la aplicación de un filtro de primer orden, que incorporando a la dinámica del sistema nominal (1) y (2) y reordenando se puede expresar como:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B}_k \mathbf{u}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_f = -\alpha \mathbf{I} \mathbf{x}_f + \mathbf{R} \mathbf{x} + \mathbf{V}_k \mathbf{u}$$

$$\mathbf{s}_{kf} = \mathbf{P}_k \mathbf{x}_f \quad (3)$$

donde \mathbf{x}_f es una variable intermedia para poder introducir la dinámica del filtro. La frecuencia de corte de este filtro de primer orden queda representada por $f_c = \alpha/2\pi$. Como se puede observar, el vector \mathbf{s}_{kf} reúne las salidas filtradas de cada uno de los acelerómetros.

3. DISEÑO DE FILTRO MODAL ÓPTIMO

3.1. Filtro modal discreto

En un filtro modal, la salida de los acelerómetros \mathbf{s}_{kf} , se pueden combinar linealmente para obtener un vector de salida \mathbf{y}_{kf} , de la siguiente manera:

$$\mathbf{y}_{kf} = \mathbf{\Omega} \mathbf{s}_{kf}. \quad (4)$$

Por lo tanto, los elementos de la matriz $\mathbf{\Omega}$ representan la ponderación de cada acelerómetro para poder obtener cada una de las salidas del filtro modal. Lo que se pretende es seleccionar estos elementos de tal manera que en cada salida de este filtro se obtenga la presencia de un solo modo de vibración. Por ejemplo, que el primer elemento del vector \mathbf{y}_{kf} presente solamente la dinámica del modo 1 y así sucesivamente para todos los modos que se pretendan incluir.

Para encontrar los valores de la matriz Ω que cumpla con este objetivo, se parte de que la salida del filtro modal para el sistema nominal \mathbf{y}_k , tiene que ser igual o lo más próximo posible a la salida homóloga para una dinámica deseado \mathbf{y}_d . En base a esto se establece como sistema deseado a:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_d &= \mathbf{A}\mathbf{x}_d + \mathbf{B}_k\mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{x}}_{df} &= -\alpha\mathbf{I}\mathbf{x}_{df} + \mathbf{R}\mathbf{x}_d + \mathbf{V}_k\mathbf{u} \\ \mathbf{y}_{df} &= \mathbf{P}_d\mathbf{x}_{df}.\end{aligned}\quad (5)$$

Como se puede observar, este sistema tiene la misma dinámica que el sistema nominal pero la construcción del filtro se hace con la matriz \mathbf{P}_d , la cual se puede especificar fácilmente para establecer una correlación directa entre los modos de vibración y la salida deseada del filtro modal, como se verá luego en la implementación.

Combinando los sistemas (3) y (5) se puede construir un único sistema, definiendo además al error entre la salida de ambos sistemas $\mathbf{e}_{kf} = \mathbf{y}_{kf} - \mathbf{y}_{df}$, resultando en:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}}_d \\ \dot{\mathbf{x}}_f \\ \dot{\mathbf{x}}_{df} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R} & \mathbf{0} & -\alpha\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} & \mathbf{0} & -\alpha\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_d \\ \mathbf{x}_f \\ \mathbf{x}_{df} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_k \\ \mathbf{B}_k \\ \mathbf{V}_k \\ \mathbf{V}_k \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{e}_{kf} &= [\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \Omega\mathbf{P}_k \quad -\mathbf{P}_d] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_d \\ \mathbf{x}_f \\ \mathbf{x}_{df} \end{bmatrix},\end{aligned}\quad (6)$$

de manera simplificada se puede escribir como $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_e\mathbf{z} + \mathbf{B}_e\mathbf{u}$ y $\mathbf{e}_{kf} = \mathbf{C}_e\mathbf{z}$. Ahora se pretende encontrar los valores de Ω de tal manera de minimizar el error \mathbf{e}_{kf} para lo cual se usará la norma L_2 . La interpretación de la norma L_2 en este caso se da a través de su definición:

$$\|\mathbf{e}_{kf}\|_2 = \sqrt{\sum_i^{n_y} \sum_j^{n_u} \|e_{kf(ij)}\|_2^2} \quad (7)$$

$$\|e_{kf(ij)}\|_2^2 = \int_0^\infty e_{kf(ij)}^2(t) dt. \quad (7.1)$$

donde claramente, en (7) se puede observar la contribución al error de las combinaciones posibles entre todas las n_u entradas las n_y salidas del filtro. En (7.1) se observa la contribución temporal de cada uno de los mencionados errores.

Para el cálculo de esta norma se usa la siguiente expresión:

$$\|\mathbf{e}_{kf}\|_2^2 = \text{tr}(\mathbf{C}_e\mathbf{W}\mathbf{C}_e^T), \quad (8)$$

donde \mathbf{W} es una matriz simétrica semi definida positiva denominada Graminiano de controlabilidad, la cual es solución de la siguiente ecuación de Lyapunov:

$$\mathbf{W}\mathbf{A}_e + \mathbf{A}_e^T\mathbf{W} + \mathbf{B}_e\mathbf{B}_e^T = \mathbf{0}. \quad (9)$$

La solución a este problema, o sea el valor de Ω que minimiza la norma L_2 , se calcula como:

$$\Omega^* = \mathbf{Y}^T\mathbf{X}^{-1}, \quad (10)$$

donde

$$Y = P_k Q_{11} P_k^T \quad (10.1)$$

$$X = P_k Q_{12} P_d^T, \quad (10.2)$$

$$W_{22} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}, \quad (10.3)$$

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}. \quad (10.4)$$

donde a su vez, como referencia a las particiones de las matrices, se especifica que $W \in \mathbb{R}^{6n \times 6n}$, $W_{22} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $Q_{11} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $Q_{12} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

La ecuación (10) representa una solución genérica al problema planteado, donde la cantidad de sensores puede ser menor a la cantidad de modos que se pretenden manipular con el filtro modal. En el caso particular que se tenga la misma cantidad de sensores que la cantidad de modos a manipular, esta solución converge a la ya conocida expresión de:

$$\Omega^{**} = P_d P_k^{-1}. \quad (11)$$

Lo que se conoce como filtro perfecto ya que en teoría la norma L_2 del error es igual a cero. Sin embargo, en este trabajo se aborda el problema general de cuando se poseen menos sensores que los modos a estudiar.

3.2. Índice de evaluación I_k

En la sección anterior se encontró el filtro modal óptimo para una dada configuración de fuerzas externas y de acelerómetros sobre el cuerpo flexible. La pregunta que surge es si existe una configuración de acelerómetros que sea la mejor para el desempeño del filtro modal dado un cuerpo flexible con una configuración determinada de fuerzas externas. También surge la pregunta de cuántos acelerómetros son necesarios para obtener una respuesta aceptable del filtro modal.

En este sentido, se propone evaluar cada una de las configuraciones de posición posibles de los acelerómetros en base al siguiente índice de desempeño:

$$I_k = \frac{\|e_{kf}(\Omega^*)\|_2}{\|y_{df}\|_2}. \quad (12)$$

Como se puede observar, este índice evalúa la norma L_2 del error mínimo que se obtuvo para una configuración dada de acelerómetros dividido por la norma L_2 de la salida deseada del filtro modal. Esta última medida se calcula de manera estándar como:

$$\|y_{df}\|_2^2 = \text{tr}(P_d W_d P_d^T), \quad (12.1)$$

donde W_d es solución de:

$$A_d W_d + W_d A_d^T + B_d B_d^T = \mathbf{0}, \quad (12.2)$$

donde a su vez:

$$A_d = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ R & -\alpha I \end{bmatrix} \quad (12.3)$$

y

$$B_d = \begin{bmatrix} B_K \\ V_K \end{bmatrix}. \quad (12.4)$$

Este índice de desempeño del filtro estará en función de las posiciones de la o las fuerzas externas que excitan la estructura flexible como así también de la cantidad de acelerómetros utilizados. Por lo tanto, el procedimiento completo es definir un conjunto de ubicaciones candidatas para las fuerzas externas, como así también establecer el conjunto de configuraciones de posición de los acelerómetros, determinar el filtro modal para cada una de las combinaciones posibles entre el conjunto de configuraciones de fuerzas y el

conjunto de configuraciones de los acelerómetros, para luego identificar aquella cuyo índice de desempeño I_k sea el mínimo (mejor desempeño) sobre el conjunto de combinaciones

4. IMPLEMENTACIÓN Y RESULTADOS

4.1. Sistema a estudiar y especificaciones del filtro

Para la implementación de la técnica descrita se realizaron simulaciones a partir de la dinámica de las vibraciones transversales de una viga empotrada-libre. La viga posee una longitud de 2000 mm y una sección rectangular dada por su alto de 51.4 mm por un ancho de 5.1 mm. La viga es de acero con una densidad de 7850 kg/m³ y módulo elástico de 200 GPa.

A partir de la teoría Euler-Bernoulli para vigas esbeltas se dispone de una solución analítica que determina las frecuencias naturales de dicha viga, de las cuales en este caso se consideró evaluar solamente las 6 primeras, como se observa en la Tabla 1. También de forma analítica se determinan las formas de los modos de vibración transversal en función de la longitud de la barra. Por último, para la conformación del modelo nominal, se consideró un modelo proporcional para el mecanismo de disipación, para lo cual se usó un valor del coeficiente de amortiguamiento de $\zeta = 0.005$ para todos los modos considerados.

Tabla 1. Frecuencias naturales de la barra en estudio.

Modo	1	2	3	4	5	6
f [Hz]	1.1	6.6	18.5	36.3	60.0	89.7

Con el objetivo de estudiar el impacto de las posiciones de las fuerzas externas en el desempeño de un filtro modal, se plantea el diseño de dos filtros que manipulen por separado las componentes modales de aceleración de estos primeros seis modos de vibración transversal de la viga. Un primer filtro modal, el Filtro I, destinado a aislar la componente de aceleración modal del primer modo de vibración y el segundo filtro, el Filtro II, destinado a aislar la componente de aceleración del segundo modo de vibración de la viga flexible. El diseño de estos dos filtros determina por un lado, la posición adecuada de una única fuerza externa aplicada sobre la viga flexible sobre un conjunto de 11 posiciones candidatas, y por otro lado, las ganancias y las posiciones de los acelerómetros sobre la viga. Cabe aclarar que la metodología desarrollada permite el diseño en los casos de estructuras flexibles sometidas a múltiples fuerzas externas. Sin embargo, y sin pérdida de generalidad, el presente diseño contempla una única fuerza externa con el objetivo de reducir la complejidad del análisis.

La cantidad de acelerómetros a utilizar en el diseño de estos filtros es definida en tres casos diferentes de diseño: 1 acelerómetro, 3 acelerómetros y 5 acelerómetros. En tanto las posiciones candidatas para estos acelerómetros son 37 y se encuentran distribuidas de manera uniforme sobre la longitud de la viga. Por último, se estableció que estos acelerómetros posean un filtro de primer orden con una frecuencia de corte $f_c = 500$ Hz. La conformación del modelo de la dinámica nominal y deseada se hacen en función de las frecuencias naturales predichas por la mencionada teoría de Euler-Bernoulli, las magnitudes de las formas de modo en las posiciones candidatas para la fuerza externa y las posiciones candidatas de los acelerómetros y el mecanismo de amortiguamiento proporcional asumido. Por último, el comportamiento deseado de cada filtro se define como $\mathbf{P}_d = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ para el filtro I y $\mathbf{P}_d = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ para el Filtro II.

4.2. Diseño de los filtros modales en base a un único acelerómetro

El diseño de los dos filtros modales utilizando un único acelerómetro consistió en determinar el índice de desempeño I_k para cada una de las 407 combinaciones posibles a partir de las 11 posiciones candidatas de la fuerza externa y las 37 posiciones candidatas para el único acelerómetro.

En la Fig. 1, se presenta el índice de desempeño de cada uno de los filtros en función de la posición de la fuerza externa. Más específicamente, el índice presentado para cada posición de la fuerza es el menor índice obtenido a partir del diseño del filtro considerando las 37 posiciones posibles para el acelerómetro.

En tanto en la Fig. 2 se presentan las salidas de ambos filtros modales en el dominio frecuencial correspondientes a las configuraciones de posición de fuerza externa y acelerómetros cuyos índices de desempeño

asociados resultan el mejor (mínimo) y el peor (máximo) sobre el conjunto de posiciones de la fuerza externa.

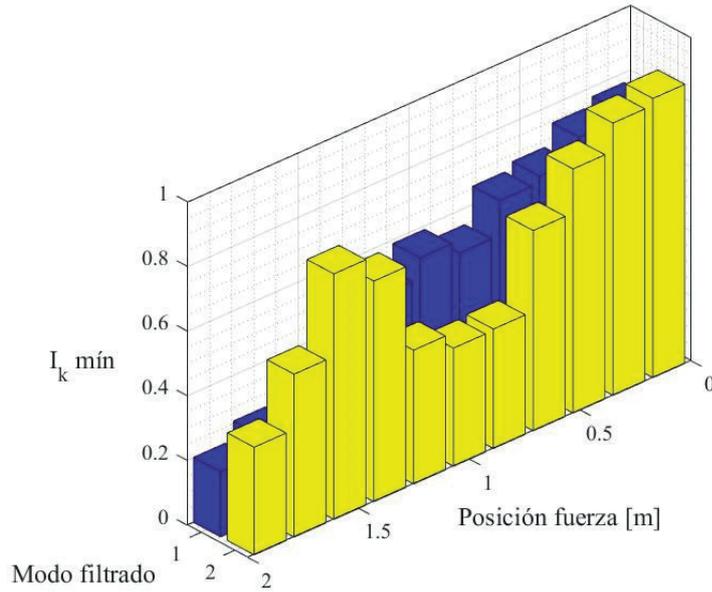


Fig. 1. Índice de desempeño mínimo en función de la posición de la fuerza. Filtros modales en base a un único acelerómetro.

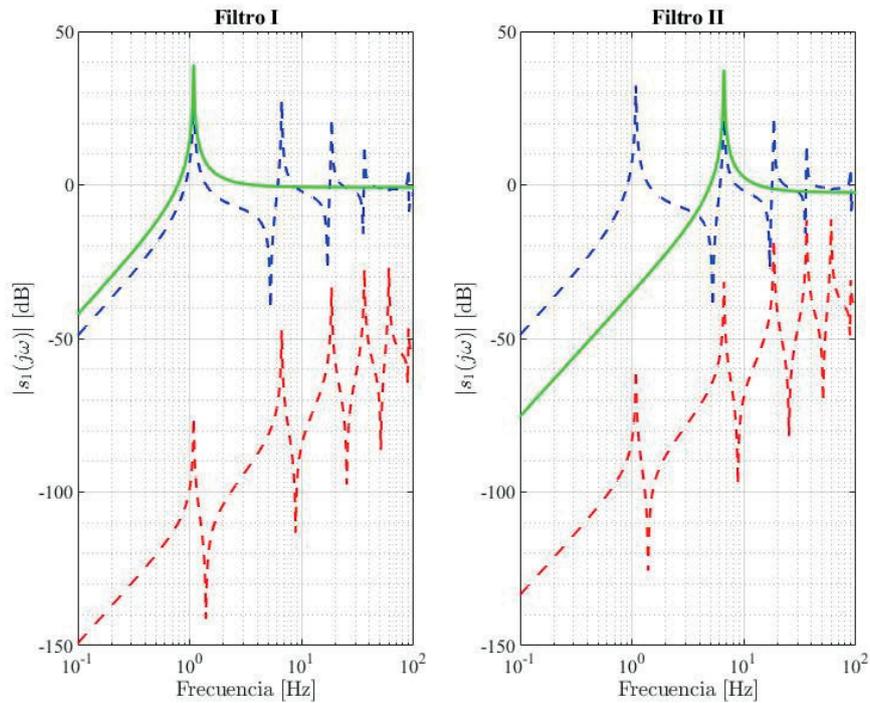


Fig. 2. Respuesta espectral de los filtros. Respuesta espectral deseada (verde), Respuesta espectral del filtro posición de fuerza con mejor índice de desempeño mínimo (azul), Respuesta espectral del filtro posición de fuerza con el peor índice de desempeño mínimo (rojo). Filtros modales en base a un único acelerómetro.

Por último, en la Tabla 2, se presentan para los dos filtros: la posición de la fuerza, la posición del acelerómetro y su ganancia, cuyo índice de desempeño asociado resulta ser el mínimo sobre las 407 combinaciones posibles.

Tabla 2. Resultados de diseño de los filtros modales utilizando un único acelerómetro.

Filtro Modal	Modo filtrado	Posición Fuerza [m]	Posición Acel. [m]	Ganancia
I	1°	1.9	1.85	0.5063
II	2°	1.9	1.85	-0.5168

4.3. Diseño de los filtros modales en base a tres acelerómetros

El diseño de los dos filtros modales utilizando tres acelerómetros consistió en determinar el índice de desempeño I_k para cada una de las 85470 combinaciones posibles a partir de las 11 posiciones candidatas de la fuerza externa y las 7770 configuraciones candidatas para los tres acelerómetros.

En la Fig. 3, se presentan los índices de desempeño mínimos de los dos filtros en función de la posición de la fuerza externa. En tanto en la Fig. 4 se presentan las salidas de ambos filtros modales en el dominio frecuencial correspondientes a las configuraciones de posición de fuerza externa y acelerómetros cuyo índice de desempeño asociado resulta el mejor (mínimo) y el peor (máximo) sobre el conjunto de posiciones de la fuerza externa.

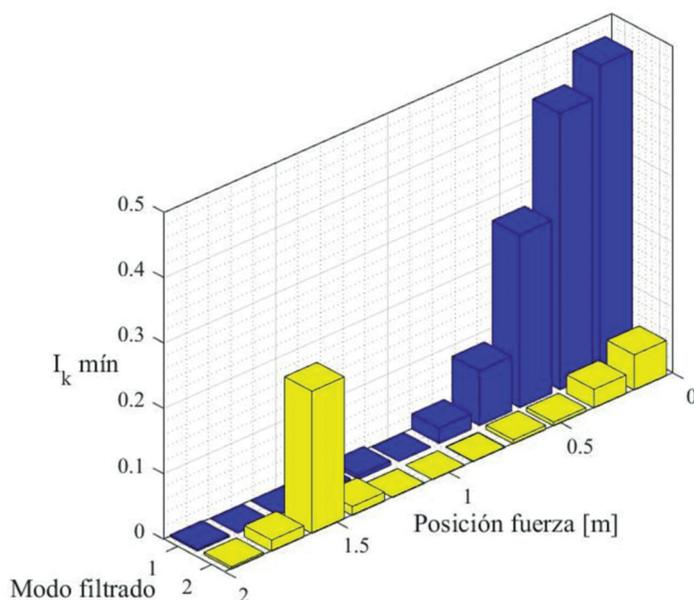


Fig. 3. Índice de desempeño mínimo en función de la posición de la fuerza. Filtros modales en base a tres acelerómetros.

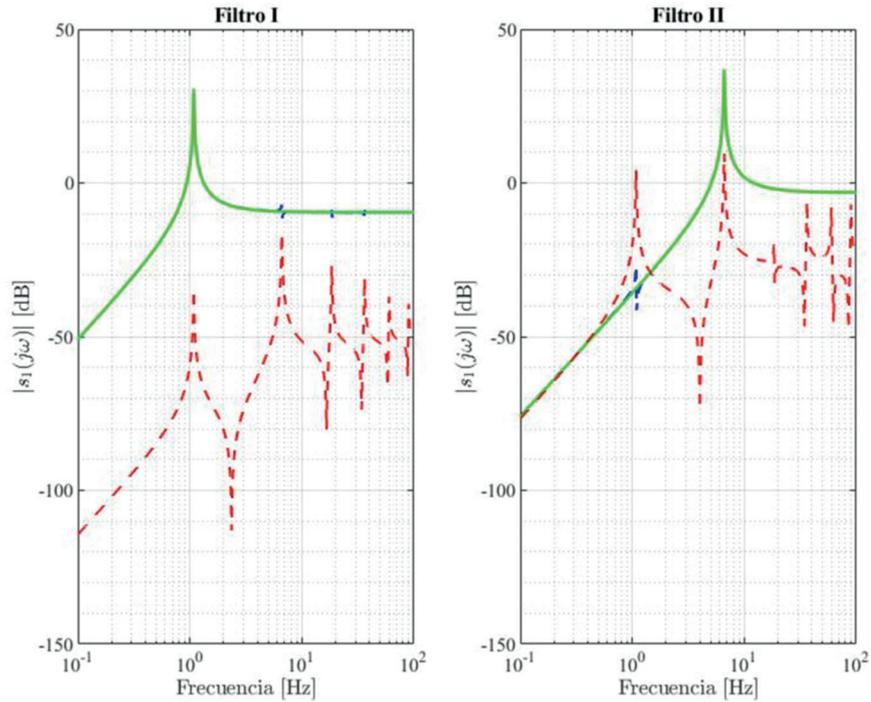


Fig. 4. Respuesta espectral de los filtros. Respuesta espectral deseada (verde), Respuesta espectral del filtro posición de fuerza con mejor índice de desempeño mínimo respecto a la posición de fuerza (azul)(la misma se encuentra superpuesta en su totalidad por la salida deseada). Respuesta espectral del filtro posición de fuerza con el peor índice de desempeño mínimo respecto a la posición de fuerza (rojo). Filtros modales en base a tres acelerómetros.

En la Tabla 3, se presenta para ambos filtros: la posición de la fuerza y las posiciones de los tres acelerómetros cuyo índice de desempeño asociado resulta ser el mínimo sobre las 85470 combinaciones posibles y sus respectivas ganancias.

Tabla 3. Resultados de los diseños de los filtros modales utilizando tres acelerómetros.

Filtro I			
Acelerómetros			
Acelerómetro	1	2	3
Ganancia	0.2105	0.5750	0.7857
Posición [m]	0.8	1.3	1.8
Fuerza Externa			
Posición [m]	1		
Filtro II			
Acelerómetro	1	2	3
Ganancia	0.5490	0.6722	-0.3688
Posición [m]	0.6	1.1	1.9
Fuerza Externa			
Posición [m]	1		

4.4. Diseño de los filtros modales en base a cinco acelerómetros

El diseño de los dos filtros modales utilizando cinco acelerómetros consistió en determinar el índice de desempeño I_k para cada una de las 4794867 combinaciones posibles a partir de las 11 posiciones candidatas de la fuerza externa y las 435897 configuraciones candidatas para los cinco acelerómetros.

En la Fig. 5, se presentan los índices de desempeño mínimos de los dos filtros en función de la posición de la fuerza externa. En tanto en la Fig. 6 se presentan las salidas de ambos filtros modales en el dominio frecuencial correspondientes a las configuraciones de posición de fuerza externa y acelerómetros cuyo índice de desempeño asociado resulta el mejor (mínimo) y el peor (máximo) sobre el conjunto de posiciones de la fuerza externa.

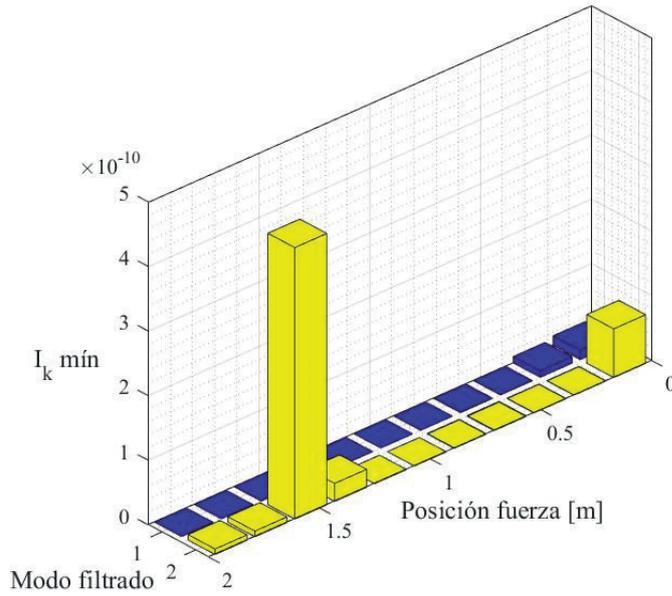


Fig. 5. Índice de desempeño mínimo en función de la posición de la fuerza. Filtros modales en base a tres acelerómetros.

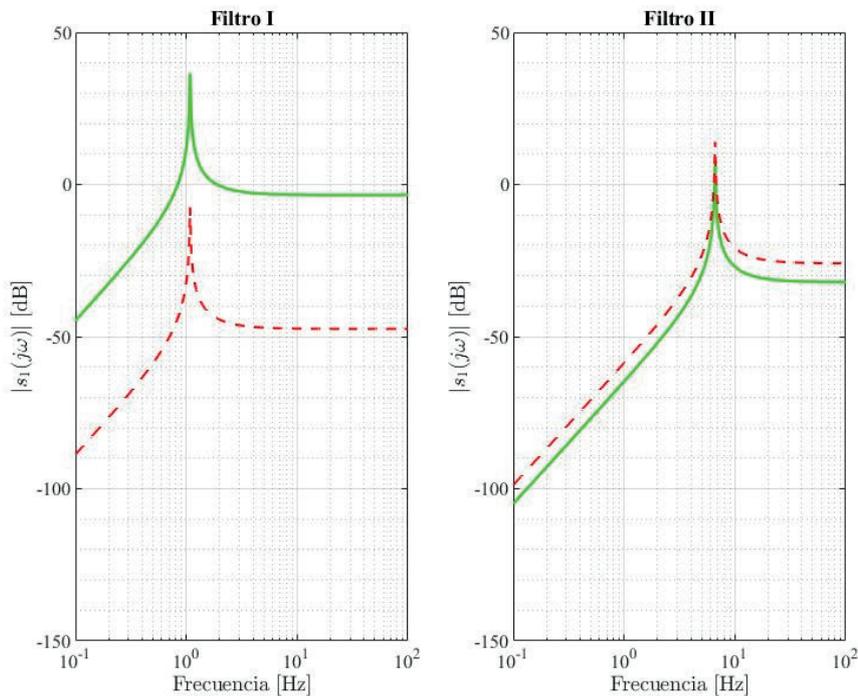


Fig. 6. Respuesta espectral de los filtros. Respuesta espectral deseada (verde), Respuesta espectral del filtro posición de fuerza con mejor índice de desempeño mínimo respecto a la posición de fuerza (azul) (La misma se encuentra superpuesta con la respuesta deseada). Respuesta espectral del filtro posición de fuerza con el peor índice de desempeño mínimo respecto a la posición de fuerza (rojo). Filtros modales en base a cinco acelerómetros.

Por último, en la Tabla 4 se presenta, para ambos filtros, la posición de la fuerza y de los cinco acelerómetros con sus respectivas ganancias cuyo índice de desempeño asociado resulta ser el mínimo sobre las 4794867 combinaciones posibles.

Tabla 4. Resultados de diseño de los filtros modales utilizando cinco acelerómetros.

Filtro I					
Acelerómetros					
Acelerómetro	1	2	3	4	5
Ganancia	-5.48	19.83	-45.8	28.7	0.98
Posición [m]	0.2	0.6	0.7	0.75	1.75
Fuerza Externa					
Posición [m]	1.54				
Filtro II					
Acelerómetro	1	2	3	4	5
Ganancia	28.6	-25.6	2.73	2.71	-2.20
Posición [m]	0.25	0.30	0.60	1.55	1.65
Fuerza Externa					
Posición [m]	1.54				

4.5. Análisis y discusión de los resultados

El diseño de los dos filtros modales en base a un único acelerómetro arroja que la fuerza externa debe aplicarse en la posición candidata más próxima al extremo libre de la viga y el acelerómetro debe situarse también en la posición candidata más próxima al extremo libre de la viga, ver Tabla 1. Sin embargo, aun siendo el índice de desempeño del filtro modal cuando la fuerza externa se aplica en el extremo de la viga, el mejor (mínimo) con respecto a las demás posiciones en ambos filtros, ver Fig. 1, su valor nos indica que el desempeño del filtro no será el esperado. Esto se puede observar en la Fig. 2, donde se presentan diferencias significativas entre la salida deseada y la salida real de cada uno de estos filtros. Esto pone en evidencia la imposibilidad de manipular las componentes de aceleración de los seis primeros modos por parte de los dos filtros basados en un único acelerómetro.

Incrementar a tres la cantidad de acelerómetros utilizados para conformar los dos filtros, promueve un incremento notable en ambos desempeños (reducción del índice I_k), ver Fig. 3. Esto ocurre para un conjunto amplio de posiciones candidatas para la fuerza externa, en comparación con los resultados obtenidos al utilizar un único acelerómetro. Esto se evidencia también en el análisis espectral de las señales de salida de ambos filtros, tal como se puede observar en la Fig. 4. Ambos filtros eliminan casi en su totalidad las componentes de aceleración no deseadas en sus respectivas salidas cuando se elige la mejor posición de la fuerza externa. Por lo tanto, la posición de la fuerza externa es relevante en el desempeño de ambos filtros, tal como se puede observar en la Fig. 4. La respuesta de estos filtros se ve degradada cuando la fuerza externa se aplica sobre el extremo empotrado en el caso para el filtro del primer modo y para el caso del filtro para el segundo modo cuando la misma es próxima a los 1.5 metros con respecto al extremo empotrado.

La dependencia del desempeño de ambos filtros con respecto a la posición de la fuerza externa se ve significativamente disminuida al aumentar a cinco la cantidad de acelerómetros utilizados. El índice de desempeño mínimo para cada una de las posiciones candidatas para la fuerza externa se reduce 9 órdenes de magnitud, ver Fig. 5, por lo que es posible afirmar que estos filtros pueden ser considerados próximos al comportamiento de filtros perfectos, que en la teoría sería cuando el número de acelerómetros es igual al número de modos a manipular, que en este caso es de 6. Esto se evidencia de manera clara también en sus respuestas espectrales, ver Fig. 6, donde sus respectivas señales de salidas coinciden con la deseada.

5. CONCLUSIONES

Se ha presentado una metodología para el diseño de filtros modales discretos capaz de determinar las posiciones y las ganancias de los acelerómetros utilizados en su conformación, como así también determinar las posiciones de las fuerzas externas que favorecen el desempeño de estos filtros.

Se ha mostrado que es posible utilizar una cantidad menor de acelerómetros que la cantidad ideal para poder aislar el comportamiento de cada modo de vibración que se considera en el modelo del sistema flexible. Esto queda en evidencia en el caso de tres acelerómetros, donde se ha identificado la configuración de posiciones y ganancias de los acelerómetros y la posición de la fuerza externa que permite conformar un filtro modal capaz de manipular las componentes modales de aceleración de manera similar a un filtro modal perfecto, el cual debería constituirse al menos con seis acelerómetros.

REFERENCIAS

- [1] L. Meirovitch, H. Baruh, “The implementation of modal filters for control of structures”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **8**(6) 707–716 (1985) <https://doi.org/10.2514/3.20045>
- [2] N. Tanaka, Y. Kikushima, “Active modal control and its robustness using point sensors and point actuators”, *JSME International Journal Series C Mechanical Systems, Machine Elements and Manufacturing*, **42**(1), 54–61 (1999) <https://doi.org/10.1299/kikaic.63.3472>
- [3] A. Preumont, A. François, P. De Man, V. Piefort, “Spatial filters in structural control”, *Journal of Sound and Vibration*, **265**(1), 61–79 (2003) [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(02\)01440-2](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(02)01440-2)
- [4] C.C Pagani Jr., M.A Trindade, “Optimization of modal filters based on arrays of piezoelectric sensors”, *Smart Materials and Structures*, **18**(9) (2009) <https://doi.org/10.1088/0964-1726/18/9/095046> 095046
- [5] H. Jae-Seung, K. Ahsan, K. Wha-Jung, “Estimation of modal loads using structural response”, *Journal of Sound and Vibration*, **326**(3–5), 522–539 (2009) <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.05.003>
- [6] G. Tondreau, A. Deraemaeker, “Local modal filters for automated data-based damage localization using ambient vibrations”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **39**(1), 162–180 (2013) <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2013.03.020>
- [7] H. Wentzel, “Fatigue test load identification using weighted modal filtering based on stress”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **40**(2), 618–627 (2013) <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2013.06.014>
- [8] Á.J. Molina-Viedma, L. Pieczonka, K. Mendrok, E. López-Alba, F.A. Díaz, “Damage identification in frame structures using high-speed digital image correlation and local modal filtration”, *Structural Control and Health Monitoring*, **27**(9) (2020)
- [9] S. Davis, I. Bucher, “Automatic vibration mode selection and excitation; combining modal filtering with auto-resonance”, *Mechanical Systems and Signal Processing* 101, 140–155 (2018)
- [10] W. Zhu, F. Yang, X. Rui, “Robust independent modal space control of a coupled nano-positioning piezo-stage”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 106, 466–478 (2018)
- [11] A. Puri, S.V. Modak, K. Gupta, “Modal filtered-x lms algorithm for global active noise control in a vibro-acoustic cavity”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 110, 540–555 (2018)
- [12] S.J. Shelley, *Investigation of discrete modal filters for structural dynamic applications*, PhD thesis, University of Cincinnati (1992)
- [13] W. Gawronski, “Modal actuators and sensors”, *Journal of Sound and Vibration*, **229**(4), 1013–1022 (2000) <https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2499>
- [14] M.I. Friswell, On the design of modal actuators and sensors, *Journal of Sound and Vibration*, **241**(3) (2001) 361–372.
- [15] M.A. Trindade, C.C. Pagani Jr., L.P.R. Oliveira, E. Massaroppi Jr., “Effect of parametric uncertainties on the effectiveness of discrete piezoelectric spatial modal filters”, *International Journal for Uncertainty Quantification*, **3**(6) (2013)
- [16] A. Hirao Shigueoka, M.A. Trindade, “Continuous optimization of discrete modal filters applied to flexible structures”, in: Em: Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (CONEM 2014) (2014)
- [17] F.R. Masch, R.L. Hecker, “Diseño de filtros modales considerando el posicionamiento óptimo de los acelerómetros”, XV Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica (CIBIM 2022) (2022)

STUDY OF THE INFLUENCE OF EXTERNAL FORCES ON THE PERFORMANCE OF DISCRETE MODAL FILTERS

Abstract – Discrete modal filters are built as a weighted summation of signals from sensors installed on a flexible structure. The positions of the sensors are relevant for the filter performance, particularly when the number of sensors is lower than the numbers of the considered system modes. In this work, a new methodology to design discrete modal filters is presented that finds the position of the sensors and the position of the external force that improves the performance. First, for each candidate position of the external force, the proposed methodology determines the positions of a given number of accelerometers and their gains so that the filter can best isolate the vibration modes in each of its outputs. For this, a minimum error criterion is implemented, using the L_2 norm, between the nominal system output signal and the desired output, for each of the possible configuration. After this, a performance index is implemented that allows comparing the effectiveness of the filter for different numbers of accelerometers. This methodology was implemented and evaluated through simulations in the design of a discrete modal filter on a slender flexible beam in a free-fixed end configuration. The results corresponding to the best performance of the filter are presented for 1, 3 and 5 accelerometers, showing that it is possible to design a modal filter with fewer accelerometers than the number of vibration modes, considering the position of the external force as a design variable.

Keywords – Modal Filter, Flexible Structures, Accelerometer Locations.

