Historia y Memoria de la Educación 11 (2020): 191-219
Sociedad Española de Historia de la Educación
ISSN: 2444-0043
DOI: DOI: 10.5944/hme.11.2020.24169

O *COMPÊNDIO DE ÁLGEBRA* PARA O 3.º CICLO LICEAL (1950): REFLEXÕES EM TORNO DAS CRÍTICAS À SUA APROVAÇÃO[α]

The Algebra Textbook *for the 3rd cycle of liceus (1950): reflections based on the critiques of its approval*

El Compendio de Álgebra *para el 3º ciclo de los liceos (1950): reflexiones a través de las críticas a su aprobación*

Mária Cristina Almeida[β]

Fecha de recepción: 04/04/2019 • Fecha de aceptación: 13/06/2019

Resumo. Este trabalho situa-se no âmbito da história da educação da matemática, perspetiva que permite aprofundar o conhecimento sobre o ensino e a aprendizagem da matemática escolar no passado. Sendo assim, focamo-nos no livro único de Álgebra para o 3.º ciclo dos liceus, aprovado em 1950, na tentativa de compreender melhor a polémica em torno da sua aprovação e a discussão sobre o ensino da análise infinitesimal no âmbito deste ciclo de ensino. Num primeiro momento, descrevemos algumas opiniões retiradas de artigos editados em revistas pedagógicas e científicas sobre o mesmo. No nosso estudo, realizámos uma análise comparativa de duas versões distintas do *Compêndio de Álgebra* com o propósito de verificar a existência de alterações no conteúdo. Neste artigo, apresentamos o resultado dessa análise, bem como uma reflexão sobre as modificações encontradas que foi elaborada do ponto de vista do desenvolvimento do conhecimento profissional do professor. As fontes que constituíram a base deste trabalho compreenderam Diários de Governo, revistas pedagógicas e científicas, os Compêndios de Álgebra para

[α] Trabalho apoiado por fundos portugueses através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia, Projeto UID/CED/02861/2016.

[β] Unidade de Investigação Educação e Desenvolvimento, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa. Campus da Caparica/2829-516 CAPARICA/ Portugal. ajs.mcr.almeida@gmail.com
http://orcid.org/0000-0002-1532-832X

Cómo citar este artículo: Almeida, Mária Cristina. «O *Compêndio de Álgebra* para o 3.º ciclo liceal (1950): reflexões em torno das críticas à sua aprovação». *Historia y Memoria de la Educación* 11 (2020): 191-219

o 3.º ciclo dos liceus e entrevistas com o autor António Augusto Lopes (1917-2015).

Palavras-chave: História da Educação Matemática; Livros Escolares de Matemática; Ensino Liceal.

Abstract. *This paper presents a work on the history of mathematics education, from a perspective that strives for a deeper reading of what has transpired in school mathematics. For this purpose, we focus on the Algebra Textbook for the 3rd cycle of liceus, approved in 1950, attempting to better understand the controversy surrounding its adoption as well as the discussion on the teaching of infinitesimal analysis in the context of this stage of secondary education. We begin by describing some opinions taken from articles published in educational and scientific journals about this textbook. In our study, we analyse two editions of the Algebra Textbook, attempting to track changes in its content. Here, we present the results of that analysis, as well as a reflection on the changes found that was written from the point of view of a teacher's professional knowledge. The paper is based mainly on legislation, educational and scientific journals, the Algebra Textbooks for the 3rd cycle of liceus and on interviews with the author, António Augusto Lopes (1917-2015).*

Keywords: *History of Mathematics Education; Mathematics Textbooks, Secondary Education.*

Resumen. *Este trabajo se sitúa en el ámbito de la historia de la educación matemática, perspectiva que permite profundizar el conocimiento sobre la enseñanza e aprendizaje de las matemáticas. Así, nos enfocamos en el libro único de Álgebra para el 3º ciclo de los liceos, aprobado en 1950, en el intento de comprender mejor la polémica en torno a su aprobación y la discusión sobre la enseñanza del análisis infinitesimal en este ciclo de enseñanza. En un primer momento, describimos algunas opiniones retiradas de artículos editados en revistas pedagógicas y científicas sobre el mismo. En nuestro estudio, realizamos un análisis comparativo de dos versiones distintas del* Compendio de Álgebra *con el propósito de verificar la existencia de alteraciones en el contenido. En este artículo, presentamos el resultado de ese análisis, así como una reflexión sobre las modificaciones encontradas que fue elaborada desde el punto de vista del desarrollo del conocimiento profesional del profesor. Las fuentes que constituyeron la base de este trabajo fueron Diarios de Gobierno, revistas pedagógicas y científicas, los Compendios de Álgebra para el 3º ciclo de los liceos y entrevistas con el autor António Augusto Lopes (1917-2015).*

Palabras clave: *Historia de la Educación Matemática; Libros de Texto de Matemáticas; Educación Secundaria.*

INTRODUÇÃO

Presentemente, em Portugal, são numerosos e variados os livros escolares que proliferam no mercado. Se isso pode proporcionar escolhas de melhor qualidade, também origina que a escolha do livro não seja, por vezes, tarefa fácil. O professor da disciplina, solitariamente ou em grupo, analisa os livros certificados disponíveis no mercado, visando selecionar o livro que irá ser adotado na escola nos seis anos letivos seguintes.[1] Este período de adoção pode ser reduzido se o programa da disciplina sofrer alterações. Mas nem sempre foi assim, houve alguns períodos em que existiu o sistema do livro único oficialmente aprovado.

Em Portugal, estudos têm mostrado que os livros escolares têm sido o recurso mais comum nas salas de aula de matemática.[2] No que concerne aos professores do ensino secundário mais de 80% usam-no com muita frequência, isto é, em muitas aulas ou sempre/quase sempre.[3] Na realidade, o livro escolar adquiriu ao longo dos anos, um estatuto de orientação e regulação das práticas pedagógicas, funcionando igualmente como suporte de conhecimento para professores.[4]

Desde 2013 os professores portugueses são confrontados com novos programas da disciplina de Matemática para o ensino secundário. Estes novos programas incluem conteúdos que não foram ensinados durante mais de uma década e outros que nunca foram ensinados a este nível. Esta situação nova exige o ensino de conteúdos para os quais muitos professores não foram preparados. Existe a possibilidade de diversos professores experimentarem dificuldades e pode acontecer que os livros venham a influenciar o conhecimento matemático ensinado nas escolas. Esta situação aumenta a importância da produção dos livros escolares bem como como da sua aprovação e adoção.

---

[1] Lei 47/2006, de 28 de agosto.

[2] João Janeiro, «Os manuais de Matemática: O que deles dizem os professores», en *Actas do ProfMat 2005* (CD-ROM), APM, *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações* (Évora: APM, 2005).

[3] APM, *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática* (Lisboa: APM, 1998).

[4] José Correia e Manuel Matos, *Solidões e solidariedades nos quotidianos dos professores* (Lisboa: ASA, 2001).

Durante o Estado Novo,[5] no período entre 1947 e 1974 vigorou o regime de livro único no ensino liceal,[6] ou seja, para o ensino de cada disciplina nos diferentes anos de um ciclo era adotado um único livro, em todos os liceus. Um estudo sobre este tema, focando nos livros de matemática pode ser encontrado em Almeida.[7] A instituição do livro único nos liceus e nas escolas técnicas evidencia o reforço do controle sobre o ensino, de que faz parte também a centralização da formação de professores num único Liceu Normal.

Neste artigo, damos destaque ao primeiro livro único de Matemática para o 3.º ciclo dos liceus, o *Compêndio de Álgebra*, aprovado em 1950. Objetivando compreender melhor a polémica em torno da sua aprovação e a discussão sobre o ensino da análise infinitesimal no âmbito deste ciclo de ensino que ocorria nesse momento, discutimos a crítica sobre o *Compêndio de Álgebra* que foi publicado na revista *Gazeta de Matemática*.[8] Igualmente, estudámos duas versões do primeiro livro único de Álgebra, a fim de rastrear alterações no conteúdo. Apresentamos aqui o resultado dessa análise, bem como uma reflexão sobre as modificações encontradas que foi elaborada do ponto de vista do desenvolvimento do conhecimento profissional do professor de matemática, seguindo as diferenciações propostas por Shulman.[9]

BREVE CONTEXTUALIZAÇÃO TEÓRICA

Situado no campo da história do ensino da Matemática o nosso estudo parte do pressuposto que o conhecimento dos percursos do passado

[5] O regime ditatorial do Estado Novo, promulgado pela Constituição de 1933, vigorou até à Revolução de 25 de Abril de 1974.

[6] Durante esse período, o sistema educativo português iniciava com o ensino primário obrigatório (quatro anos), findo o qual o aluno poderia frequentar o ensino secundário, que englobava dois ramos: liceal (que possibilitava aceder à universidade) e técnico (habilitava para o exercício de uma profissão especializada, viabilizando ainda acesso aos institutos). O ensino nos liceus compreendia três ciclos: 1.º ciclo (10-11 anos), 2.º ciclo (12-14 anos), 3.º ciclo (15-16 anos).

[7] Mária Cristina Almeida, «A sombra da Matemática — um contributo para a compreensão desta disciplina no 3.º Ciclo Liceal (1947-1974)» (Tese de Mestrado, Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias, 2007), 66-77.

[8] A revista *Gazeta de Matemática*, propriedade da Sociedade Portuguesa de Matemática foi fundada em 1939 por Aniceto Monteiro, Bento Caraça, Hugo Ribeiro, J. Silva Paulo e M. Zaluar Nunes. O primeiro número saiu em 1940.

[9] Lee Shulman, «Those who understand: Knowledge growth in teaching», *Educational Researcher* 15, no. 2 (1986): 4-14.

ao revelar propostas, consensos e conflitos de cada época, permitirá compreender melhor a realidade contemporânea do ensino da disciplina.[10] Tratando-se da história de uma disciplina escolar, apoiamo-nos em Chervel,[11] que nos diz que uma disciplina escolar é uma combinação de vários constituintes, «um ensino de exposição, os exercícios, as práticas de incitação e de motivação e de um aparelho docimológico, os quais, a cada estado da disciplina, funcionam em estreita colaboração, do mesmo modo que cada um deles está, à sua maneira, em ligação direta com as finalidades».[12] Este autor recusa a ideia de que os conteúdos de ensino são uma espécie de simplificação ou vulgarização de saberes de referência produzidos fora da escola e sublinha importância da ação do professor no processo de elaboração disciplinar. No atual contexto educativo, apesar da existência de variados suportes tecnológicos de ensino, «o manual escolar continua a ser, de longe, o suporte de aprendizagem mais difundido».[13] Um livro escolar é concebido para servir de suporte escrito ao ensino de uma disciplina no seio de uma instituição escolar. Maria Santos afirma que «o manual tem sido o centro de todo o ensino colectivo uniformizado, […] é ele que, em si mesmo, preserva e veicula, na forma textual, o currículo. É também ele que, por um efeito recorrente, contribui para dar forma ao currículo».[14] Neste contexto, quando tentamos visualizar o passado uma disciplina escolar, os livros escolares são alguns dos elementos mais relevantes para o estudo desse passado, possibilitando ainda uma melhor formação cultural e didática do professor de Matemática.

METODOLOGIA

As fontes que constituíram a base deste trabalho foram Diários de Governo, revistas pedagógicas ou científicas e os *Compêndio de Álgebra*

[10] José Manuel Matos, «A penetração da Matemática Moderna em Portugal na revista Labor», *Union, Revista Iberoamericana de Educación Matemática* 5 (2006): 91-110.

[11] André Chervel, «História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa», *Teoria & Educação* 2 (1990): 207.

[12] Chervel, «História das disciplinas escolares», 207.

[13] François-Marie Gérard e Xavier Roegiers, *Conceber e avaliar manuais escolares* (Porto: Porto Editora, 1998), 15.

[14] Maria Santos, *A Cidadania na voz dos manuais escolares* (Lisboa: Livros Horizonte, 2001), 130.

para o 3.º ciclo dos liceus da autoria de António Augusto Lopes. Como fonte oral utilizamos as entrevistas a António Augusto Lopes (AAL).[15] Na legislação procurámos localizar essencialmente os programas do Ensino Liceal e os concursos para livro escolar único do ensino liceal. No que respeita ao *Compêndio de Álgebra* para o 3.º ciclo, foi feita uma análise descritiva de artigos editados em revistas pedagógicas ou científicas nomeadamente, a revista *Labor* e a *Gazeta de Matemática* sobre o mesmo.[16] Na análise comparativa de duas edições deste livro único começamos por uma breve referência à organização do livro, a que se segue uma descrição geral.

O *COMPÊNDIO DE ÁLGEBRA*: A CRÍTICA

Na sequência da aprovação do primeiro livro único de Álgebra, para o 3.º ciclo liceal, houve alguma polémica sobre a sua qualidade, tanto mais que em termos de conteúdos matemáticos, como já referimos atrás, o momento era importante pois o cálculo infinitesimal, retirado dos programas em 1936, tinha acabado de ser reintroduzido pelos programas de Matemática do 3.º ciclo liceal promulgados em 1948. A introdução do estudo das derivadas «prompted debates about the quality of mathematics terminology in the programs and the unique textbook and also about the ways in which its study should be articulated with the study of limits».[17]

José Sebastião e Silva no artigo *A Análise Infinitesimal no Ensino Secundário*,[18] publicado na *Gazeta de Matemática*, em Outubro de 1951, começa por explicar o seu ponto de vista sobre a reintrodução do estudo da análise infinitesimal, nos programas de Matemática do 3.º ciclo liceal promulgados em 1948, e comenta a produção de livros para o ensino de Matemática para os Liceus. Em seguida, desenvolve as suas ideias pedagógicas sobre o ensino da análise neste ciclo. O autor manifesta satisfação

[15] Ao longo do texto utilizaremos esta sigla para simplificar a leitura.

[16] A revista *Labor* foi fundada em janeiro de 1926 por dois professores de Aveiro, foi uma revista de ensino liceal.

[17] José Manuel Matos, «History of mathematics education in Portugal», en *Handbook on the History of Education*, eds. Alexander Karp e Gert Schubring (Londres: Springer, 2014), 296.

[18] José Sebastião e Silva foi matemático, professor universitário e mentor da reforma da Matemática Moderna em Portugal.

pela reintrodução do estudo da análise no ensino secundário, por estar convicto de que a exclusão completa da análise infinitesimal do programa dos liceus que tinha ocorrido na anterior reforma (1936), trouxera profundas perturbações no ensino global das matérias científicas, nomeadamente ao nível universitário, e, reafirma que não perfilha a ideia de que os conceitos como os de infinitésimo e derivada são demasiado complexos para jovens de 15 ou 16 anos.[19]

Sobre a produção de livros para o ensino de Matemática para os Liceus, nomeadamente para o 3.º ciclo, Sebastião e Silva estabelece uma relação entre a dificuldade em escrever livros e a reintrodução do estudo da análise infinitesimal neste ciclo. Para ele, a escrita de livros encarava, naquele momento, duas dificuldades, uma era a conciliação da intuição com a racionalidade, a outra era a interrupção de doze anos que tinha afastado os professores dos assuntos da análise. Assim, considerava que o referido afastamento era a causa das imperfeições apontadas ao *Compêndio de Álgebra* que foi adotado para o 3.º ciclo como livro único, e que estas últimas estariam, por sua vez, na base da celeuma relacionada com o livro. Para fundamentar o seu ponto de vista, Silva regista que ao ler o compêndio «fica-se com a impressão de que o autor procurou refazer a sua cultura matemática no prazo de que dispunha para apresentar o livro a concurso - e é muito provável que ele, autor, já se tenha apercebido dos inconvenientes da sua precipitação».[20]

O concurso que conduziu à aprovação do *Compêndio de Álgebra* para o 3.º ciclo liceal, para os anos de 1950 a 1955, abriu em Janeiro de 1949. Apenas um autor apresentou um livro a concurso, António Augusto Lopes. Para apreciar o livro de Álgebra, foram escolhidos os seguintes professores relatores: José Jorge Gonçalves Calado (Liceu de Pedro Nunes, Lisboa) e Alberto Soares Fernandes Beirão (Liceu de Camões, Lisboa), cujos pareceres não conseguimos encontrar.[21]

A apreciação crítica mais detalhada do livro único de ensino da Álgebra (3.º ciclo), da autoria de AAL, é feita pelo matemático Laureano

[19] José Sebastião e Silva, «A Análise Infinitesimal no Ensino Secundário», *Gazeta de Matemática* 49 (1951):1-4.

[20] José Sebastião e Silva, «A Análise Infinitesimal no Ensino Secundário», 1-4, 2.

[21] Professores de Matemática.

Barros,[22] em 1950, na *Gazeta da Matemática*. De acordo com Barros, esta crítica fundamenta-se em dois aspetos: primeiro, o livro destinava-se a alunos do 3.º ciclo dos liceus, onde o ensino podia e devia ter um rigor maior que nos ciclos anteriores; segundo, algumas das matérias tratadas no livro exigiam grande cuidado na exposição, dada a sua importância em estudos posteriores.[23]

Podemos sintetizar as críticas de Barros em dois eixos. Um primeiro, de rigor científico, onde são apontadas falhas. Um segundo, que denominamos didático, tem a ver com opções na maneira de expor e no tratamento das matérias. Em seguimento das críticas, por vezes, são dadas sugestões para melhorar o que está escrito. Numerámos as críticas de Barros, não só para sistematizar a análise, mas também com o propósito ajudar na estrutura do próximo ponto do nosso artigo.

A primeira crítica do autor recai, portanto sobre a bibliografia que devia ter sido consultada. Barros[24] considera que a consulta das *Lições de Álgebra e Análise*, do prof. Bento Caraça,[25] poderiam ter proporcionado uma elementar, correta e acessível da teoria dos limites, evitando alguns aspectos negativos da exposição realizada por AAL sobre esta matéria.

No segundo reparo, Barros crítica os exemplos de funções transcendentes dados por AAL, que transcreve e comenta:

> «Por exemplo, são transcendentes as funções definidas pela igualdade $y = x^{\sqrt{2}}$ e $y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots$.
>
> A primeira porque a variável independente figura com expoente irracional e a segunda porque são em número infinito as operações que incidem sobre a variável independente, embora todas sejam racionais». Pergunta-se então: A função $y=1+x+x^2+\ldots+$

[22] Laureano Barros foi matemático e professor de Matemática. Mais informações podem ser consultadas em https://www.publico.pt/culturaipsilon/noticia/laureano-barros-o-homem-que-fugiu-com-uma-biblioteca-1390333.

[23] Laureano Barros, «Crítica de livros. O livro único de Álgebra-3.º ciclo», *Gazeta da Matemática* 70-71 (1950): 44-46.

[24] Para simplificar a leitura do artigo, usaremos a designação Barros para representar Barros, «Crítica de livros. O livro único de Álgebra-3.º ciclo».

[25] Matemático e Professor Universitário de Matemática.

> $x^n+\ldots$, $|x| \leq 1$, é transcendente? Não há funções algébricas que se podem desenvolver em série?[26]

Sabemos que a função indicada por Barros nesta sua pergunta é o desenvolvimento da função $f(x) = \frac{1}{1-x}$ em série de potências de x em torno de zero, sugerindo assim que a justificação da transcendência da segunda função dada nos exemplos não poderia ter sido justificada como estava no *Compêndio*. Esta crítica à falta de rigor na linguagem tem sentido, tanto mais que deve ser evitada de modo a que não cause confusão no espírito dos alunos.

Na sua terceira crítica Barros, entende que AAL deveria ter explicado melhor a classificação de funções:

> Sobre a classificação de funções [...]. Uma vez que o Autor considerou irracionais *todas* as funções algébricas não racionais impunha-se que dissesse que existem funções irracionais (no sentido definido no livro), que não são do mesmo tipo de $y = \sqrt{\frac{x^2-1}{5x-1}}$ citado como exemplo, em virtude das *equações gerais* de grau superior ao quarto não serem algebricamente resolúveis.[27]

Em quarto lugar, Barros refere que AAL errou ao definir função crescente, transcrevendo as suas palavras:

> «uma função $y(x)$ diz-se crescente para o valor x_0 da variável independente, se a desigualdade $x > x_0$ implica $f(x) > f(x_0)$. Esta definição está completamente errada e o Autor teve, talvez, essa impressão pois, logo no período seguinte, embora em termos vagos que não convêm em Matemática, fala na vizinhança do ponto (mantendo no entanto $x > x_0$).[28]

As três críticas anteriores são sobre matérias do capítulo I —Funções de uma variável real—, as duas seguintes são relativas a deficiências encontradas no capítulo II —Propriedades dos polinómios inteiros.

[26] Barros, «Crítica de livros.», 20.

[27] Barros, «Crítica de livros.», 21.

[28] Barros, «Crítica de livros.», 21.

A quinta crítica refere-se à definição de adição algébrica de dois polinómios e Barros transcreve a definição onde se chama à soma:

> $S(x)$ é uma expressão analítica cujo valor numérico, para cada valor da variável, é igual à soma dos valores numéricos dos polinómios parcelas». É uma maneira de definir $S(x)$, mas o que não pode concluir-se lógicamente da definição, como faz o Autor, é que $S(x)$ é outro polinómio. Onde reconhece o Autor a *evidência* desta conclusão? Idêntica observação se poderia fazer para o produto. Havia uma forma de evitar estas dificuldades, dando definições *formais* das operações. Assim, para a soma dir-se-ia: sendo $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ e $Q(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n$ chamar-se-ia soma $S(x)$ ao polinómio $S(x) = (a_0 + b_0)x^n + \cdots + (a_n + b_n)$. No caso de serem diferentes os graus dos dois polinómios, a redução ao caso anterior seria imediata, acrescentando termos de coeficiente zero ao polinómio de menor grau.[29]

Com efeito, a definição dada no *Compêndio* não é uma boa definição, porque perde-se o estatuto de polinómio, tendo Barros sugerido o uso da definição formal de $S(x)$. Apesar de a linguagem da definição formal ser mais complexa pensamos que a complexidade não seria exagerada para alunos deste ciclo.

Na sexta crítica, Barros apontou o modo como se demonstra no *Compêndio* o «Teorema: Todo o polinómio inteiro equivalente a zero é identicamente nulo», dizendo:

> há uma referência ao *método de indução completa* (que o Autor afinal não utiliza), referência que pode induzir em erro. O Autor, em lugar de fazer a indução e esclarecer o método, faz a verificação da propriedade enunciada para polinómios do 1.º e 2.° graus e depois diz: «Procedendo; por indução, *podemos* (o grifado é nosso) demonstrar que se o teorema é verdadeiro para um polinómio de grau , também o é para um polinómio de grau ». Ora, para proceder por indução, […] havia, sim, necessidade de provar que a verificação para polinómios de grau implica a sua verificação para

[29] Barros, «Crítica de livros.», 21.

> polinómios de grau . Só assim se teria feito uma autêntica demonstração.[30]

Efetivamente, fala-se no método de indução, mas não se demonstra realmente por indução. Esta situação deveria ter sido evitada para não causar confusão no espírito dos alunos.

Passando ao Capítulo IV —Fracções algébricas racionais—, a sétima crítica de Barros incide no modo como se demonstra no *Compêndio* que «multiplicando ou dividindo ambos os termos duma fracção algébrica por uma expressão analítica, não identicamente nula, se obtém uma fracção equivalente à dada», dizendo:

> o que pretendemos é denunciar a falência total daquela demonstração (e doutras semelhantes) visto que, no seu decurso, se utilizam propriedades não demonstradas. Assim de $\frac{P}{Q}.Q = P$ tira $\left(\frac{P}{Q}.Q\right).E = P.E$ e depois $\frac{P}{Q}(Q.E) = P.E$ «pelas propriedades da multiplicação» (o grifado é nosso). Estas propriedades ∗aqui a propriedade associativa— mesmo que demonstradas para polinómios, podiam ser aplicáveis neste caso? Não! É tão necessário mostrar que $\frac{P}{Q}(Q.E) = \left(\frac{P}{Q}.Q\right)$ como mostrar que $\frac{PE}{QE} = \frac{P}{Q}$.[31]

No *Compêndio*, o seu autor escreve «dizer que duas fracções são equivalentes é afirmar que têm o mesmo valor para cada valor da variável, embora os seus termos sejam diferentes».[32] Ora, quando na demonstração se fala em propriedades das operações, está-se a falar, pelo menos assim o entendemos, de operações entre frações numéricas que são conhecidas de anos anteriores. Por exemplo, na última igualdade (para as outras era análogo) poderia estar $\frac{P(x)E(x)}{Q(x)E(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)}$ e sendo *c* um valor de *x* que não anule $Q(x)$ e $E(x)$, viria pela equivalência de fracções numéricas $\frac{P(c)E(c)}{Q(c)E(c)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$porque *P(c), Q(c) e E(c)* são números, dos quais, pelo menos, os dois últimos são diferentes de zero. Logo, $\frac{P(x)E(x)}{Q(x)E(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)}$ para

[30] Barros, «Crítica de livros.», 21.

[31] Barros, «Crítica de livros.», 21.

[32] António Augusto Lopes, *Compêndio de Álgebra, 3.º ciclo.* No. 694 (Porto: Porto Editora, Lda, s. d. L1), 111.

qualquer valor de x que não anule $Q(x)$ e $E(x)$. Pelo que a crítica de Barros pode situar-se apenas no modo de expor.

Ainda no Capítulo IV, a oitava crítica, também se prende com o modo de expor, uma vez que, para Barros a abordagem seguida por AAL não pôs em evidência a unidade essencial dos § II —Símbolos de impossibilidade e § III— Símbolos de indeterminação, pois em ambos trata-se de casos, onde são inaplicáveis certos teoremas de limites, relativos ao produto e ao quociente. Observando ainda o seguinte:

> Uma vez que resolveu falar em símbolos de impossibilidade (e talvez tivesse de o fazer em virtude de se tratar de um tópico do programa) o que se impunha era a explicação do termo empregado. Que faz o Autor, nesse sentido? Depois de algumas considerações a propósito do símbolo $\frac{k}{0}$ conclui: «quer dizer, quando x tende para a, a fracção proposta é um infinitamente grande; é este o significado algébrico da fracção $\frac{k}{0}$ que, por este motivo, é um símbolo de impossibilidade». Esta explicação satisfaz? Parece-nos que não. O que se deveria apontar é a impossibilidade de solução da equação $0. x = k$ $(k \neq 0)$. De resto, tendo dito no Cap II que um infinitamente grande é uma *variável*, com que direito dá aquele nome ao símbolo $\frac{k}{0}$? Quanto aos símbolos $\frac{\infty}{k}$ e $\frac{k}{\infty}$ e, entendemos que não deviam aparecer como símbolos de impossibilidade. Caso se quisesse referir a estes símbolos, havia um lugar indicado para isso no Cap. II.
>
> c) Como explica o Autor a designação de símbolos de indeterminação? Quanto ao símbolo $\frac{0}{0}$ diz: «a fracção $\frac{0}{0}$ não tem significado e pode representar qualquer número, porque pondo $\frac{0}{0} = k$, vem $0. k = 0$ para todos os valores de k». Isto está precisamente às avessas; o que havia a assinalar é a indeterminação da equação $0. x = 0$, e, porque $a. x = b$ $(a \neq 0)$ admite a solução $\frac{b}{a}$, torna-se natural considerar $\frac{0}{0}$ como símbolo de indeterminação. Quanto ao símbolo $\frac{\infty}{\infty}$ só em termos de limites seria possível tratá-lo. Assim sendo $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to a} F(x) = k$ $(k \neq 0)$ é óbvio que $\lim_{x\to a} f(x)\, lim F(x) = \infty$, qualquer que seja k. Daqui o escrever-se a *igualdade simbólica* $k. \infty = \infty$ e considerar-se depois o símbolo $\frac{\infty}{\infty}$ como símbolo de indeterminação, em virtude de k ser um número qualquer. Ainda aqui o Autor pôs as coisas às avessas e,

> além disso, não sentiu necessidade de recurso a termos de limites. Análoga observação se poderia fazer para o símbolo $0.\infty$.
>
> d) No parágrafo relativo a indeterminações, ora se fala em fracções algébricas racionais, ora se fala em fracções algébricas. O Autor esqueceu que nesta última categoria, segundo a sua «definição», cabem fracções como, por ex., $\frac{cotg\,x}{\log x}$. Desse esquecimento resultou poder afirmar que as indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ se reduzem às do tipo $\frac{0}{0}$ *estudado* e, por outro lado, só ter estudado as indeterminações da forma $\frac{0}{0}$ no caso das fracções algébricas racionais. Como faz então essa redução com o exemplo $\frac{cotg\,x}{\log x}(x = 0)$?[33]

Barros critica sobretudo o modo de exposição da matéria, referindo, contudo, alguns erros de lapso. Se o modo de apresentar os conteúdos, é em nossa opinião uma opção pessoal, os erros seriam de evitar.

A abordagem que AAL faz aos números complexos a duas unidades também é objeto da crítica de Barros, é a nona crítica. Começando por aprovar o facto de haver uma clara preocupação de sair dos moldes habituais nos livros do Ensino Liceal, remata dizendo que «é um mau capítulo do ponto de vista didáctico».[34] Em seguida, observa:

> O Autor, em lugar de manter até à altura conveniente a notação (a, b), para designar os pares ordenados, preferiu a utilização de $(a + bi)$, que emprega desde o início da exposição, embora faça certas observações correctas quanto ao sinal + e ao símbolo i. Aparecem, como consequência, confusões entre o sinal +, no sentido inicial, e o sinal +, símbolo operatório de adição, confusões que o Autor não conseguiu desvanecer, embora o tenha tentado (não devemos esquecer a categoria dos estudantes a quem se destina a exposição). Ora, parece possível esclarecer tudo isto. Assim[35], definindo no conjunto dos pares (a, b), a igualdade e a adição —definições habituais— segue-se imediatamente que todo o complexo se pode considerar como soma de dois

[33] Barros, «Crítica de livros», 21-22.

[34] Barros, «Crítica de livros», 22.

[35] Nota do autor no original: «Lições de Álgebra e Análise», Bento Caraça.

> outros: $(a, b) = a. (1{,}0) + b. (0{,}1)$. Tendo-se definida também produto de um complexo por um número real, mediante a igualdade $k. (a, b) = (ka, kb)$, é legítimo escrever $(a, b) = a. (1{,}0) + b. (0{,}1)$ onde os sinais + e **.** são sinais de operações. Os complexos $e_1 = (1{,}0)$ e $e_2 = (0{,}1)$ (que facilmente se reconhece serem irredutíveis um ao outro pela operação de produto do um deles por um número real - operação já definida) constituem *as duas unidades do campo complexo*. Observe-se, de passagem, que o Autor não se refere na sua exposição às unidades do campo, desligando-se assim, por completo, do título do capítulo. Qualquer complexo (a, b) pode obter-se da base (conjunto das duas unidades) por meio dos números reais a e b . Definindo seguidamente o produto de complexos pela igualdade $(a, b) . (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$ ou $(ae_1 + be_2) . (ce_1 + \mathrm{d}e_2) = (ac - bd)\, e_1 + (ad + bc)\, e_2$ é fácil estabelecer que $e_1{}^2 = e_1 . e_1$ e que $e_1 . e_2 = e_2 . e_1 = e_2$; $\mathrm{e}_2{}^2 = - e_1$; $e_1 . (a, b) = (a, b) = (a, b) . e_1$; o que mostra que a unidade e_1 desempenha no campo complexo o mesmo papel que 1 no campo real. Por outro lado, é fácil mostrar que entre os números complexos da forma $k . e_1$ (k real) e os números reais k se pode estabelecer uma correspondência *isomorfa*, podendo portanto convencionar-se escrever k em lugar de $k . e_1$ o que corresponde, a assimilar os números $k . e_1$ aos números reais k (como $1 . e_1 = e_1$, escrever-se-à [sic] 1 em lugar de e_1), Nestes termos é $(a, b) = a + b . e_2$, $e_2{}^2 = -1$. Usando a letra i, em vez de e_2, aparece então a forma $a + bi$ para o par (a, b).[36]

Barros refere que optaria por uma explanação usando a abordagem próxima das *Lições de Álgebra e Análise*, de Bento Caraça. Usaria a notação de complexo como par ordenado, enquanto AAL usa $a + bi$ que é notação que se utiliza atualmente. Pensamos que a notação atual é facilmente entendida pelos alunos a que se destina, em nossa opinião, a proposta de Barros tornaria a exposição mais complexa e, portanto, menos acessível à maioria dos alunos.

A décima crítica incide na exposição relativa ao estudo da equação de Diofanto, $ax + by = c$. Para provar que: se os coeficientes das

---

[36] Barros, «Crítica de livros.», 22-23.

incógnitas são primos entre si, a equação anterior tem pelo menos uma solução inteira, AAL opta por utilizar uma equação auxiliar e demonstra para esta equação a existência de soluções inteiras. Barros não concordando com esta abordagem de AAL, que considera não trazer benefício, prefere uma outra, em suas palavras:

> O que [AAL] poderia ter feito era associar à equação $ax + by = c$ a equação auxiliar $Au + Bv = 1$, onde A e B são os módulos de a e b. Conseguiria assim manter-se no quadro da Aritmética dos números positivos, a que estão limitados os alunos. É o que faz, por exemplo, o Prof. Vicente Gonçalves no seu Compêndio de Álgebra para o 7.º ano. O que não se compreende, de modo algum, é a substituição de $ax + by = c$. por $au - bv = 1$.[37]

O capítulo II —Limites— é aquele que Barros destaca pelos aspetos negativos, embora admita que existem dificuldades de apresentação daquele tema a jovens adolescentes. As críticas a este capítulo foram deixadas para a parte final do artigo, talvez por serem as mais contundentes. Na sua décima primeira crítica, Barros começa por apontar a confusão na forma como são apresentadas no *Compêndio* as noções de infinitamente grande e de infinitamente pequeno, dizendo:

> O Autor depois de abordar (e bem) o caso das sucessões de termos positivos, parece pretender generalizar ao caso de funções de variável contínua. No entanto, tudo fica tão pouco claro que nós próprios (e não podemos neste momento deixar de recordar os estudantes do 6.º ano) não sabemos se o Autor se refere a funções de variável contínua ou a sucessões, ao concluir, a pág. 45 e 46, com as definições respectivamente, de infinitamente grande e de infinitamente pequeno. No caso de se tratar de funções de variável contínua, as definições não servem; no 2.º caso (hipótese que consideramos pouco provável) tudo ficou restrito a sucessões, tornando-se portanto deslocados os exemplos que apresenta e, pior do que isso, ficando sem base tudo quanto é exposto a seguir.[38]

[37] Barros, «Crítica de livros.», 23.

[38] Barros, «Crítica de livros.», 23.

Prossegue com a crítica número doze, a propósito da noção de «infinitésimos simultâneos» (designação que considera inadequada, embora fosse oficialmente aceite), dizendo que

> *não tem qualquer conteúdo*[39]. Em face dessa definição, pág. 47, *todos os infinitésimos são simultâneos*. O Autor em período seguinte —numa semi-correcção— fala na possível dependência entre ε e δ, *achando que essa dependência está implícita na definição dada* (!!), mas mesmo esta referência é infeliz e inconsequente, como o revela o exemplo que deu a seguir, exemplo que completa a péssima (e errada) exposição deste número do § I.[40]

Prosseguindo o seu comentário ao mesmo capítulo, Barros critica o conteúdo do § II —limites de variáveis e de funções— reputando que «alguns dos seus erros não são mais que a repetição dos que aparecem no § I».[41] A sua crítica número treze refere-se à definição de limite de uma função, dizendo:

> Na definição de limite de uma função, pag. [sic] 56, o Autor, à maneira de síntese, diz «Esta definição traduz-se analiticamente pelas desigualdades 7) $|x-a|<\varepsilon\,;\,|y-b|<\delta$ e significa: - *aos valores de que verificam primeira correspondem valores de que verificam a segunda*, quando ε e δ são positivos e arbitrários. Nos termos da parte final do n.º 3 - A, da pág. 48, depende, em geral, de, ». Notam-se aqui erros e contradições; assim, por um lado ε e δ são positivos e arbitrários (*erro grave*) e, por outro lado, δ depende em geral de ε, isto $\delta=f(\varepsilon)$, o que contradizendo a primeira afirmação, mantém contudo o erro, visto que seria essencial frisar o carácter de independência de δ e não de ε, como o Autor sugere escrevendo $\delta=f(\varepsilon)$. O n.º relativo a limites à direita e limites à esquerda mantém estes erros.[42]

[39] Nota do autor no original: «O próprio Autor usa o termo em sentidos diferentes; ora considerando infinitésimos ligados como sinónimo de infinitésimos simultâneos, ora considerando dois infinitésimos quaisquer como simultâneos».

[40] Barros, «Crítica de livros.», 23.

[41] Barros, «Crítica de livros.», 23.

[42] Barros, «Crítica de livros.», 23-24.

A definição dada por AAL pode não traduzir o que lhe estava no espírito, com efeito pensamos que Barros tem razão na sua crítica, não é δ que depende de ε, é precisamente o contrário, para todo o $\delta > 0$ existe pelo menos um $\varepsilon > 0$ para que a primeira desigualdade indicada na transcrição anterior implique a segunda.

A décima quarta crítica de Barros é relativa a todo o § IV —continuidade— que tem, em sua opinião, fraca qualidade. Refere em particular «o título do n.º 17 —*definição intuitiva de continuidade*— e respetivas considerações; as observações que seguem a definição analítica de continuidade, pág. 72; tudo quanto diz sobre continuidade à esquerda e à direita».[43] Pensamos que esta crítica tem mais que ver com didática do que com rigor, pelo menos no que concerne às considerações relativas à definição intuitiva de continuidade. No *Compêndio*, exemplifica-se a continuidade do gráfico de uma função quadrática, salientando-se que «a imagem geométrica é uma curva a traço contínuo […] não pode, por isso, **saltar** bruscamente de um valor a outro».[44]

Antes de terminar, gostaríamos de referir que Barros desenvolve as suas críticas num estilo de escrita agressivo, que pensamos ser incómodo para a leitura e não ajudar à intenção construtiva da crítica, que consideramos ter existido. No final do artigo, Barros dá a sua impressão geral sobre o *Compêndio de Álgebra* analisado, onde reprova ao mesmo tempo o autor e os relatores do livro.

> Em conclusão, parece-nos que a obra, objecto desta crítica, não satisfaz para ser utilizada como livro único de ensino. Não podemos deixar de repetir neste momento algumas das afirmações feitas no princípio. Recai, não só sobre o Autor, mas também sobre a Comissão que apreciou os livros a concurso, a alta responsabilidade de terem fornecido a professores e estudantes um mau instrumento de trabalho que não preenche devidamente as condições exigíveis em livros desta índole. Admira-nos sobretudo que nenhum dos professores da Comissão de Apreciação tivesse sentido a gravidade dos erros e dos defeitos que apontamos (ou outros que não referimos). E que não há dúvida de que pelo

[43] Barros, «Crítica de livros.», 24.

[44] Lopes, *Compêndio de Álgebra, L1*, 70.

> menos a Comissão, colectivamente, não a sentiu, pois de contrário seria obrigada, como está expresso em disposições legais, a propor ao Autor as modificações convenientes.
>
> Que essas modificações apareçam brevemente, ou pelo menos na próxima edição deste trabalho, para bem do Ensino da Matemática no nosso país. [45]

Sobre o mesmo livro encontrámos na revista *Labor* dois artigos publicados em 1951, um deles da autoria de Maria Teodora Alves e, um outro, tendo como autor Francisco Maria Gonçalves, com os títulos *Merece esclarecimento* e *O conceito de limite no livro único de Álgebra para o Curso Complementar*, respetivamente.[46] A autora do primeiro artigo sugere que a utilização do termo proposição em dois sentidos diferentes na demonstração de um teorema pelo método de redução ao absurdo deve ser esclarecida, justificando a sua chamada de atenção pela importância que tem para os alunos o entendimento daquele método.[47] Maria Teodora termina dizendo «[não] me compete apresentar os necessários esclarecimentos. Deixo-os a quem de direito e limito-me, com a devida vénia, a chamar a atenção para o caso».[48] Francisco Gonçalves não concorda com o modo como são tratados no *Compêndio* alguns dos pontos do programa, a saber: a definição de função, a noção de infinitamente grande e a definição de limite, expondo sucintamente as razões da sua discordância. Gonçalves não concorda com a definição de função apresentada, por considerar que aquela seria muito restrita. O autor fundamenta a sua crítica em Emile Borel. Relativamente à noção de infinitamente grande, a crítica de Gonçalves incide em dois pontos, primeiro, a natureza da variável, e, segundo, um erro de lapso num exemplo (não é definido o domínio da variável). Gonçalves considera que a definição de limite dada no *Compêndio* não é exata, remetendo para uma definição que em sua opinião seria mais correta, embora segundo diz não seria

[45] Barros, «Crítica de livros», 24.

[46] Maria Teodora Alves ou Teodora Alves foi professora de Matemática do Ensino Liceal e Francisco Maria Gonçalves foi professor de Matemática do Ensino Liceal e autor de diversos manuais.

[47] Teodora Alves, «Merece esclarecimento», *Labor* 113 (1951): 206-207.

[48] Alves, «Merece esclarecimento», 207.

adaptável aos programas em vigor.[49] Em nossa opinião, o comentário de Teodora Alves foi pertinente, pois a linguagem em deve ser clara e rigorosa. Quanto à definição de função contestada por Gonçalves, entendemos que a definição do *Compêndio* é correta, e, que esta crítica de Gonçalves não é adequada, nomeadamente por referir uma definição alternativa que não poderia ser usada.

Teodora Alves redigiu um outro artigo, com o título *A propósito do conceito de função em Matemática*,[50] que se refere ao *Compêndio de Álgebra* e que foi publicado na revista *Labor*, em 1952. Considerando que uma afirmação feita por Gonçalves necessita ser esclarecida,[51] a autora desenvolve de forma clara e detalhada algumas reflexões acerca do conceito de função. A concluir, manifesta a sua concordância com a definição de função apresentada no livro único e a sua oposição à crítica formulada pelo seu colega Gonçalves.[52]

O estudo das críticas ao *Compêndio de Álgebra* para o 3.º ciclo liceal, da autoria de António Augusto Lopes, encontradas em revistas da época, evidenciou estas recaem principalmente sobre a qualidade científica do livro.

As primeiras palavras de AAL sobre as observações feitas ao livro surgem em 1952, no artigo *A propósito das críticas ao Compêndio de Álgebra para o 3.º ciclo*, publicado na revista *Labor*.[53] Depois de algumas considerações iniciais, onde sublinha ter reconhecido, desde o início, que o seu trabalho não estaria isento de erros,[54] encontramos claramente exposta a atitude da AAL no que respeita a falhas encontradas num livro: «corrigir, como professor é o que faço, em relação aos meus livros

---

[49] Francisco Gonçalves, «O conceito de limite no livro único de Álgebra para o Curso Complementar, *Labor* 117 (1951): 287-289.

[50] Este artigo é publicado depois do artigo de AAL que aludiremos em seguida.

[51] Teodora está a referir-se ao artigo Gonçalves, «O conceito de limite».

[52] Teodora Alves, «A propósito do conceito de função em Matemática», *Labor* 122 (1952): 654-660.

[53] António Augusto Lopes, «A propósito das críticas ao Compêndio de Álgebra para o 3.º ciclo», *Labor* 120 (1952): 500-506.

[54] AAL refere a frase de abertura do livro: «O autor não pode, nem deve cobrir com a capa da aprovação oficial, os defeitos que o livro tem. São, talvez, numerosos; qualidades também, por certo, terá algumas. Agradece os reparos e sugestões que sirvam para o melhorar». (António Augusto Lopes, «A propósito das críticas ao Compêndio de Álgebra para o 3.º ciclo», *Labor* 120 (1952): 500-506, 500).

e aos de outrem. A não ser que tomemos o livro único como sendo para desfiar, palavra por palavra».[55] Prosseguindo, AAL declara que como autor já teria tomado medidas no sentido de serem eliminados, em futura edição, os defeitos que fosse possível. Referindo-se à crítica ao compêndio feita por Laureano Barros e publicada na *Gazeta de Matemática*, em 1950, apresenta as razões que sustentam a falta de um comentário àquele texto e declara que a crítica teve uma parte construtiva que «a seu tempo será considerada».[56] No desenvolvimento do artigo, o autor agradece a Maria Teodora Alves e Francisco Gonçalves, esclarecendo o seu ponto de vista relativamente às questões colocadas por aqueles professores.

Quando apresentou o seu *Compêndio de Álgebra* a concurso, AAL tinha pouco mais de trinta anos e encontrava-se no quadro de efetivos desde 1948. Sendo tão novo e estando em início de carreira, interrogámos o autor sobre a decisão de concorrer naquela altura. AAL considerou que «possivelmente estaria demasiado verde para aquele trabalho. Mas, eu não parei de estudar [...]. Eu achava que a minha ideia seria diferente das ideias dos outros autores, e por isso concorri» (depoimento oral).

COMPÊNDIO DE ÁLGEBRA: COMPARAÇÃO DE DUAS EDIÇÕES DISTINTAS

Lopes referia ter dado indicações de correção para uma próxima edição,[57] o que nos levou a considerar que poderia haver versões diferentes do livro único de ensino da Álgebra para o 3.º ciclo, saído da Reforma de 1947. Procurámos encontrar versões diferentes desse livro único, tendo sido possível localizar duas, que iremos designar por L1 e L2 neste texto.

Os dois livros analisados, pertencentes ao mesmo autor, ostentam a autenticação do Ministério da Educação Nacional, tendo sido ambos aprovados oficialmente como livro único,[58] e estando, por isso, em conformidade com os conteúdos programáticos relativos à Reforma do

[55] Lopes, «A propósito das críticas ao Compêndio», 500.

[56] Lopes, «A propósito das críticas ao Compêndio», 500.

[57] Lopes, «A propósito das críticas ao Compêndio».

[58] *Diário do Governo*, II série, de 24 de junho de 1950.

Ensino Liceal, de 1947. É pertinente referir que os livros apresentam uma estrutura em que a sequência dos conteúdos é a do programa oficialmente aprovado.

O artigo 408º, do Decreto-Lei n.º 36 508, de 17 de setembro de 1947, permitia «aos autores de livros, durante o período de aprovação, propor a introdução, em novas edições, de alguma alteração que julguem conveniente». Assim, o livro que designaremos por L1 terá sido a versão que foi originalmente aprovada como livro único de Álgebra para o 3.º ciclo e o livro que designaremos por L2 é uma edição revista. Os indícios onde nos fundamentámos são os seguintes: i) livro L1 tem aposto o número 2709. Tem 337 páginas. Tem uma errata; ii) o livro L2 tem aposto o número 694. Tem 339 páginas. As gralhas que apareciam na errata de L1 já estão corrigidas no L2. A bibliografia de L2 adiciona, relativamente à do L1, as seguintes obras: Bento Caraça —*Lições de Álgebra e Análise* (vol. 2)— e Léon Brillouin —*Mathématiques*, Lib. Masson et C ie, Paris 1947.

No entanto, apesar das diferenças que existem entre L1 e L2, ambos são livros com uma estrutura onde em primeiro lugar se apresentavam os conceitos teóricos que o aluno deveria reter (a utilização de negrito para destacar o mais importante e facilitar a sua memorização), seguidos de exemplos e alguns exercícios (com soluções). Os exemplos e os exercícios são (quase) em exclusivo da Matemática, logo a ideia que ressalta é a de uma Matemática já feita e fechada em si mesma, isto é, sem ligações com outras ciências. Ao nível do grafismo, no livro L1 há uma maior densidade no texto do que em L2, pelo que o aspeto gráfico de L2 torna a leitura mais fácil.

Procedemos então à análise dos dois livros, L1 e L2, para tentar clarificar se as críticas apontadas por Barros na *Gazeta de Matemática*, de Dezembro de 1950, teriam influenciado o autor do livro para proceder às alterações. Para sistematizar a análise, foi atribuída, no ponto anterior, uma numeração às críticas de Barros. O estudo de alterações teve em conta essa seriação. Em seguida, registamos o que mudou nos textos relacionados com as críticas.

Relativamente à primeira crítica feita por Barros, AAL aparentemente seguiu a sugestão do primeiro de consultar as *Lições de Álgebra e Análise*, de Bento Caraça. No que respeita à segunda crítica, verificamos que em L2 o texto foi alterado.[59] Assim, depois de «$y = x^{\sqrt{2}}$ e $y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots$», está escrito «A razão é simples: para qualquer delas não estamos em presença de uma equação do tipo VII)».[60]

Analisando o texto, não registamos alterações nos textos relacionados com as críticas números três, sete, oito e nove. Estas críticas inserem-se naquele que chamámos eixo didático, por isso não nos surpreende que AAL tenha optado por não seguir as sugestões de Barros neste âmbito.

No texto relativo à quarta crítica, observamos uma alteração das definições de função crescente e decrescente, bem como a introdução de figuras com uma representação gráfica para ilustrar as definições.

No que concerne à crítica número cinco, foi apenas substituída a frase «Como é evidente, é outro polinómio inteiro»,[61] por esta outra «Já sabemos do 2.º ciclo, que é outro polinómio inteiro».[62]

Na sexta crítica, Barros comentou uma demonstração que se encontra em L1. Em L2, ao contrário do que acontece em L1, AAL já utiliza o método de indução para provar a propriedade enunciada. No final, numa *observação* esclarece o método.

Relativamente à crítica número dez, em L2 o texto aparece modificado, em virtude de se retirar a equação auxiliar utilizada em L1.

Devemos também aqui assinalar que no livro L1, a fechar o Capítulo VI, aparecia um pequeno texto sobre o método analítico indireto, que é retirado em L2. Este texto tinha tido uma referência crítica de Maria Teodora Alves, como mencionámos.

Sendo o Capítulo II — Limites— aquele que foi sujeito a maiores apreciações negativas, nas críticas publicadas na imprensa, fizemos uma comparação que abrangeu todo o texto. A nossa primeira leitura dos

---

[59] António Augusto Lopes, *Compêndio de Álgebra, 3.º ciclo*. No. 2707 (Porto: Porto Editora, Lda., s. d. L2), 22.

[60] Nota do investigador: Uma equação do tipo VII) é a que define uma função algébrica.

[61] Lopes, *Compêndio de Álgebra, L1*, 85.

[62] Lopes, *Compêndio de Álgebra, L2*, 89.

dois livros permitiu notar, de imediato, que foram feitas muitas alterações à apresentação de algumas definições e teoremas, quer na forma de expor. É patente no L2 que se utilizou uma linguagem mais clara e se tentou facilitar a compreensão de alguns assuntos por parte dos alunos.

Apesar de praticamente se manter a estrutura deste capítulo verifica-se uma alteração que consideramos bastante significativa, o recurso a representações gráficas para melhor esclarecer as definições apresentadas ou apoiar os exemplos dados e que não tinham sido objeto de críticas. O número de figuras aumentou de quatro no livro L1 para onze no livro L2.

Ao analisar o § I —Infinitamente grandes. Infinitésimos— as primeiras diferenças que registámos ocorrem nas definições de *Infinitamente grande* e de *Infinitamente pequeno*. No livro L2, o autor é claro ao referir que x é uma variável real, o que não acontecia no livro L1 e acrescenta uma observação às novas definições. Também, os exemplos apresentados no livro L1 são retirados no livro L2. No L2, há um novo ponto respeitante a infinitésimos, onde o autor refere que para indicar que «x é um infinitésimo», se usa em linguagem corrente «x tende para zero» ou o «limite de x é zero», o que é traduzível na linguagem simbólica da seguinte maneira: «$x \rightarrow 0$» ou «$\lim x = 0$».

A definição de *infinitésimos simultâneos* está alterada no livro L2 e é apresentada, para além de um modo mais rigoroso, de uma forma que facilita a compreensão por parte dos alunos. No mesmo livro, os exemplos apresentados já estão de acordo com a nova definição. Assim, no L1, definia-se «Sejam x e y dois infinitésimos e designaremos por ε e δ dois números positivos, arbitrariamente pequenos. Dizemos que x e y são dois infinitésimos simultâneos, quando aos valores x_n (de x) que verificam a igualdade, $|x_n| < \varepsilon$ para $n \geq n_1$ correspondem valores de y_n (de y) tais que a desigualdade, $|y_n| < \delta$ é verificada para $n \geq n_2$»; enquanto no L2 apresenta-se: «Seja $y = f(x)$ uma função real de variável real x. Definição: Se a todo o número positivo δ for possível fazer corresponder um número positivo ε (variável com δ, isto é, função de δ) por forma que a desigualdade $|y| < \delta$ seja verificada para todos os valores de x que satisfaçam a desigualdade $|x| < \varepsilon$ dizemos que $y = f(x)$ é um infinitésimo simultâneo com x».

Nesta última definição, é realçado o carácter de independência de δ, bem como a dependência de ε em relação ao valor de δ, o que faz toda a diferença no rigor e compreensão da definição.

No L2, no ponto 4 —Teoremas relativos ao produto de infinitésimos— e no ponto 5—Teoremas relativos à soma de infinitésimos—, surgem alterações no enunciado dos teoremas e nas demonstrações que decorrem da nova definição de infinitésimos simultâneos, atrás enunciada. São também retirados alguns exemplos.

No § II —Limites de variáveis e de funções— o autor substitui, do livro L1 para o livro L2, o título do ponto 6 —Limite de uma variável independente— por —Limite de uma variável—. Sendo que a parte relativa à interpretação gráfica permite uma exposição mais clara.

No L2, no ponto 8 —Limite de uma função—, o autor recorre a uma representação da definição de limite de uma dada função num ponto (figura 7.2.), para ilustrar que, dada a «função y (x) definida por $y = 3x + 4$» tem-se que «7 é o limite da função y (x) quando x tende para 1».

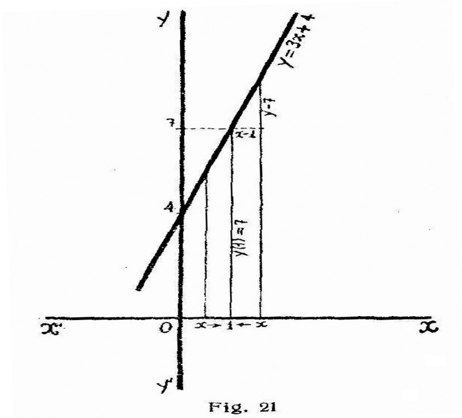

Fig. 21

Figura 1. O uso de representações gráficas – Limite de uma função num ponto (Lopes, L2, 57).

Para além da figura 1. apresentada atrás, podemos observar representações gráficas relativas a definições que são apresentadas ao longo do ponto 8.

No L2, a definição de limite de uma função para «x=a» está acompanhada de uma interpretação gráfica que não aparecia no L1 (figura 2.).

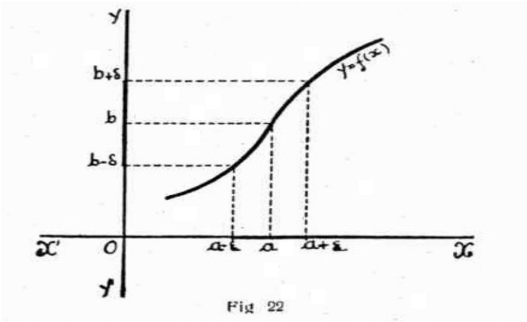

Figura 2. O uso de representações gráficas – Limites à direita e à esquerda (Lopes, L2, 58).

No ponto 9 —Limites à direita e à esquerda—, o ponto B apresenta, no livro L2, novas definições destes limites juntamente com a sua escrita simbólica, o que é igualmente uma novidade. Também o ponto C exibe novos exemplos, sendo a imagem geométrica da função utilizada para a determinação dos limites à direita e à esquerda.

O ponto 10 —Limites infinitos— tem todas as definições com nova redação e nos exemplos dados, apesar das funções serem as mesmas, são utilizadas representações gráficas o que vai ajudar à compreensão das conclusões. Apresentamos em seguida a representação ilustrativa de uma função que tem limites infinitos, relativa ao primeiro dos exemplos dados pelo autor na figura 3.

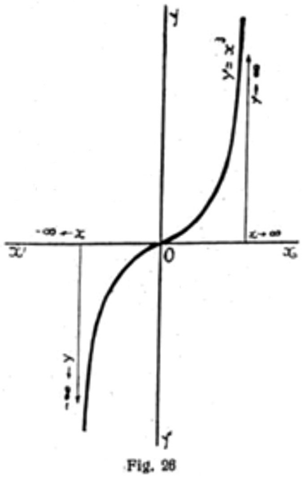

Figura 3. O uso de representações gráficas – limites infinitos (Lopes, L2, 61).

Este recurso à imagem constitui uma alteração didática relevante, pois está-lhe subjacente a noção de que as imagens são recursos pedagógicos que promovem a apreensão dos conteúdos. Com efeito, a imagem introduzida facilita a compreensão da matéria exposta.

Continuando a analisar o mesmo Capítulo no livro L2, houve ainda alterações no § III —Propriedades operatórias dos limites, no qual desaparece o que em L1 era intitulado Teoremas preliminares. Alguns dos teoremas deste parágrafo têm um enunciado novo e as demonstrações são todas diferentes. O § IV passa a designar-se —Noção elementar de continuidade de uma função— (preferimos esta intitulação), existindo algumas diferenças. A mais notória ocorre no ponto D com uma nova introdução às noções de continuidade à direita e continuidade à esquerda, permitindo-se um entendimento mais fácil das mesmas. Analisando as modificações registadas no teor do Capítulo II e as críticas de Barros,[63] notamos que houve a preocupação de corrigir o que as últimas recomendavam.

Para finalizar, não podemos deixar de referir que os exercícios que são introduzidos no final de cada parágrafo e no final do capítulo para resolução por parte dos alunos, são os mesmos, quer para L1, quer para L2. Em ambos os livros, o capítulo em foco termina com uma nota histórico/biográfica —Um matemático do século XIX: Augustin Cauchy— não se tendo identificado qualquer alteração na apresentação da mesma.[64]

Sobre o capítulo referente ao cálculo infinitesimal, da análise comparativa de duas edições distintas do livro ressalta que houve uma reformulação, que admitimos estar de acordo com algumas das críticas formuladas, especialmente com as que foram elencadas por Laureano Barros. A reformulação não se reduziu à substituição de definições ou outras modificações recomendadas pelos críticos, pois na nova edição são introduzidas mais representações gráficas. No nosso entender, a utilização de representações gráficas para ilustrar definições ou para os alunos poderem acompanhar um raciocínio foi uma inovação marcante

[63] Barros, «Crítica de livros».

[64] A introdução destas notas históricas/biográficas era uma das exigências do normativo referente à elaboração dos compêndios de Matemática do 3º ciclo do ensino liceal.

na nova edição. O que deixa claro que nas ações de reformulação do livro, António Augusto Lopes foi além das críticas preocupando-se em melhorar não só a qualidade científica, mas também a pedagógica do mesmo.

Shulman propôs três categorias de conhecimento relacionado com um conteúdo: conhecimento da matéria, conhecimento curricular do conteúdo e o conhecimento pedagógico do conteúdo.[65] O conhecimento pedagógico do conteúdo é a forma de representação e transformação da matéria de ensino que torna esta mesma matéria compreensível ao aluno. Este conhecimento especializado do conteúdo, é o que permite distinguir entre o conhecimento do conteúdo de um especialista de uma determinada área e o conhecimento de um professor nesta mesma área. As mudanças detetadas no conteúdo do *Compêndio de Álgebra* evidenciam um desenvolvimento no conhecimento da matéria, i.e., à quantidade e organização do conhecimento por si só na mente do professor; bem como, no conhecimento pedagógico do conteúdo do seu autor.

CONCLUSÃO

Em Portugal, no período da ditadura do Estado Novo, o livro escolar único aprovado oficialmente vigorou desde 1947 até à revolução de 25 de Abril de 1974. Com a democracia passa a haver liberdade editorial para a elaboração de livros escolares e a responsabilidade da respetiva escolha passa para os professores. A responsabilidade da conceção dos livros escolares passa a ser de editoras, presumindo-se que estas, para além, de seguirem as orientações do programa da disciplina também realizam um controle prévio sobre a qualidade científica e pedagógica do livro que editam.

A reforma de 1947, que estabelece o livro escolar único, também decreta a alteração dos programas de matemática para o 3.º ciclo e o cálculo infinitesimal, que estava fora dos mesmos há mais de uma década, e foi então reintroduzido. Este tema ficou incluído na parte dos programas concernente à Álgebra.

[65] Shulman, «Those who understand: Knowledge growth in teaching».

Os livros escolares teriam que estar em concordância com os novos programas; assim, houve um concurso para o livro único de Álgebra. A este concurso, foi apresentado apenas um livro, que foi aprovado como livro único em 1950, a saber, o *Compêndio de Álgebra* para o 3.º ciclo liceal, da autoria de António Augusto Lopes. Houve algumas críticas a este livro, que foram publicadas nas revistas *Gazeta da Matemática* e *Labor*. A nossa análise das críticas sobre o *Compêndio de Álgebra* esclareceu que diziam respeito, principalmente, à qualidade científica do mesmo. Da nossa análise comparativa de duas edições distintas do livro ressalta que houve uma reformulação do mesmo, que admitimos estar de acordo com algumas das críticas formuladas, especialmente com as que foram elencadas por Laureano Barros, um matemático. No âmbito deste trabalho, foi discutido apenas o capítulo referente ao cálculo infinitesimal. O estudo evidenciou uma mudança no conteúdo do livro que implicou um desenvolvimento do conhecimento pedagógico do conteúdo do autor. Este exemplo ilustra as dificuldades que os autores, muitas vezes também professores, têm de lidar quando enfrentam uma transição de currículo, especialmente, quando há alterações no conteúdo matemático a ser ensinado. Os professores hoje enfrentam novos programas de matemática que, no caso do ensino secundário, incorpora conteúdos que não foram ensinados durante mais de uma década, bem como enfrentam novos livros em linha com a nova realidade. Pode-se dizer que não há livros perfeitos, no entanto, existem livros escolares de melhor e pior qualidade. Acreditamos que este estudo, apoiado em um exemplo histórico, pode ajudar a melhorar a compreensão dos professores sobre a importância de escolher bons livros escolares de matemática.

Nota sobre a autora

Mária Cristina Almeida é licenciada em Matemática, Mestre e Doutora em Ciências da Educação. É professora de Matemática no Agrupamento de Escolas de Casquilhos, formadora de professores e investigadora na Unidade de Investigação Educação e Desenvolvimento da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. O seu principal interesse de investigação é a História da Educação Matemática, particularmente formação de professores, desenvolvimento curricular e livros didáticos, tendo vários trabalhos publicados neste campo. É membro

coordenador do Grupo de Trabalho sobre História do Ensino da Matemática, da Associação de Professores de Matemática. É coordenadora da *Coleção História e Memória do Ensino da Matemática*.

REFERÊNCIAS

Almeida, Mária Cristina. «A sombra da Matemática – um contributo para a compreensão desta disciplina no 3.º Ciclo Liceal (1947-1974)». PhD diss., Universidade Lusófona de Humanidades e Tecnologias, 2007.

APM. *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*. Lisboa: APM, 1998.

Chervel, André. «História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa». *Teoria & Educação* 2 (1990): 177-229.

Correia, José e Manuel Matos. *Solidões e solidariedades nos quotidianos dos professores*. Lisboa: ASA, 2001.

Gérard, François-Marie e Xavier Roegiers. *Conceber e avaliar manuais escolares*. Porto: Porto Editora, 1998.

Janeiro, João. «Os manuais de Matemática: O que deles dizem os professores». *Actas do ProfMat 2005* (CD-ROM). Évora: APM, 2005.

Matos, José Manuel. «A penetração da Matemática Moderna em Portugal na revista Labor». *Union, Revista Iberoamericana de Educación Matemática* 5 (2006): 91-110.

Matos, José Manuel. «History of mathematics education in Portugal». En *Handbook on the History of Education*, editado por Alexander Karp e Gert Schubring, 291-302. Londres: Springer, 2014.

Santos, Maria. *A Cidadania na voz dos manuais escolares*. Lisboa: Livros Horizonte, 2001.

Shulman, Lee. «Those who understand: Knowledge growth in teaching». *Educational Researcher* 15, no. 2 (1986): 4-14.